























1077  
46203  
Lomnice  
122  
ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXIII<sup>e</sup> ANNÉE.

(1923.)

UNIVERSITY OF CHICAGO  
LIBRARY  
CANCELLED

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

1923.







506.437  
C423

ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXIII<sup>e</sup> ANNÉE.

(1923.)



CANCELLED

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

1923.



Bureau of Standards

MAR 20 1925

CANCELLED

By Transfer

Bureau of Standards  
JAN 25 1932

18 503

WASHER  
TO  
BUREAU OF  
STANDARDS

ALOIS WIESNER, PRAGUE.



## Table des Auteurs.

	Page
<i>Silvestr Prát</i> : Quelques remarques sur l'organisation des Cyanophycées	1
<i>Prof. Dr. Boh. Kučera</i> : On the kinetic reaction of an asymmetrical top in constrained precessional motion .....	2
<i>Dr. Václav Posejpal</i> : Sur la variation de la réfraction de l'air et de l'anhydride carbonique avec la pression au-dessous d'une atmosphère .....	5
<i>C. Klouček</i> : Le genre <i>Bohemilla</i> Barr .....	9
<i>Odolen Kodým</i> : La tectonique des anciens terrains paléozoïques des environs de Slivenec, principalement de Přídolí au Sud de Prague	11
<i>B. Ježek à Příbram</i> : Note sur les cristaux de l'antimonite de Příbram	19
<i>MUDr. Jan Wolf</i> : Le développement des îlots de Langerhans chez l'homme à l'état embryonnaire .....	22
<i>B. Ježek à Příbram</i> : Notes cristallographiques sur l'antimonite d'Allchar et de Baia Sprie .....	26
<i>Dr. Jos. Klobouček</i> : Sur un complexe des droites du 4 <sup>e</sup> degré $G_{ab}$	29
<i>Alois Matějka</i> : La question de la „rupture de la Vltava“ .....	33
<i>Dr. J. Heyrovský</i> : Aluminic acid .....	35
<i>Dr. Maurice Remeš</i> : Excroissances des crustacés du Tithonique de Štramberk .....	36
<i>Dr. Karel Schäferna</i> : A contribution to the knowledge of the Gammarida of the Adriatic region and their geographical distribution	38
<i>Dr. Eduard Čech</i> : Systèmes trilineaires des lignes sur une surface et déformation projective des surfaces .....	44
<i>Dr. Fr. Rádl</i> : Sur les invariants d'une certaine équation linéaire aux dérivées partielles .....	46
<i>Dr. Frant. Rádl</i> : Sur une certaine équation linéaire aux dérivées partielles, et qui n'a pas la série des équations transformées .....	48
<i>Dr. K. Teige</i> : Observations à la Théorie de la Loi de Lorenz .....	49
<i>Dr. Jan Vilhelm</i> : Organe hermaphrodite d'une fleur anormale de <i>Lilium candidum</i> L. ....	51
<i>Dr. Jan Vilhelm</i> : La paracorolle des fleurs de <i>Mimulus</i> .....	53
<i>Silvestr Prát</i> : The Isolation of Fungi of Wasps'-Nests .....	57
<i>Dr. Jan Kořínek</i> : Sur la sensibilité des corrélations chez les plantes	59
<i>Dr. J. Heyrovský, H. Kadlcová, K. Stoklasová</i> : Solutions of aluminates of the alkaline earths .....	65
<i>B. Bydžovský</i> : Réduction du nombre de transformations quadratiques d'une quartique elliptique plane .....	68



<i>B. Bydžovský</i> : Sur les transformations quadratiques d'une quartique plane générale de genre un .....	72
<i>Dr. Boh. Ježek</i> à Příbram: Sur les constantes optiques de quelques minéraux de Bohême .....	76
<i>Dr. O. V. Srdínko</i> : Sur l'histologie du tissu tendineux dans les flexures	78
<i>Dr. Eduard Čech</i> : Sur la correspondance générale de deux surfaces	80
<i>Radim Kettner</i> : Transgressions et regressions de la mer du Silurien inférieur dans la Bohême .....	81
<i>Radim Kettner</i> : Etudes sur la tectonique près de Březina au Nord de Rokycany .....	86
<i>Quido Záruba</i> : La géologie du terrain pétrolifère près de Papradno en Slovaquie .....	91
<i>Dr. Antonín Vyskočil</i> : Sur la vitesse de réaction du magnésium en milieu aqueux .....	94
<i>Silvestr Prát</i> : Plasmolyse des Cyanophycées .....	96
<i>Dr. Vladimír Mašek</i> : Sur la surface remplie par des foyers de toutes les sections paraboliques d'un paraboloïde hyperbolique .....	98
<i>Alois Matějka</i> : Silurien inférieur de la contrée entre Vinoř et Brandýs n. L. ....	101
<i>Odolen Kodym</i> : Aplite diabasique de Housina près de Zdice en Bohême .....	105
<i>Mart. J. Marek</i> à Příbram: Note cristallographique sur l'amphibole de Shimasaki au Japon .....	114
<i>Dr. František Schustler</i> : Vrilles bractéaires de l'Antigonum et de la Brunichia (Polygonacées) .....	118
<i>Dr. Z. Frankenberger</i> , Ljubljana: Le mésonéphros des embryons des mammifères a-t-il une fonction excrétoire? .....	121
<i>Dr. Jan Vojtěch</i> à Brno: Rotation et symétrie de l'espace à quatre dimensions .....	129
<i>V. Rosický</i> (Praha): La Hornblendite de Kojetín et les roches qui l'accompagnent .....	133
<i>MUDr. Zdenko Frankenberger</i> : L'histogenèse des cellules interstitielles du testicule humain .....	138
<i>MUDr. Zdenko Frankenberger</i> : Sur les ovules rudimentaires dans les testicules de Lacerta vivipara Jacq. ....	144
<i>Dr. Henri Svoboda</i> : Sur la stabilité du noyau d'une comète tournant autour du Soleil suivant une conique d'excentricité arbitraire..	153
<i>C. Klouček</i> : Découverte de la faune Euloma-Niobe près de Ouvaly (Bohême) .....	159
<i>Alois Matějka</i> : Contribution à la connaissance du Crétacé sur la feuille de Prague .....	161
<i>Jaroslav Petrboř</i> : Document stratigraphique démontrant l'oscillation du niveau de la mer Adriatique à l'époque holocène .....	164



<i>Dr. Vlad. Mašek</i> : Note à la surface remplie par les foyers des sections paraboliques d'un parabolöide hyperbolique .....	165
<i>PhDr. Frant. A. Novák</i> : Le Vysoká dans les Petits Carpathes. (Étude phytogéographique) .....	168
<i>F. Ulrich</i> à Prague: La brookite de Bobrůvka .....	170
<i>Fr. Slavík</i> : Minerais de fer pisolithiques bauxitifères dans le Crétacé de la Bohême .....	172
<i>Dr. Jan Vilhelm</i> : La signification morphologique du calice, de la corolle et de la paracorolle dans les fleurs de <i>Mimulus</i> .....	174
<i>V. Veselý</i> : La composition chimique des minéraux de Chvaletice et de Litošice.....	177
<i>Otakar Matoušek</i> , PhDr.: Discovery of cenozoic beds on the island Pervicchio in the Northern Adriatic Sea .....	181
<i>Miloslav Hampl</i> : Potier's Relation for the Total Reflexion on Double Refracting Crystals .....	185
<i>Silvestr Prát</i> : Régularité de la valeur osmotique des cellules de Cyanophycées.....	189
<i>F. Slavík</i> : Deux roches éruptives anchimonominérales dans le gabbro de la Bohême occidentale .....	190
<i>F. Ulrich</i> : Sur l'identité de l'agnolithe avec l'inésite .....	193
<i>Fr. Ulrich</i> à Prague: Contribution à l'étude des phosphates de fer et d'alumine .....	198
<i>V. Veselý</i> et <i>M. Jakeš</i> : Sur la nitration du $\beta$ - acétonaphtalide.....	204
<i>V. Veselý</i> et <i>K. Dvořák</i> : Sur la réduction partielle des dinitronaphtalines .....	205
<i>Fr. Rádl</i> : Sur les équations différentielles ordinaires du 3 <sup>me</sup> ordre avec la série de transformation terminée dans les deux sens .....	206
<i>V. Hlavatý</i> : La représentation projective d'une surface du troisième degré $S_3^2$ de l'espace à quatre dimensions — dans un plan $\alpha_0$ ..	208
<i>V. Hlavatý</i> : La construction de l'espace quadratique à trois dimensions $E_3^2$ par 14 points .....	209
<i>K. Dusl</i> : Une preuve du théorème de Riemann-Roch pour les diviseurs fractionnels par les méthodes de la théorie des fonctions.....	211
<i>PhDr. Jaroslav Šafránek</i> : Sur la variation de la réfraction de l'oxygène avec la pression au-dessous d'une atmosphère .....	212
<i>П. Н. Чирвинский</i> : О фульгуритах .....	214
<i>Владимирь Чирвинский</i> : О своеобразных надresaх (надпилах) кристаллов горного хрусталя с горы Казбек на Кавказе .....	231
<i>П. Н. Чирвинский</i> : О находке самородного мытьяка в Ходском руднике Владикавказского округа в Терской области .....	237
<i>J. Sobotka</i> : Sur deux démonstrations du théorème de Feuerbach...	242
<i>J. Sobotka</i> : Le rapport du théorème de Feuerbach avec l'hyperbole équilatère .....	256







## Quelques remarques sur l'organisation des Cyanophycées.

SILVESTR PRÁT.

Dans les fibres des Cyanophycées jaunies par absence d'azote s'affaiblit la coloration de la cytoplasme (couche corticale de cytoplasme — Guilliermond, chromatophor — Fischer), mais surtout celle du corps central. Plustard le corps central ne se colore guère (méthylène bleu, brillantcresyl-bleu); et aussi il n'a plus de résistance à l'acide hydrochlorique et à la pepsine. Mais après l'avoir déplacé dans une solution nutritive déjà, 48 heures passées, ou pouvait vitalement colorer le corps central de bleu méthylène. Ce sont principalement les sels d'azote, dont révélation est la conséquence nécessaire de la colorisation. Pendant la plasmolyse ( $\text{KNO}_3$ , la glycérine) la déplasmolyse entait dans les fibres jaunies plutôt que dans les verts. Dans le corps central il y a très souvent des grains (volutine, metachromatine). Pendant la division des cellules ces grains se fondent. Pour leur formation les phosphates sont absolument nécessaires; tous les phosphates, dont on se servait, étaient plus ou moins convenables. La coloration vitale par le bleu méthylène apparaissait le plus souvent au même temps, que le reverdissement des fibres; les grains se formaient même dans les fibres jaunes, non seule à la lumière, mais encore à l'obscurité. Dans *Hormidium nitens*, *Chlorella protothecoides*, *Scenedesmus obliquus* (les cultures pures) aussi la formation des grains n'était pas remarquable que dans la solution des phosphates. Quelques observations pourraient être le marque de la présence d'enzyme fondant le volutin.

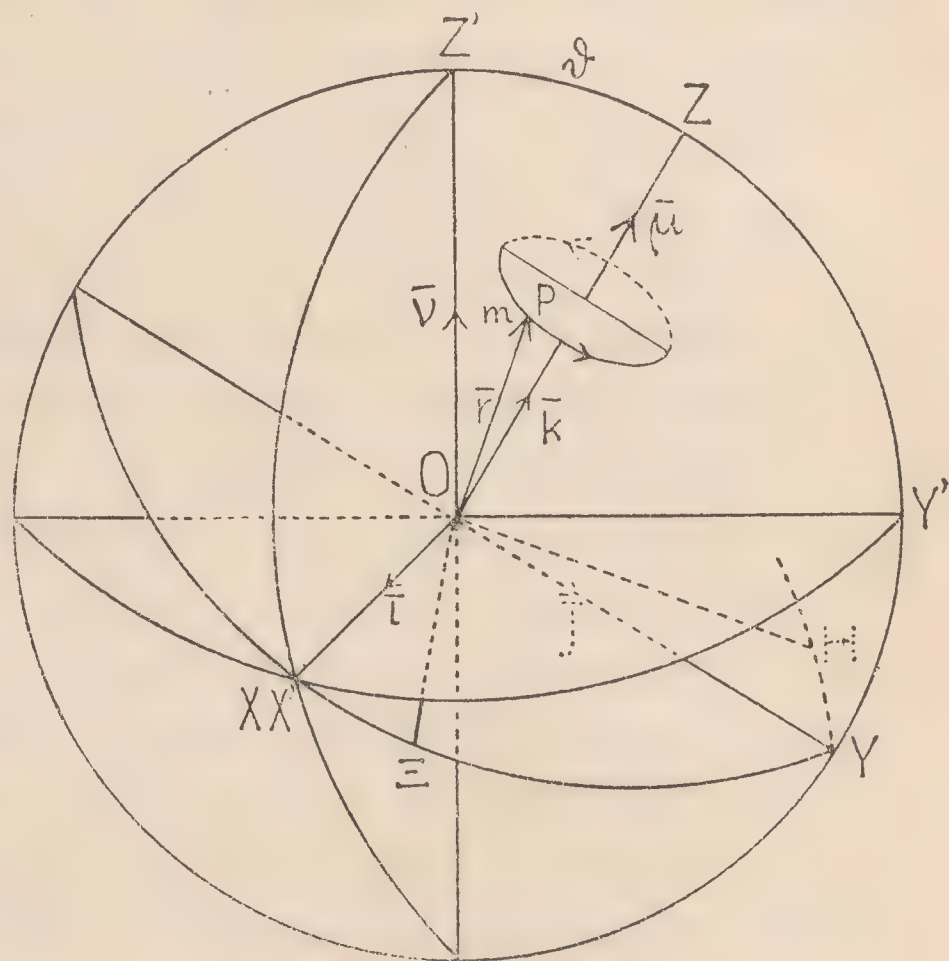


# On the kinetic reaction of an asymmetrical top in constrained precessional motion.

By Prof. Dr. BOH. KUČERA, M. A. S.

Pres. January 30. 1920.

The problem of the constrained motion of the common top (gyroscope) rotating about a principal axis of inertia can be treated from the point of view of relative motion. Let  $Z$  be the principal axis of the top about which it was initially set spinning with a constant angular velocity  $\bar{\mu}$ . (Letters marked with bars denote vector quantities). Let  $\Xi H Z$  be the principal axes of the top corresponding to the principal moments of inertia  $A, B, C$ . Being fixed *in the body* they have a relative motion to the set of axes  $X, Y, Z$ , which themselves perform an uniform rotation (with constant angular velocity  $\bar{\nu}$ ) about the axis  $Z'$  fixed *in space*. Let  $\mu t$  be the angle between the axes  $X$  and  $\Xi$ ,  $\vartheta$  between  $Z$  and  $Z'$ ; let  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  be the three unit vectors in the axes  $X, Y, Z$ .



In a very simple vector-analytical way we can find the general and hitherto unknown expression for the kinetic reaction\*) of the top. It is given by the couple

$$\begin{aligned} \bar{K} = & -\bar{i} M g l \sin \vartheta \\ & + \bar{i} \{ [(S - A) \sin^2 \mu t + (S - B) \cos^2 \mu t - (S - C)] v^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ & + [(B + C - A) \sin^2 \mu t + (A + C - B) \cos^2 \mu t] \mu v \sin \vartheta \} \\ & + \bar{j} \{ (A - B) (v^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \mu v \sin \vartheta) \sin \mu t \cos \mu t \} \\ & + \bar{k} \{ (A - B) v^2 \sin \vartheta \sin \mu t \cos \mu t \}. \end{aligned} \quad (1)$$

\*) Called also „deviation-resistance“ or „top-action“ by Klein and Sommerfeld in their well known Treatise on the Theory of the Top.



$M$  is the mass of the top,  $l$  the distance of its centre of mass from the point  $O$  provided that it is situated somewhere on the axis  $Z$  above the point of support (peg)  $O$ . Again

$$2S = 2 \sum m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = A + B + C.$$

All the terms in (1) containing  $\mu v$  are due to the compound centripetal forces (forces of Coriolis), the others containing  $v^2$  to the centrifugal forces.

From the general expression there can easily be shown, that the regular precession as a steady mode of motion is only possible with a symmetrical top ( $A = B$ ) under no external forces ( $l = 0$ ) or with a heavy symmetrical top, if in the first instance

$$\cos \vartheta = \frac{\mu}{v} \frac{C}{A - C} \quad (2)$$

or in the second

$$M g l = C \mu v + (C - A) v^2 \cos \vartheta. \quad (3)$$

If the  $\bar{j}$ -component in (1) be zero, i. e.

$$\cos \vartheta = -2 \frac{\mu}{v}, \quad |2\mu| < |v|, \quad (4)$$

we get

$$\begin{aligned} \bar{K} = \bar{i} \{ (A + B - C) \mu v \sin \vartheta - M g l \sin \vartheta \} \\ + \bar{k} \left\{ \frac{1}{2} (A - B) v^2 \sin \vartheta \sin 2 \mu t \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

and if also the  $\bar{i}$ -component vanishes the condition

$$(A + B - C) \mu v = M g l \quad (6)$$

being fulfilled, there remains a quick pseudoregular precession, where the rotation about the  $Z$ -axis is periodically accelerated and retarded, and in virtue of (4) the angle  $\vartheta$  also slightly varies periodically. With a symmetrical top ( $A = B$ ) we get in that way the so called „quick“ precession.

If we have to deal with a very slightly asymmetrical top, so that  $A = B + \Delta$ , where  $\Delta$  is a very small quantity, the couple (1) becomes

$$\begin{aligned} \bar{K} = -\bar{i} M g l \sin \vartheta \\ + \bar{i} \left\{ \left[ C - A - \frac{\Delta}{2} (1 - \cos 2 \mu t) \right] v^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + (C + \Delta \cos 2 \mu t) \mu v \sin \vartheta \right\} \\ + \bar{j} \left\{ \left( \frac{\Delta}{2} v^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \Delta \mu v \sin \vartheta \right) \sin 2 \mu t \right\} \\ + \bar{k} \left\{ \frac{\Delta}{2} v^2 \sin \vartheta \sin 2 \mu t \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

If the motion is very near to the steady state (conditions (2) or (3),  $\mu$  very great,  $v$  small) we get by neglecting the small terms with  $v^2$  as



a factor, that the top performs a regular precession, which is overlapped by the action of a couple

$$\overline{M} = \Delta \mu v \sin \vartheta \{ \bar{i} \cos 2 \mu t + \bar{j} \sin 2 \mu t \}. \quad (8)$$

It has a constant magnitude and its direction is rotating in a plane perpendicular to the axis  $Z$  of the top. The end of the axis (and so the apex of the top) describes a horizontal circle with cycloidical loops (periodic time  $2 \pi / 2 \mu$ ) very similar to „nutational“ loops.

All that can easily be shown experimentally with *Maxwell's* top.



# Sur la variation de la réfraction de l'air et de l'anhydride carbonique avec la pression au-dessous d'une atmosphère.

Par Dr. VÁCLAV POSEJPAL.

Présenté le 4 juin 1920.

§ 1. On a prouvé, dans un travail antérieur,<sup>1)</sup> que la réfraction spécifique de l'air n'est pas, pour les pressions au-dessous d'une atmosphère, invariable, mais qu'elle croît sensiblement avec la pression. Pour mettre ce résultat, imprévu et très important, hors de doute, on a étudié en 1918 et 1919 tout d'abord encore une fois l'air, et après l'anhydride carbonique.

On a modifié l'arrangement expérimental primitif de sorte qu'on pût effectuer toutes les mesures en ne se servant que d'une quantité donnée et peu considérable du gaz en question. En vue de l'importance de la calibration du manomètre employé, on a répété soigneusement cette calibration. De plus, on a modifié le procédé des manipulations de sorte que le déplacement des franges interférentielles a été évalué pour un déplacement bien déterminé du niveau de mercure; ce déplacement a été limité par les deux traits fixes  $b_{01}$ ,  $b_{51}$  sur la branche du manomètre laquelle servait à l'observation. La distance verticale  $b_{01} b_{51}$  fait  $x = 49.984 \pm \pm 0.001 \text{ mm}$ . Le déplacement correspondant du mercure dans l'autre branche du manomètre, évalué par la nouvelle calibration, fait  $y = 49.724 \pm \pm 0.012 \text{ mm}$ . Donc on travaillait avec une variation fixe de la pression de  $x + y = 99.708 \pm 0.013 \text{ mm}$ .

En évaluant les données du premier travail d'après ce résultat-ci de la nouvelle calibration du manomètre, on obtient la réfraction calculée d'après le procédé usuel (équat. (10) l. c.,  $\lambda = 0.54623 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ ) égale à  $10^6 (n-1) = 293.46 \pm 0.20$  pour la pression normale de  $760 \text{ mm}$  et la température de  $0^\circ \text{C}$ , et  $293.58 \pm 0.20$  pour  $0^\circ \text{C}$  et la pression de  $760 \text{ mm}$ .

---

<sup>1)</sup> Rozpravy Čes. Akad. II classe, année XXVI., no. 61, 1918. Bulletin intern. de l'Académie des Sciences de Bohême. 1918.



à Prague. Ce dernier résultat est identique avec celui de M. C. M Cuthbertson (3) 1909, 293.6, que l'on considère comme étant le meilleur.

Des constantes de l'équation (11) ne change en vertu de la nouvelle calibration que la constante  $K$  qui est alors  $0.36254 \pm 0.00010$ , ce qui donne pour la réfraction spécifique corrigée (d'après (11) l. c.)  $10^6 (n-1) = 292.59 \pm 0.14$ .

En un mot, la nouvelle calibration du manomètre a pour effet sommaire de rapprocher celles de nos grandeurs qui ont été mesurées avant nous par d'autres auteurs, encore plus étroitement aux résultats considérés comme les meilleurs, tandis que les grandeurs qui n'ont pas été mesurées jusqu'ici ( $\beta$  et la variation de la réfraction spécifique) sont restées inaltérées par cette calibration en étant indépendantes d'elle.

§ 2. Les expériences effectuées avec l'air dans le second travail en 1918 et 1919, ont donné:  $\alpha_1 = 0.32858 \pm 0.00012$ ,  $\beta_1 = 0.00000209 \pm 0.00000026$  (équat. (9) l. c.), la réfraction calculée d'après le procédé usuel et pour les conditions normales  $293.38 \pm 0.28$  et pour Prague  $293.50 \pm 0.28$  (équat. (10) l. c.). Pour les constantes de l'équat. (11) (l. c.) on obtient  $K \cdot 10^6 = 0.36284 \pm 0.00013$ ,  $\beta \cdot 10^8 = 318 \pm 41$ , d'où il suit pour la réfraction corrigée  $292.67 \pm 0.13$ .

L'accord avec les résultats livrés par le premier travail et donnés plus haut est bon dans les limites des erreurs d'observation. En considérant les moyennes de tous les deux travaux on a  $293.42 \pm 0.04$  pour la réfraction calculée d'après le procédé usuel et sous des conditions normales, puis  $K \cdot 10^6 = 0.36269 \pm 0.00015$ ,  $\beta \cdot 10^8 = 357 \pm 39$ , et alors  $292.63 \pm 0.04$  pour la réfraction corrigée. Les conclusions faites en 1917 se trouvent alors pleinement justifiées. Au-dessous d'une atmosphère la réfraction spécifique de l'air n'est pas constante, elle croît sensiblement avec la pression, et cela d'autant plus vite que la pression est plus faible, car  $\beta$  diminue avec la pression, d'abord et jusqu'à 4 atmosphères en raison inverse, dès là de moins en moins vite en convergeant à une valeur rendant enfin la réfraction spécifique indépendante de la pression.

§ 3. *L'anhydride carbonique.* Ce gaz a été obtenu au moyen du sodium carbonate monobasique, a été soigneusement séché par l'anhydride phosphorique et fractionné par l'air liquide.

Les expériences ont donné  $\alpha_1 = 0.49979 \pm 0.00024$ ,  $\beta_1 = 0.00001063 \pm 0.00000055$  d'où pour la réfraction sous des conditions normales et d'après le procédé usuel  $451.55 \pm 0.48$ . Les meilleurs résultats antérieurs sont 447.0 (Rentschler), 450.4 (Ketteler), 450.6 (Koch), 451.1 (Stuckert), 451.3 (Gruschke), 451.6 (Perreau), 455.4 (Mascart). Dans la littérature, on juge le résultat de Perreau comme le meilleur; notre résultat est le même.

Pour les autres grandeurs on a trouvé  $K \cdot 10^6 = 0.55191 \pm 0.00026$ ,  $\beta \cdot 10^8 = 1063 \pm 55$ , et alors la valeur corrigée de la réfraction est  $447.96 \pm 0.28$ . Le procédé usuel donne alors, de même que dans le cas de l'air,



pour la réfraction des valeurs trop élevées. En comparant  $\beta$  aux résultats des expériences antérieures (Chappuis et Rivière en 1888) on retrouve le même fait intéressant que l'on a vu dans le cas de l'air, c'est-à dire que  $\beta$  diminue si la pression augmente. Pour les pressions faibles la diminution est rapide, en raison inverse de la pression, puis elle se ralentit de plus en plus de sorte qu'en partant d'une atmosphère,  $\beta$  commence à croître. Puisque d'autre part d'après les mesures bien concordantes de MM. D. Berthelot, Lord Rayleigh et Leduc on a, à  $16^0\text{C}$  et au-dessous d'une atm.,  $\beta_s \cdot 10^8 = 730$ ,  $\beta - \beta_s$  n'est pas zéro et alors au-dessous d'une atmosphère la réfraction spécifique (équat. (13) l. c.) de l'anhydride carbonique augmente avec la pression, augmente plus vite plus la pression est faible et vice versa de sorte que dès la pression de 600 *mm* elle devient indépendante de la pression.

§ 4. Nous trouvons donc, qualitativement, pour l'anhydride carbonique le même résultat que pour l'air. Quantitativement on trouve une différence relative plus accentuée, entre  $\beta$  et  $\beta_s$  dans le cas de l'air ( $10^8 \beta = 357$ ,  $10^8 \beta_s = 61$ ) que dans celui de l'anhydride c. ( $10^8 \beta = 1063$ ,  $10^8 \beta_s = 730$ ), et de plus, si la pression augmente, la différence  $\beta - \beta_s$  devient insignifiante tout d'abord pour l'anhydride c., pour l'air plus loin, sous une pression plus élevée. Ces choses semblent être en relation, du moins partiellement, avec le fait que, à  $16^0\text{C}$ , l'anhydride est beaucoup plus rapproché de son point critique que ne l'est l'air. Il est donc probable que, réduits aux états correspondants, ces résultats manifesteraient même un accord quantitatif assez bon.

L'air étant un mélange de l'oxygène et de l'azote on peut, avec raison, supposer que des résultats semblables seront valables pour ces deux gaz-ci et on peut alors généraliser les résultats obtenus jusqu'ici. La réfraction spécifique des gaz au-dessous d'une atmosphère n'est pas constante, elle croît avec la pression, d'autant plus vite que la pression est plus faible et vice versa pour devenir invariable dès une pression donnée, non pas très éloignée de la pression atmosphérique. Le paramètre  $\beta$  (de l'équation  $n-1 = K p (1 + \beta p)$ ) qui est pour les faibles pressions beaucoup plus grand que  $\beta_s$ , diminue avec la pression, d'abord en raison inverse, puis de moins en moins vite en convergeant vers  $\beta_s$ .

Il s'agit d'encadrer ces faits remarquables dans nos idées actuelles sur la constitution et sur les propriétés optiques de la matière. De ce point de vue il convient tout d'abord de faire remarquer une certaine analogie qui existe entre le rôle de la pression (ou ce qui revient au même, de la concentration) dans le cas de la variabilité de la réfraction spécifique et dans celui de la fluorescence. Une fluorescence ou une phosphorescence n'est possible que partant d'une concentration assez faible des molécules fluorogènes ou phosphorogènes et le pouvoir fluorescent<sup>1)</sup>  $P$ , qui est le

<sup>1)</sup> M. Jean P e r r i n. La fluorescence, Ann. de Phys. (9) t. X., 133—159, 1918.



maximum pour des concentrations très faibles, diminue jusqu'à zéro si la concentration augmente. Or en désignant par  $N$  la réfraction spécifique, on trouve qu'il y a un parallélisme de marche entre les deux grandeurs  $P$  et  $\frac{dN}{d\phi}$  envisagées comme fonctions de pression, et que ce sont des concentrations du même ordre de grandeur auxquelles l'une et l'autre de ces deux fonctions converge à zéro.

M. Perrin explique<sup>1)</sup> la dépendance du pouvoir fluorescent  $P$  de la concentration, au moyen du modèle atomique de M. Bohr. Les états stables des atomes d'une matière donnée qui ont une énergie interne et, par conséquent, une fréquence d'oscillation propre  $\nu_0$  plus élevées, occupent un volume plus grand et leur formation est alors favorisée par la diminution de concentration. Plus donc la concentration est faible (plus le gaz est raréfié), plus augmente le nombre d'atomes de  $\nu_0$  croissant. Mais on a, d'après les diverses théories optiques de dispersion, dans le cas des atomes identiques,  $N = \frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2}$  en désignant par  $\nu$  la fréquence de la lumière employée. Si donc  $\nu_0$  augmente,  $N$  diminue, ce qui est précisément le résultat de nos expériences.

---

<sup>1)</sup> M. J. Perrin, Matière et lumière. Ann. de Phys. (9), t. XI., 5—108, 1919.



# Le genre *Bohemilla* Barr.

Par

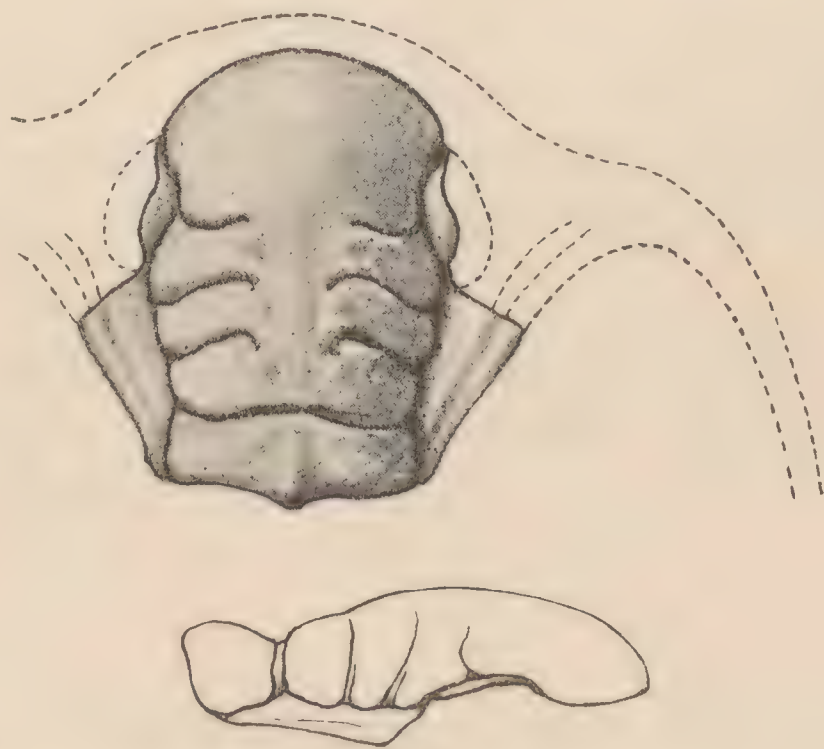
C. KLOUČEK, Prague.

Résumé.

Ch. E. Beecher s'est exprimé (dans *American Geologist*, Bd. 17, pag 360, 1896) qu'après avoir bien examiné l'original de *Bohemilla stupenda* Barr., il peut constater que le genre *Bohemilla* avait été fondée par suite d'une erreur; c'est à dire que Barrande avait considéré un fragment d'*Aeglina* pour un nouveau genre, et que, par conséquence, ce-ci perde complètement sa raison d'être.

En 1897 G. Holm s'est joint à cette opinion de Beecher. Nous sommes en état de prouver la fausseté de cette affirmation par l'illustration d'une tête d'un nouveau spécimen de *Bohemilla stup.*, parfaitement conservé, que nous avons trouvé récemment aux environs de Malé Přílepy près de Beroun dans  $d_1$ , supérieur.<sup>1)</sup> Une comparaison des genres *Bohemilla* et *Aeglina* ci-jointe, accompagnée par un dessin de la tête mentionnée ci-dessus, fait élucider les différences qui caractérisent chacun de ces genres.

Il en résulte l'indépendance considérable du genre *Bohemilla*, et en même temps on peut s'assurer que la différence entre le genre *Aeglina* et *Bohemilla* est beaucoup plus grande que celle-ci entre *Aeglina* et *Telephus*.<sup>2)</sup> Par conséquence le genre *Bohemilla* bien fondé par Barrande conserve son existence.



*Bohemilla stupenda* Barr., glabelle 3×1.  
L'original en Musée National (Barrandeum) de Bohême.

<sup>1)</sup> L'original de Barrande est déformé justement à la tête.

<sup>2)</sup> Assar Hadding, „Släktet *Telephus* Barr.“, Stockholm 1913.



	glabelle	joues	yeux	thorax	pygidium
Bohemilla	longue. 7 lobes.  L'anneau occipital.	Joues fixes étendues. Joues mobiles avec une longue pointe génale, courbée en arrière.	pas trop grandes avec lobes palpébrales.	decroissant en arrière, 5 segments ornés de la même manière que l'anneau occipital. Plèvres courtes.	petit par rapport à la tête.
Aeglina	courte, quelquefois longue. Sans lobes (excepté <i>Aeglina monophthalma</i> Klou. avec 5 lobes). Sans l'anneau occipital.	rudimentaires ou manquent. Aucune pointe génale.	très grandes à l'exception d' <i>Aeglina princeps</i> Barr.  Sans lobes palpébrales.	s'élargissant en avant ou égale comme en arrière. 6 segments lisses.  Plèvres courtes.	bien grand.



# La tectonique des anciens terrains paléozoïques des environs de Slivenec, principalement du Přídolí au Sud de Prague.

Par ODOLEN KODYM (Prague).

(Avec une carte géologique et deux coupes dans le texte.)

Présenté le 16 novembre 1920.

Cet ouvrage est la continuation de mon étude tectonique de la vallée Procope<sup>1)</sup> et forme en somme une partie des études géologiques sur le Barrandien, apportant des documents tectoniques et stratigraphiques à l'appui d'ouvrages plus généraux que j'ai publiés précédemment. Je passe sous silence l'aperçu stratigraphique, présenté en même temps, et que j'ai décrit dans une autre étude du même bulletin.<sup>2)</sup> Je ne parlerai pas non plus des endroits d'affleurement ni de l'étendue de formations et de bandes qui sont parfaitement visibles sur la carte géologique ci-jointe. La plupart des inclinaisons sont de même démontrées par la carte et par les coupes.

Dans la carte ci-jointe j'ai fait en partie la correction de ma carte géologique de la vallée Procope,<sup>3)</sup> quant à l'étendue des limons ainsi que des terrains crétacés et tertiaires du plateau de Slivenec.

\* \* \*

Les anciens terrains paléozoïques, de la tectonique dont il s'agit, dans la contrée figurée sur notre carte, *supportent pour la plupart, en discordance, les terrains crétacés et tertiaires et des limons pleistocènes* de sorte qu'ils n'affleurent que dans la vallée de *la Vltava*, dans le vallon dit *Pří-*

---

<sup>1)</sup> O. Kodym: Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpravy Č. Ak. XXVII. Tř. II. 1919.

<sup>2)</sup> O. Kodym: Stratigrafické příspěvky z jihozápadního cípu listu Praha. Rozpravy Čes. Ak.

<sup>3)</sup> Voir O. Kodym l. c. <sup>1)</sup>.



*dolí* qui s'étend de Slivenec jusqu'à la Vltava, dans la vallée de *Lochkov*, qui débouche dans celle de Radotín et dans la vallée *Procope*. Mais ces coupes naturelles sont si belles, qu'elles permettent l'étude des dislocations très fréquentes, de leur succession, ainsi que leur âge relatif et absolu.

Le grand axe du Barrandien parcourt la partie nord-ouest de notre contrée, savoir au Nord de Slivenec par *Holín* de direction ENE-WSW. Dans cette partie de notre carte, les schistes de *Srbsko h*) représentent le terme le plus récent du Barrandien en forme d'un *synclinal*, la terminaison périclinale qu'elles présentent se trouvant déjà en dehors de notre carte. Les couches, au Nord de l'axe du Barrandien, plongent en totalité vers le Sud, et celles du Sud vers le Nord. De sorte que *Přídolí* et la rive gauche de la Vltava, dont nous voulons parler ici,<sup>5)</sup> font partie du flanc sud, ce qui donne la direction habituelle des couches, de ENE à WSW, avec plongement vers le Nord. Nous y rencontrons naturellement, dans cette direction, de fréquentes déviations, visibles sur la carte. Le plongement, lui aussi, n'est pas uniforme, car au SES de Slivenec dans le *Přídolí* entre les cotes 328 et 299 les couches de *Liteň ex* et de *Budňany eß* forment un *anticlinal*, tandis que les couches du Silurien supérieur et du Dévonien près de la cote 299 forment un *brachysynclinal*, dépendant génétiquement et localement de la terminaison périclinale du bassin du Barrandien près de Prague.

Outre ces irrégularités du plongement, les couches sont coupées par de fréquentes dislocations, que nous pouvons classer en catégories suivantes: 1<sup>o</sup> Des surélévations dans le sens des dislocations longitudinales, 2<sup>o</sup> des affaissements manifestés dans des dislocations longitudinales, 3<sup>o</sup> des décrochements de direction N.-S., 4<sup>o</sup> des surélévations, dans le sens des dislocations transversales, 5<sup>o</sup> des dislocations plus récentes de direction WNW-ESE.

1<sup>o</sup> Des surélévations dans le sens des dislocations longitudinales<sup>6)</sup> sont les plus anciennes dans le Barrandien datant de l'époque varisque. Elles se sont formées pendant la première phase du plissement principal, en même temps que s'est formé le puissant *synclinal* du Barrandien, pendant le cours du redressement des couches. Les plans de ces dislocations plongent presque en totalité dans le même sens que les couches disloquées, avec une forte inclinaison (sous un angle de 60°—70° à peu près). Dans le sens de ces dislocations, des surélévations se sont manifestées. Elles ont été causées par la pression tangentielle, montrant la tendance du tassement des couches sur un espace plus restreint pour les accumuler en hauteur.

<sup>4)</sup> J'emploie la dénomination nouvelle des couches du Barrandien. Voir R. Kettner-O. Kodým, Nová stratigrafie Barrandienu. Čas. Musea 1919, Praha.

<sup>5)</sup> Je prépare un ouvrage plus important sur la géologie de la rive droite de la Vltava.

<sup>6)</sup> Voir: R. Kettner: Über die Eruptionsfolge etc. Jahrbuch d. k. k. Geolog. R.-A. 1917.



Comme exemple de ces surélévations longitudinales je puis citer la faille inverse de *Chuchle*<sup>7)</sup> ou le  $d\zeta$  est remonté sur le  $e\alpha$ . Cette faille inverse a causé la formation de la colonie „*Hodkovičky*“<sup>8)</sup> et l'enclavement de  $d\zeta$  entre la zone  $e\alpha$  au nord-ouest de *Malá Chuchle*. Cette faille inverse continue probablement jusque vers la gare de *Chuchle* où elle a causé l'alternance des couches  $d\zeta$  et  $e\alpha$  (voyez la carte géologique!). La continuation de cette faille inverse n'est pas nette, mais elle forme probablement la largeur extraordinaire de la bande  $d\zeta$  sur notre carte au sud-ouest de *Velká Chuchle* ainsi que l'affleurement de  $e\alpha$  à l'est-sud-est de *Lochkov*.

La faille-inverse qui a causé la formation des colonies „*Vinice*“ au nord de *Modřany*), „*Krejčí*“ (près du chemin de fer, de l'Ouest au Sud de *Velká Chuchle*) et „*Haidinger*“ (près de la même voie ferrée à l'est du *Lochkov*) est une autre surélévation du même genre. Cette faille inverse continue vers la colonie „*Lahovská*“ près de *Radotín*. Je l'appelle surélévation „*Krejčí*“. Une faille inverse semblable est visible dans la partie sud-ouest de notre carte au nord-ouest de la cote 313 près de *Lochkov*. — Dans le sens de cette faille inverse, la diabase de la zone  $e\alpha$  a été surélevée au-dessus des calcaires de *Budňany*. Dans le sens de ces dislocations, des surélévations se sont produites dans la direction du nord au sud, ainsi qu'il est de règle dans les surélévations longitudinales du flanc sud du Barrandien. Outre ces trois failles inverses, il y en existe deux autres dans le *Přídolí* entre les cotes 299 et 328, là où le mouvement fut sud-nord juste contraire aux précédents. Dans le sens de celle du Nord, le  $e\beta$  fut surélevé au-dessus de  $e\gamma$ , tandis que dans le sens de celle du Sud c'est  $e\alpha$  qui a été surélevé au-dessus de  $e\beta$ . Ces deux failles inverses étant des phénomènes locaux, je pense devoir rattacher leur origine au synclinal développé dans cette région. Il est tout-à-fait invraisemblable qu'elles dépendent de la formation de la faille inverse de *Závist*.<sup>9)</sup>

2<sup>o</sup>. Notre contrée n'est parcourue que par un seul affaissement longitudinal, que j'ai nommé affaissement de *Bráník*.<sup>10)</sup> Il parcourt la *Černá rokle*, au Nord de *Malá Chuchle*, entre  $e\alpha$  et  $e\gamma$ , le *Přídolí* au Sud-Est de la cote 328, entre  $e\beta$  et  $g\alpha$  et probablement près de *Lochkov* dans le milieu de la vallée, entre  $e\alpha$  et  $e\gamma$ . Cet affaissement a causé un *hyatus tectonique* dans la succession des couches. Il date aussi de la première phase du plissement varisque, mais ne s'est produit qu'à la fin des mouvements orogéni-

<sup>7)</sup> Voir l. c. <sup>1)</sup>.

<sup>8)</sup> Je ne veux pas citer ici la riche littérature sur les „colonie“.

<sup>9)</sup> C'est à Kettner que nous devons les principales descriptions sur la faille inverse de *Závist*. Voir: R. Kettner, Ein Beitrag zur Kenntnis der geolog. Verhältnisse der Umgebung von Königsaal. Verhandl. d. k. k. Geolog. R.-A. 1914. Du même l. c. 6. Voir aussi O. Kodym, Předběžná zpráva o účincích druhé fáze variského vrásnění v Barrandienu. Rozpravy Čes. Ak. XXVIII. 1919. Praha.

<sup>10)</sup> Voir l. c. <sup>1)</sup>.







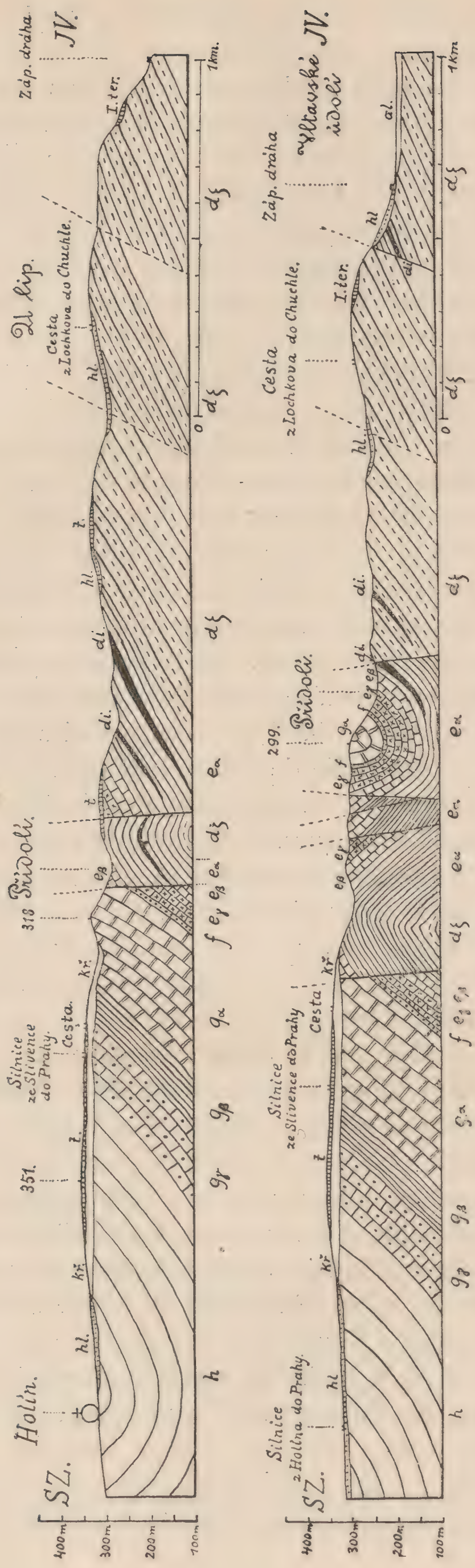


Fig. 2. Coupes du Přídolí.

La première coupe est comprise entre I—I, la seconde entre II—II de la carte fig. 1. di = diabase, kr = Crétacé, t = graviers tertiaires, I. ter. = 1<sup>e</sup> terrasse diluviale, hl = limons, al = dépôts récents.



ques de la première phase. Il correspond à la *diminution* du principal refoulement orogénique.

3°. Deux *décrochements de direction* N-S, tous deux dans le *Přídolí*, entre les cotes 299 et 328, ont été constatés dans la contrée étudiée; les *massifs de l'Est* ont l'apparence d'avoir été déplacés *vers le Nord*. Quoique ces dislocations n'aient pas dans notre contrée une grande importance, elles sont pourtant très intéressantes au point de vue théorique, car je les range dans la *catégorie dans laquelle je range aussi les dislocations de Hlubčepy* de même direction.<sup>11)</sup> Je les ai nommées *enroulements*, car les deux massifs voisins ont été enroulés de telle façon, que les couches de l'un ont été redressées davantage que celles du massif voisin. L'origine de ces dislocations est *génétiquement liée aux terminaisons périclinales du synclinal du Barrandien* et datent probablement du *commencement de la seconde phase* du plissement varisque.<sup>12)</sup> Dans ce cas, non plus, il ne m'a pas réussi de déterminer exactement *l'âge relatif de ces dislocations*. La seule chose dont on a pu s'assurer c'est, qu'elles coupent très nettement les *dislocations longitudinales*, ce qui prouve qu'elles sont postérieures à la première phase du plissement varisque. Je suppose qu'elles se sont formées *au début de la seconde phase*, avant les dislocations transversales.

4°. Toute la contrée étudiée est coupée par une série de *dislocations transversales de directions NW-SE* phénomènes des plus fréquents dans tout le Barrandien. Il est facile de suivre leur parcours sur la carte. Ces dislocations appartiennent à la catégorie des failles inverses, ainsi que j'en ai déjà fait mention ailleurs.<sup>13)</sup> Le *Přídolí* nous donne de nouvelles preuves que ce sont principalement *des mouvements verticaux* qui se sont manifestés dans le sens de ces dislocations. Entre les cotes 328 et 299 les couches de Liteň forment un anticlinal, coupé par une dislocation transversale de direction NW-SE; celle-ci se continue au-dessous des alluvions de Přídolí, jusqu'au Sud-Ouest de la cote 299, où la vallée tourne vers l'Est. Ainsi qu'on le voit sur la carte géologique le massif nord-est est relativement plus haut, que le massif sud-ouest, ayant été surélevé au-dessus de ce dernier. Ces dislocations résultent ainsi du *refoulement tangentiel*, principalement pendant *la seconde phase du plissement varisque*.

5°. Les dislocations citées sous 1°—4° ont déjà été plusieurs fois décrites dans de nouveaux travaux sur le Barrandien. On a cependant pu constater, dans la région étudiée *deux dislocations singulières, toutes deux très remarquables*, de direction *E SE-WNW*. L'une d'elles dans le *Přídolí* traverse à peu près *Velká Chuchle*, puis continue au Sud de la cote 299, passe par la cote 315 au Sud-Est de *Slivenec* et ensuite disparaît sous les dépôts considérables de limons et de graviers du plateau de Slivenec.

<sup>11)</sup> Voir l. c. <sup>1)</sup>.

<sup>12)</sup> Voir: O. Kodym: *Předběžná zpráva o účincích druhé fáze variského vrásnění v Barrandienu*. Rozpravy Čes. Ak. XXVIII. 1919. Praha.

<sup>13)</sup> l. c. <sup>12)</sup>.



Le mouvement qui s'est manifesté dans le sens de cette dislocation est très considérable car le  $d\zeta$  du Silurien inférieur affleure dans le voisinage immédiat du  $g\alpha$ , zone du Dévonien moyen. L'autre dislocation, considérable elle aussi, parcourt le vallon près de *Malá Chuchle* séparant  $g\alpha$  du  $ea$  et plus bas  $d\zeta$  du  $ea$ .

Dans le sens de ces dislocations, comme le montre la carte, des mouvements *verticaux* se sont manifestés et c'est pourquoi le massif situé entre *Velká Chuchle* et *Malá Chuchle* limité par ces deux dislocations, est plus bas que ses deux voisins du Nord et du Sud.

En attendant, je ne veux pas m'exprimer définitivement sur *l'âge de ces dislocations*. Ce qui est certain, c'est qu'elles *disloquent même les dislocations transversales du Barrandien*, qui ont la direction NW-SE, ainsi qu'on le voit du premier coup-d'oeil sur la carte géologique de Přídolí. Il en ressort, *que ces dislocations datent d'une époque postérieure au plissement varisque*. Il resterait à s'assurer si elles disloquent ou non le Crétacé. Je ne peux pas résoudre cette question, car il nous manque dans cette contrée de bonnes coupes naturelles et les limons avec l'éboulis ne permettent pas des observations plus exactes. Mais je tiens pour vraisemblable, que ces dislocations se sont formées *avant la transgression du Crétacé*, et qu'elles se sont *répétées* à l'époque tertiaire après que les couches crétacées se furent déposées.

*La dislocation de Přídolí* se continue hors de la carte vers Řeporyje, où elle forme la limite ouest de la colonie „*d'Archiac*“ et plus loin vers Krteň. La dislocation qui parcourt le vallon de *Chuchle* n'a pas été constatée avec certitude dans la vallée *Procope*, mais vraisemblablement elle la coupe au Sud de *Velká Ohrada*. — *C'est aux dislocations de ce genre que semblent appartenir les fréquentes dislocations de la même direction, constatées dans les mines entre Nučice et Jinočany.*

\* \* \*

Pour terminer je fais mention du *brachysynclinal* dans le Přídolí près de la cote 299. Il est très visible, formé par des couches de calcaire de *Bráník*, *Kosoř*, *Lochkov* et *Budňany*, fortement inclinées. Sur le versant sud de la colline marquée par la cote 331 nous trouvons déjà partout les schistes de *Liteň ea*. Ainsi la terminaison périclinale de ce brachysynclinal est parfaite. *Le flanc sud-est de ce synclinal* est remarquable car là se réunissent deux bandes de calcaires de *Budňany* ayant des directions différentes, l'une d'elles formant le toit de  $ea$  au Nord-Ouest de la cote 297 à la direction ENE-WSW, l'autre appartenant à la terminaison périclinale du brachysynclinal, à la direction NNE-SSW.  $ea$  qui est entre ces bandes, forme un *brachyantyclinal*, remplissant l'espace entre deux séries de calcaires de *Budňany*, qui ont été séparées, ainsi qu'il nous serait permis de le supposer, d'après les expériences faites dans la vallée *Procope* et dans les environs de *Beroun*.



Le but de ce travail est de présenter *la carte géologique, les coupes et une description tectonique de Přídolí* et de ses environs; d'attirer surtout l'attention sur *la succession des dislocations tectoniques*, prouvée par les études faites dans cette contrée, puis de faire connaître une *catégorie de dislocations postérieures au plissement varisque de direction ESE-WSW. auxquelles on n'a pas voué, jusqu'à maintenant, l'attention qu'elles méritent.* La carte ci-jointe montre aussi *l'étendue de différentes bandes paléozoïques et crétacées et de graviers tertiaires*, dont je fais mention dans mon travail stratigraphique publié en même temps.

Décembre 1920.

*Institut Géologique de la Haute École Polytechnique  
de Prague.*

---



# Note sur des cristaux de l'antimonite de Příbram.

Par  
B. Ježek à Příbram.

(Avec quatre figures.)

(Présenté le 22 Avril 1921.)

Les cristaux de l'antimonite de Příbram ont été mesurés seulement une fois par J. Jaroš<sup>1)</sup> en 1907 qui a trouvé 14 formes déjà connues et 4 rares formes nouvelles. J'ai mesuré quelques cristaux de la collection de l'Haute École des Mines à Příbram et j'ai trouvé suivantes 21 formes:

$$\begin{aligned} b &= 0 \infty (010), a = \infty 0 (100), h = 3 \infty (310), n = 2 \infty (210), m = \infty (110), \\ \chi &= \infty \frac{5}{2} (250), q = \infty 3 (130), z = 10 (101), s = \frac{1}{3} (113), p = 1 (111), \\ \delta &= \frac{1}{3} \frac{5}{12} (4 \cdot 5 \cdot 12), \tau = 1 \frac{4}{3} (343), \Gamma_1 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} (236), e = \frac{1}{3} \frac{2}{3} (123), \mathfrak{f} = \frac{2}{3} 2 (263), \\ \psi &= \frac{1}{6} \frac{2}{3} (146), * \frac{2}{3} 3 (293), \alpha = 1 \frac{3}{4} (434), * \frac{1}{4} \frac{3}{16} (4 \cdot 3 \cdot 16), * \frac{1}{6} \frac{1}{12} (2 \cdot 1 \cdot 12), \\ &\sigma = \frac{2}{3} \frac{1}{3} (213). \end{aligned}$$

Les formes nouvelles sont marquées d'un \*astérisque.  
Les cristaux mesurés peuvent être rapportés à trois types selon le développement des formes terminales.

- I. Cristaux terminées par hautes pyramides surtout par  $\tau$  et  $\sigma$ .  
No 1:  $\tau, \sigma, p, *(293)$ ; fig. 1.  
No 2:  $\tau, \mathfrak{f}, \sigma, p, *(293), \alpha$ .

La nouvelle brachypyramide  $* \frac{2}{3} 3 (293)$  est représentée par cinq faces dans tous les deux cristaux mesurés. Les faces de (293) sont petites, mais parfaitement planes et très brillantes. Cette nouvelle pyramide est une forme certaine, mais rare. La position de (293) est garanti par les angles  $\varphi$  et  $\varrho$ :

	$\varphi$		$\varrho$		Nombre des faces
	Mesuré:	Calculé:	Mesuré:	Calculé:	
(293)	12°29'	12°37'	72°21'	72°16½'	5

<sup>1)</sup> Rozpr. Čes. Akad. Tr. II., 1907, 14.



II. Les cristaux d'un autre échantillon sont pauvres des formes terminales et caractérisés par le développement des pyramides  $p$ ,  $\tau$  et le macrodoma  $z$  (Fig. 2). J'ai constaté, dans huit de ces cristaux, les formes suivantes:  $b$  (010),  $a$  (100),  $m$  (110),  $h$  (310),  $n$  (210),  $q$  (130),  $\chi$  (250),  $z$  (101),  $p$  (111),  $s$  (113),  $\tau$  (343),  $\sigma$  (213).

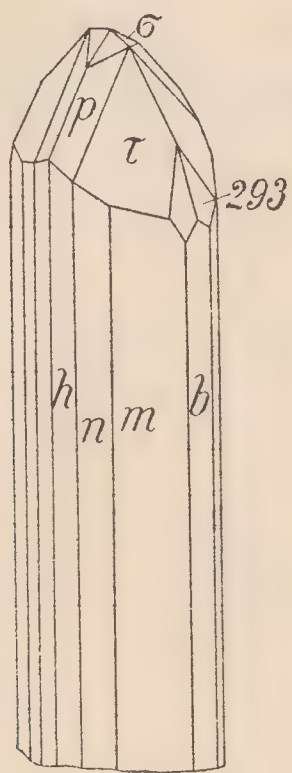


Fig. 1.

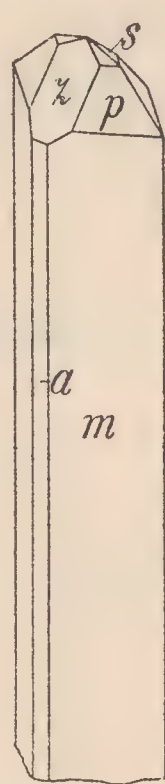


Fig. 2.

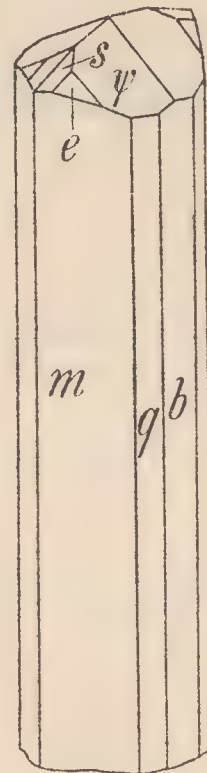


Fig. 3.

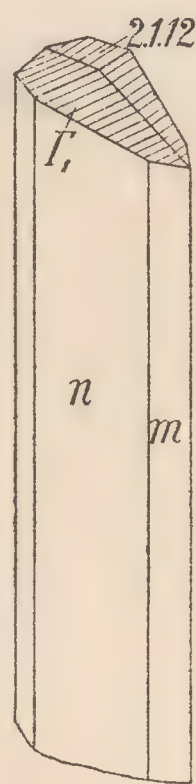


Fig. 4.

III. Les cristaux d'un troisième échantillon sont terminés par bases pyramides, surtout par  $\psi$  et  $s$ . Dans deux cristaux j'ai trouvé deux nouvelles certaines, mais très rares, pyramides  $*(2.1.12)$  et  $*(4.3.16)$ . Voici les incidences constatées pour ces deux nouvelles formes:

	$\varphi$		$\varrho$		Nombre des faces:
	Mesuré:	Calculé:	Mesuré:	Calculé:	
$(2.1.12)$	$63^{\circ}50'$	$63^{\circ}36'$	$20^{\circ}45'$	$20^{\circ}53'$	2
$(4.3.16)$	$53^{\circ}14'$	$53^{\circ}20'$	$23^{\circ}5'$	$23^{\circ}5'$	3

Intéressant est le cristal No 14, très exactement représentée par la figure No 4. Il est terminé par deux faces d'une base brachypyramide  $\Gamma_1$ , établie par J. J a r o š en 1907 et observée seulement dans l'antimonite de Příbram, et par deux faces de la nouvelle macropyramide  $*(2.1.12)$ . Toutes faces terminales sont finiment striées d'après leurs arêtes combinatoires.

À la fin j'ajoute un Tableau contenant les nouvelles formes et leurs valeurs de „*Winkel Tabellen*“ de V. G o l d s c h m i d t.



## Antimonit.

No. 1—4 Jaroš 1907; No. 5—7 Ježek 1921.

No.	Sign.	Gdt.	Miller	$\varphi$	$\varrho$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\xi$	$\eta$	$x$	$y$	$d$
1	$\mathfrak{L}_1$	$\frac{5}{4} \frac{5}{3}$	15.20.12	37° 04	61° 48	52° 02	59° 29	33° 03	46° 13	1.2814	1.6964	2.1259
2	$\Gamma_1$	$\frac{1}{3} \frac{1}{2}$	236	33 53	31 31	18 52	26 58	16 56	25 43	0.3418	0.5089	0.6132
3	$\mathfrak{S}_1$	$\frac{1}{12} \frac{1}{6}$	1.2.12	26 44	10 44	4 52	9 37	4 47	9 35	0.0853	0.1696	0.1897
4	$\psi_1$	$2\frac{4}{7} \frac{1}{2}\frac{7}{7}$	4.17.27	13 08	33 21	8 30	32 39	7 11	32 22	0.1496	0.6408	0.6581
5	*	$\frac{2}{3} 3$	293	12 37	72 16	34 21	71 52	12 07	68 21	0.6836	0.3054	3.1290
6	**	$\frac{1}{4} \frac{3}{16}$	4.3.16	53 20	23 05	18 52	14 17	18 20	13 32	0.3418	0.2533	0.4262
7	***	$\frac{1}{6} \frac{1}{12}$	2.1.12	63 36	20 53	18 52	9 37	18 37	9 07	0.3418	0.1696	0.3815



# Le développement des îlots de Langerhans chez l'homme à l'état embryonnaire.

Par

**MUDr. Jan Wolf,**  
assistant de l'Institut.

Travail de l'Institut de l'histologie et de l'embryologie à la faculté de médecine de l'université Charles à Prague. Chef prof. Dr. O. Srdínko.

(Séance du 24 Juin 1921.)

Les cellules troubles sont le premier commencement du développement des îlots de L. Ces cellules, caractérisées de granulation tendre eosinophilique, se montrent, poussées des canaux excréteurs ou des tubules pas encore différenciés, au stade  $4\frac{1}{2}$  *cm*, toujours séparées de la lumière. Les cellules troubles se multiplient et croissent en forme des cordons, qui se ploient, se ramifient et s'enroulent en forme presque sphérique sous la pression du tissu conjonctif, dans lequel ils pénètrent et qu'ils tendent en enveloppe, occupant ainsi le tissu conjonctif entre eux, et au contraire creusé activement par celui-ci et par des vaisseaux. L'îlot complètement développé consiste d'une partie centrale et d'une partie périphérique sombre, qui se place sur la partie claire en forme d'une calotte ou d'un côté en forme d'aile. La partie sombre est formée par des cellules, dont les grains spécifiques ne remplissent plus le corps entier, mais seulement une partie, une extrémité ou la périphérie du corps de la cellule; des noyaux petits, sombres et fréquents accomplissent la vue sombre. Cette partie ainsi que la partie claire est formée en cordons; mais ces cordons consistent de cellules claires, qui se montrent après la fixation et coloration spécifiques remplies de grains mitochondriales. Toutes les deux espèces se transforment l'une en l'autre.

La vascularisation des îlots de L. se développe très hâtivement, ainsi qu'ils sont vascularisés partiellement dans le stade 7.5 *cm*. Les vaisseaux capillaires forment un réseau à la surface, et un système entier de capillaires larges variqueux pénètre entre les cordons dans l'intérieur des îlots. Des vaisseaux plus forts parcourent vers les îlots plus grands, de sorte qu'ils paraissent comme de fruits sur un pédicule. Mais les hématies,



adultes et jeunes, sont posées en ce temps (13—14 *cm*) même hors de l'endothélium entre les cordons; çà et là un îlot est directement plongé par ses cordons dans une lacune des hématies, posées librement, sans enveloppe endothéliale au sein du tissu conjonctif. Si l'on peut s'expliquer la vascularisation riche des îlots par la pénétration des capillaires à cause d'une exigence augmentée de ces organes en voie de développement en comparaison avec les autres parties de la glande, on ne peut pas expliquer ces cas, si simplement où les hématies sont situées sans endothélium entre les cordons, ou où les cordons sont plongés directement dans la lacune des globules rouges. Ces formations ne sont que les „îlots à hématies“ des auteurs chez les animaux, mais qualitativement et quantitativement peu développés chez l'homme.

Dans le tissu conjonctif on peut observer en ce temps une activité hématopoïétique vive, originante des éléments mèsenchymateux, qui bientôt, ainsi que dans le foie, atteint (dans la moitié de la gravidité) son maximum; chez le nouveau-né elle n'existe plus. Çà et là on peut trouver les mêmes éléments hématopoïétiques même entre les cordons des cellules insulaires, car ils prennent naissance des cellules mèsenchym, qui furent incluses entre les cordons par le développement en forme des cordons des îlots décrits plus haut, resp. y sont pénétrés. L'explication est donc très simple: il s'agit dans l'îlot de la même hématopoïèse sortante du tissu conjonctif des îlots, comme on le peut voir partout dans le tissu conjonctif du pancréas embryonnaire. On ne peut donc parler du tout d'une transformation des éléments épithéliaux des îlots en globules rouges, soit par un changement de leur noyaux, soit par la condensation de leur mitochondries, comme certains auteurs voulaient expliquer les îlots à hématies.

Quant à la situation des îlots, ils se trouvent dans les stades les plus jeunes plutôt dans les parties centrales de la glande, en voisinage des canaux excréteurs plus grands. Ils sont plus fréquents et plus grands dans la queue et le corps que dans la tête du pancréas. Les stades jeunes possèdent les îlots isolés dans le tissu conjonctif, équivalants aux lobules du parenchyme; plus tard (dès le stade de 15—16 *cm* environ) ils deviennent de plus en plus occupés par les parties centrales des lobules, sauf les îlots jeunes, bourgeonnant de la paroi des canaux excréteurs.

Au premier temps du développement les îlots adhèrent aux canaux maternels par une base plus ou moins large; plus tard ils s'en éloignent en s'accroissant, ainsi qu'au stade de 13 *cm* ceux plus grands paraissent séparés des canaux excréteurs. Mais les coupes en série démontrent bien leur continuité à l'aide ou d'un pédicule solide ou d'un petit canalicule, qui se fut différencié à la place de cette partie relidente et auprès du quel est situé l'îlot peu en arrière de l'embauchement dans le canal maternel. De l'autre côté le petit canalicule se divise en voisinage de l'îlot en tubules ou en cavités sécrétoires.



Le sort final des îlots est la transformation en cavités sécrétoires. Depuis le stade de 18.5 *cm* cette transformation est très évidente, quoique elle se fasse valoir beaucoup plutôt déjà. Les îlots sont situés au centre des lobules parce qu'ils donnent naissance aux acini glandulaires distribués autour d'eux. La transformation des cordons solides en cavités sécrétoires se fait de la façon que leurs cellules insulaires perdent leur granulations spécifiques et mitochondriales et deviennent des cellules à zymogène par l'apparition de granulations zymogènes et par la transformation contemporaine de leur forme polyédrique ou cubique en forme pyramidale avec de granules au sommet (event. dans le corps entier) et avec un noyau arrondi situé à la base. Celle-ci commence à se teindre par les colorants basiques. L'apparition secondaire de la lumière accomplit le développement de la cavité sécrétante. Au commencement ce ne sont que des bourgeons et des alvéoles plus ou moins hémisphériques, qui entourent l'îlot de tous côtés. Ces cavités simples deviennent compliquées de cette manière que des cellules centroacinares se différencient dans leur centre et les cellules à zymogène à la périphérie se divisent en petits arcs; les sillons entre eux s'approfondissent jusqu'à ce qu'ils se divisent en cavités nouvelles qui deviennent lobées de nouveau et tout le procédé se répète. Autrefois les cavités sécrétantes se développent directement comme un système compliqué de la façon que les cellules centrales de l'îlot deviennent des cellules centroacineuses, les cellules périphériques se différencient en arcs des cellules zymogènes.

Que le changement n'est pas contraire, que les îlots n'originent pas des acini, c'est ce qui le prouve principalement:

1. l'accumulation des îlots autours des canaux excréteurs, laquelle on peut suivre peu à peu jusqu'au dernier temps.

2. les canaux excréteurs ne poussent pas d'autres cellules, que les cellules troubles, les éléments souches des îlots, et ce n'est que par cette transformation en parties exocrines, que les nouvelles parties de la glande peuvent s'ouvrir dans les canaux excréteurs.

3. enfin nous serions obligés de trouver pendant la transformation des lobules, dont les centres seraient formés par acini et la périphérie par le tissu insulaire; mais on ne trouve pas de tels lobules.

La glande s'accroît donc de deux manières:

1. au premier temps pendant son existence tubulaire pure par la poussée des tubules nouveaux et par le prolongement des tubules anciens;

2. au deuxième temps cette seconde manière diminue lentement et il commence une nouvelle, par laquelle l'accroissement de la glande est assuré:

Ce sont: *a*) la poussée des îlots (depuis le stade de 4.5 *cm*), qui s'accroissent et s'éloignent des canaux excréteurs maternels par l'accroissement des parties voisines. Plus tard ils se désagrègent en cavités sécrétantes



et donnent naissance alors aux parties nouvelles de la glande, aux lobules nouveaux, qui s'entreposent entre les autres.

b) l'accroissement, la lobulation et la division des cavités secrétantes déjà existantes, différenciées en partie au dépens des tubules soit par le bourgeonnement, soit par une différenciation directe de leur paroi, en partie développées au dépens des îlots. De cette division des cavités nouvelles prennent naissance, qui assurent des parties déjà existantes en subissant les mêmes transformations.

==



# Notes cristallographiques sur l'antimonite d'Allchar et de Baia Sprie.

Par  
B. JEŽEK à Příbram.

(Avec 6 figures.)

Présenté le 3 juin 1921.

## Sur l'antimonite d'Allchar en Macédoine.

La première nouvelle de l'antimonite d'Allchar fut donnée par H. F o u l l o n<sup>1)</sup> en 1890, les caractères cristallographiques sont traités dans le travail écrit par K. V r b a<sup>2)</sup> en 1894 qui a trouvé suivantes formes déjà connues et communes:  $b, q, m, \iota, n, \tau, \psi, s$ .

En mesurant quelques cristaux au moyen d'un goniomètre à deux cercles, j'ai trouvé 25 formes:  $b = 0 \infty (010)$ ,  $a = \infty 0 (100)$ ,  $h = 3 \infty (310)$ ,  $n = 2 \infty (210)$ ,  $\iota = \frac{3}{2} \infty (320)$ ,  $k = \frac{4}{3} \infty (430)$ ,  $m = \infty (110)$ ,  $\kappa = \infty \frac{6}{5} (560)$ ,  $r = \infty \frac{4}{3} (340)$ ,  $q = \infty 3 (130)$ ,  $i = \infty 4 (140)$ ,  $\vartheta = \infty 6 (160)$ ,  $\Theta = \infty 7 (170)$ ,  $N = 0 \frac{2}{3} (023)$ ,  $\tau = 1 \frac{4}{3} (343)$ ,  $s = \frac{1}{3} (113)$ ,  $K = \frac{2}{3} 1 (233)$ ,  $\sigma = \frac{2}{3} \frac{1}{3} (213)$ ,  $\psi = \frac{1}{6} \frac{2}{3} (146)$ ,  $* \frac{2}{3} \frac{7}{9} (679)$ ,  $* \frac{1}{3} \frac{5}{9} (359)$ ,  $* \frac{1}{7} \frac{5}{14} (2.5.14)$ ,  $* \frac{1}{7} \frac{4}{7} (147)$ ,  $* \frac{1}{5} \frac{9}{5} (195)$ ,  $* \frac{1}{3} \frac{1}{9} (319)$ .

Les formes nouvelles sont marquées d'un astérisque.

Dans le Tableau suivant sont compris les mesures des formes nouvelles.

Symbol		$\varphi$		$\varrho$		Nombre des Faces	Forme
Gdt.	Miller	Mesuré	Calculé	Mesuré	Calculé		
$\frac{2}{3} \frac{7}{9}$	679	41°33'	41°21½'	46°05'	45°58'	2	certaine, très rare,
$\frac{1}{3} \frac{5}{9}$	359	31 06	31 09	33 16	33 27	1	certaine, très rare,
$\frac{1}{7} \frac{5}{14}$	2.5.14	21 56½'	21 57	21 32	21 24	2	certaine, rare,
$\frac{1}{7} \frac{4}{9}$	147	14 11	14 08	30 36	30 57	2	vicinale,
$\frac{1}{5} \frac{9}{5}$	195	6 15	6 23½'	61 32	61 30½'	3	certaine, rare,
$\frac{1}{3} \frac{1}{9}$	319	71 42	71 41	19 41	19 48	5	certaine.

1) H. v. F o u l l o n, Verhdlg. geol. Reichsanstalt, Wien, 1890, p. 318.  
2) K. V r b a, Věstník Král. Čes. Spol. Náuk, Prague, 1894, No 48.



Les cristaux reproduits dans les figures 1—4, présentent les combinaisons:

No. 1.:  $b, n, m, q, i, \Theta, N, \tau, s, K, \sigma, \psi, *(679)$ .

No. 2.:  $b, h, n, m, q, N, s, \psi, *(359), *(195), *(319)$ .

No. 3.:  $b, n, m, q, N, s, \psi, *(2 \cdot 5 \cdot 14)$ .

No. 4.:  $b, n, m, q, i, N, s, \psi, *(147)$ .

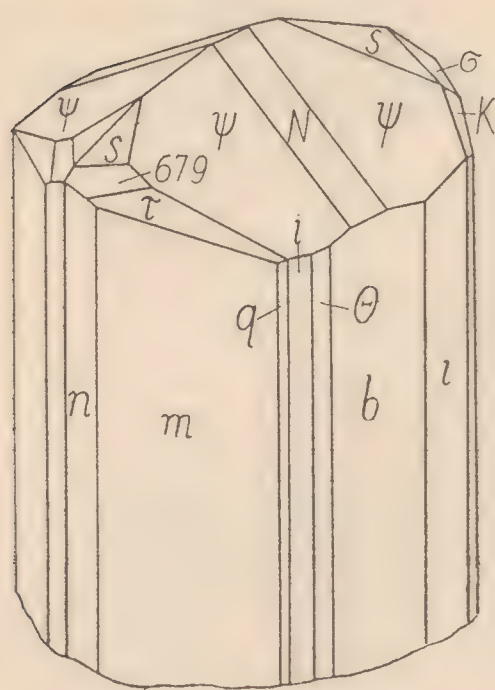


Fig. 1.

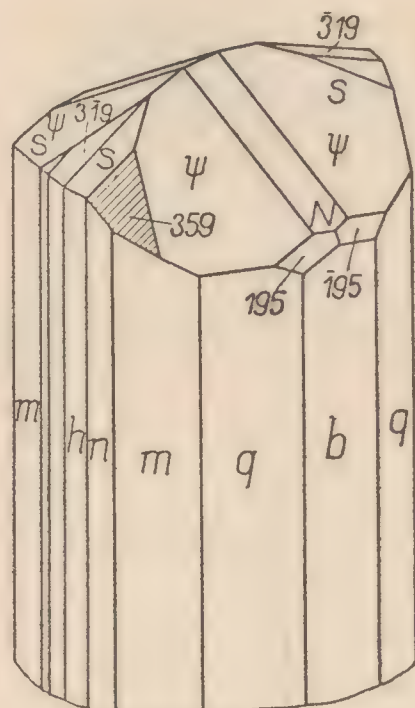


Fig. 2.

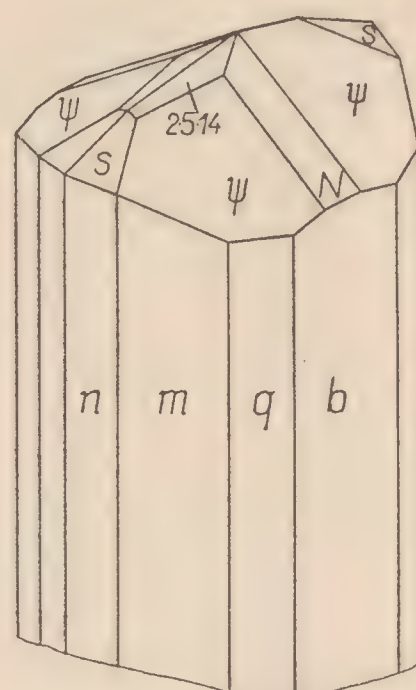


Fig. 3.

### Sur l'antimonite de Baia Sprie en Roumanie.

Les caractères morphologiques de l'antimonite de Baia Sprie (Felsőbánya) sont traités dans le grand travail écrit par J. K r e n n e r<sup>3)</sup> en 1865 et récemment par O. N e f f<sup>4)</sup> en 1916. La liste des formes observées par N e f f contient 82 formes.

Dans les cristaux de Baia Sprie que j'ai pu examiner, au nombre de 6, j'ai observé en tout 16 formes comprises dans la suivante liste. La forme nouvelle est marqué d'un astérisque:

$b = 0 \infty (010)$ ,  $a = \infty 0 (100)$ ,  $h = 3 \infty (310)$ ,  $n = 2 \infty (210)$ ,  $l = \frac{3}{2} \infty (320)$ ,  $m = \infty (110)$ ,  $r = \infty \frac{4}{3} (340)$ ,  $d = \infty \frac{3}{2} (230)$ ,  $l = \infty \frac{5}{3} (350)$ ,  $q = \infty 3 (130)$ ,  $p = 1 (111)$ ,  $v = \frac{1}{3} \frac{5}{3} (153)$ ,  $\text{? } \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{E} = \frac{5}{3} \frac{1}{3} (5 \cdot 11 \cdot 3)$ ,  $*(234)$ ,  $O = \frac{1}{2} \frac{9}{1} \frac{1}{2} \frac{6}{1} (10 \cdot 16 \cdot 21)$ .

La nouvelle base brachypyramide  $*\frac{1}{2} \frac{3}{4} (234)$  est représentée par six faces dans deux cristaux différents. Cette pyramide est une forme certaine:

	$\varphi$		$\varrho$		Nombre des faces:
	Mesuré:	Calculé:	Mesuré:	Calculé:	
$\frac{1}{2} \frac{3}{4} (234)$	33°37'	33°53'	42°29'	42°36'	6

À la fin j'ajoute un Tableau contenant les formes nouvelles et les valeurs de „Winkeltabellen“ de V. G o l d s c h m i d t.

<sup>3)</sup> J. K r e n n e r, Sitzb. Akad. Wien, 1865, 51, 445.

<sup>4)</sup> O. N e f f, Goldschmidt's Beitr. Kryst. Min., Heidelberg, 1916, Bd 1.



Les cristaux reproduits dans les figures 5—6, présentent les combinaisons:

- No. 5.:  $b, m, n, q, p, \varphi, O, \Xi$ .  
No. 6.:  $b, m, q, p, \varphi, *(234), ?\mathfrak{A}$ .

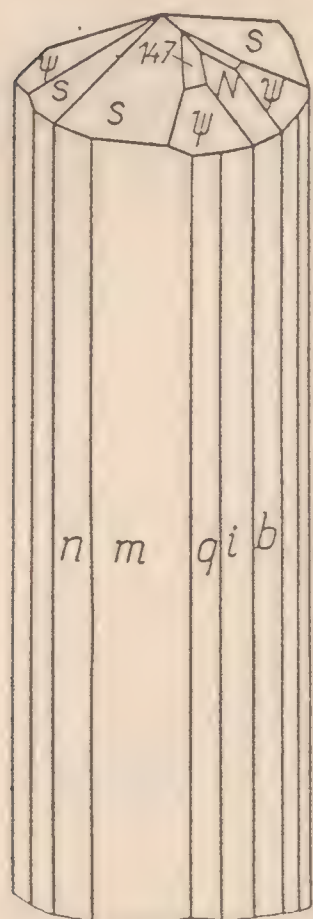


Fig. 4.

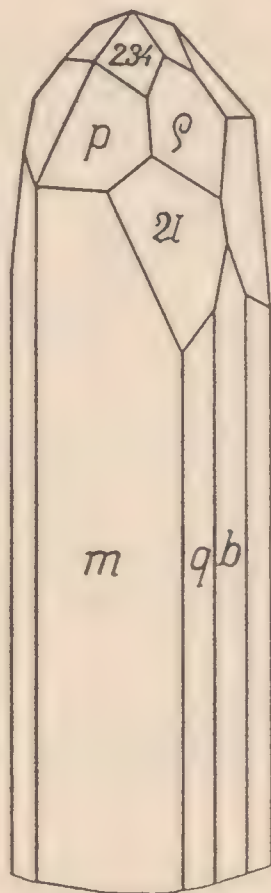


Fig. 5.

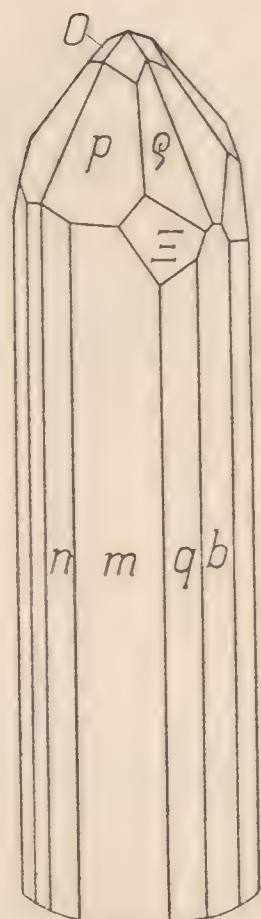


Fig. 6.

Antimonit:

$a : b : c = 0.9926 : 1 : 1.0179.$   
 $p_0 = 1.0253, q_0 = 1.0179.$

Nos	Gdt.		Miller	$\varphi$	$\varrho$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\xi$	$\eta$	$\kappa$	$\gamma$	$d$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	679	41°21.	45°58	34°21	37°49.	28°22	32°39.	0.6834	0.7664	1.0343
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	234	33 53	42 36.	27 09	37 21.	22 10.	34 11	0.5127	0.7634	0.9196
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	359	31 09	33 27	18 52	29 29	16 34	28 09	0.3418	0.5654	0.6606
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	2.5.14	21 57	21 24	8 20	19 58.	7 50.	19 47	0.1464	0.3635	0.3919
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	147	14 08	30 57	8 20	30 11	7 13	29 55	0.1464	0.5815	0.5996
6	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	195	6 23.	61 30.	11 35	61 21.	5 37	60 51.	0.2051	1.8309	1.8424
7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	319	71 41	19 48	18 52	6 27	18 45.	6 07	0.3418	0.1131	0.3600



# Sur un complexe des droites du 4<sup>e</sup> degré $G_{ab}$ .

Par

DR. JOS. KLOBOUČEK.

Dans ce travail je donne la génération et l'équation d'un complexe des droites du 4<sup>e</sup> degré, qui est engendré de cette manière.\*)

Fixons deux droites  $a, b$ , et cherchons toutes les droites  $c$ , qui jointes avec les droites  $a, b$  par une surface réglée du 2<sup>e</sup> degré  $H^2$  fournissent un élément superficiel gauche tel que le paramètre de torsion  $\kappa = \varrho \operatorname{tg} \varphi$  est constant. La quantité  $\varrho$  mesure la distance du point de contact d'un plan tangent mené par la droite  $c$  du point central et  $\varphi$  est l'angle que fait ce plan tangent avec le plan asymptotique.

Soient  $a_i, b_i, c_i$  les coordonnées homogènes rectangulaires des droites  $a, b, c$ ; les coordonnées  $q_i$  d'une droite quelconque  $q$ , qui avec les droites  $a, b, c$  appartient au même système des droites de la surface réglée  $H^2$ , peuvent se mettre sous la forme:

$$*q_i = \lambda^2 C a_i + \lambda (A a_i - B b_i + C c_i) + A c_i$$

où

$$A = \omega(b c) = \sum_{i=1}^3 b_i c_{i+3}, \quad (i \bmod. 6).$$

$$B = \omega(a c), \quad C = \omega(a b).$$

Le paramètre  $\kappa$  d'une surface réglée quelconque dont les génératrices  $p_i(\lambda)$  sont des fonctions analytiques d'un paramètre  $\lambda$ , s'exprime par la formule

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i' p_{i+3}'}{\sum_{i=1}^3 p_i'^2},$$

---

\*) J'ai publié quelques propriétés intéressantes de ce complexe dans le travail „Některé vlastnosti komplexu 4. řádu  $G_{ab}$ “ paru dans le „Věstník Král. učené společnosti“ roč. 1921.



où en même temps:

$$\sum_1^3 p_i^2 = 1, \quad \sum_1^3 p_i p_{i+3} = 0;$$

et  $p_i'$  est la dérivée de  $p_i$ .

Si nous calculons les coordonnées  $q_i$ , puis les dérivées  $q_i'$  sous la condition de  $\sum_1^3 q_i^2 = 1$ , et si nous posons alors  $\lambda = 0$ , les coordonnées  $p_i$  et ses dérivées  $p_i'$  de la droite  $c$  prendrons la forme suivante

$$p_i = \frac{c_i}{\left(\sum_1^3 c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$p_i' = \frac{1}{A \cdot \left(\sum_1^3 c_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[ A \left( a_i \sum_1^3 c_j^2 - c_i \sum_1^3 a_j c_j \right) - B \left( b_i \sum_1^3 c_j^2 - c_i \sum_1^3 b_j c_j \right) \right].$$

Puis nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_1^3 p_i'^2 = & \frac{1}{A^2 \cdot \left(\sum_1^3 c_i^2\right)^2} \left\{ A^2 \left[ \sum_1^3 a_i^2 \cdot \sum_1^3 c_i^2 - \left(\sum_1^3 a_i c_i\right)^2 \right] + \right. \\ & + B^2 \left[ \sum_1^3 b_i^2 \cdot \sum_1^3 c_i^2 - \left(\sum_1^3 b_i c_i\right)^2 \right] - 2 A B \left[ \sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 a_i b_i - \right. \\ & \left. \left. - \sum_1^3 a_i c_i \cdot \sum_1^3 b_i c_i \right] \right\} \end{aligned}$$

et

$$\sum_1^3 p_i' p_{i+3}' = - \frac{B C}{A \sum_1^3 c_i^2}.$$

Le paramètre de torsion  $\kappa^*$  de la droite génératrice  $p$  s'exprime alors comme il suit

$$\begin{aligned} \kappa^* = & - \frac{A \cdot B \cdot C \cdot \sum_1^3 p_i^2}{A^2 \left[ \sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \left(\sum_1^3 a_i p_i\right)^2 \right] + B^2 \left[ \sum_1^3 b_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \left(\sum_1^3 b_i p_i\right)^2 \right] - } \\ & - 2 A B \left[ \sum_1^3 p_i^2 \sum_1^3 a_i b_i - \sum_1^3 a_i p_i \sum_1^3 b_i p_i \right]. \end{aligned}$$



où

$$A = \omega(b \, p), \quad B = \omega(a \, p)$$

sont des expressions linéaires en  $p_i$ ,  $C$  est une constante qui détermine le moment des droites  $a, b$ .

Si nous mettons maintenant la condition  $\kappa^*$  constante, nous avons l'équation d'un complexe du 4<sup>e</sup> degré  $G_{a \, b}$ .

Une simple analyse de cette équation montre que toute génératrice de la congruence  $(a \, b)$  et toute génératrice infiniment éloignée de l'espace est un rayon double du complexe  $G_{a \, b}$  et que toute droite parallèle à l'une des droites fixes  $a, b$  est contenue dans  $G_{a \, b}$ .

Nous considérons maintenant le cas où les droites fixes  $a, b$  sont infiniment voisines.

Supposons que les quantités  $a_i$  soient des fonctions données de  $\lambda$  telles qu'on en peut appliquer le développement de Taylor et posons, pour obtenir les coordonnées  $b_i$  d'une droite infiniment voisine à la droite  $a$

$$b_i = a_i + \Delta t \cdot a_i' + \frac{\Delta t^2}{2} a_i'' + \dots$$

Alors

$$A = B + \Delta t B' + \dots, \quad \text{où } B' = \omega(a' \, p)$$

et

$$C = \frac{\Delta t^2}{2} \omega(a \, a'') + \dots$$

En substituant ces quantités dans l'expression générale pour  $\kappa^*$  et en considérant que

$$\omega(a \, a'') + 2 \sum_1^3 a_i' a_{i+3}' = 0$$

et

$$\sum_1^3 a_i' a_{i+3}' - \kappa \sum_1^3 a_i'^2 = 0$$

où  $\kappa$  est le paramètre de torsion de l'élément  $(a)$  que la droite  $a$  détermine avec la droite infiniment voisine donnée on trouve après quelques simplifications

$$\begin{aligned} \kappa^* = & \frac{\kappa B^2 \sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 p_i^2}{B^2 \left[ \sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 p_i^2 - \left( \sum_1^3 a_i' p_i \right)^2 \right] + B'^2 \left[ \sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \left( \sum_1^3 a_i p_i \right)^2 \right] -} \\ & - 2 B B' \left[ \sum_1^3 a_i a_i' \sum_1^3 p_i^2 - \sum_1^3 a_i p_i \sum_1^3 a_i' p_i \right] \end{aligned}$$



Dans ce complexe  $G_{ab}$  spécialisé toute droite de la congruence parabolique donnée par les droites fixes données et infiniment voisines est un rayon double, aussi bien que toute droite infiniment éloignée en espace et toute droite parallèle à la droite principale  $a$  du complexe.

Enfin nous simplifions cette équation en prenant le système spécial des axes de  $x, y, z$ . Nous posons la droite principale  $a$  du complexe  $G_{ab}$  dans l'axe de  $y$ , le plan asymptotique de l'élément  $(a)$  pour le plan de  $xy$  et le point central de cet élément pour l'origine des coordonnées.

La droite infiniment voisine à  $a$  sera normale à l'axe de  $z$ , la rencontrera dans un point qui est d'une quantité  $\Delta h$  éloigné de l'origine et son angle avec l'axe de  $y$  sera  $\Delta \alpha$ ; les coordonnées de ces deux droites seront

$p$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$a$	0	1	0	0	0	0
$b$	$\sin \Delta \alpha$	$\cos \Delta \alpha$	0	$-\Delta h . \cos \Delta \alpha$	$\Delta h . \sin \Delta \alpha$	0

Si nous introduisons maintenant le paramètre de torsion  $\kappa^*$  de ces deux droites, nous aurons

$$\kappa = \lim \frac{\Delta h}{\Delta \alpha}$$

et les coordonnées

$p$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$a$	0	1	0	0	0	0
$b$	$\Delta \alpha$	1	0	$-\kappa . \Delta \alpha$	$\kappa . \Delta \alpha^2$	0

En considérant  $\Delta \alpha$  pour l'accroissement  $\Delta t$ , nous pouvons prendre pour les dérivées  $a_i'$  les quantités suivantes:

$a_1'$	$a_2'$	$a_3'$	$a_4'$	$a_5'$	$a_6'$
1	0	0	$-\kappa$	0	0

Puis

$$B \equiv p_5 \qquad B' \equiv p_4 - \kappa p_1$$

et après une simple réduction on trouvera

$$\kappa^* = \frac{\kappa (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) p_5^2}{p_3^2 p_5^2 + (p_3 p_6 + \kappa p_1^2)^2 + (p_4 - \kappa p_1)^2 p_3^2} .$$



# La question de la „rupture de la Vltava“.

Par

ALOIS MATĚJKA, Prague.

Résumé du texte tchèque.

Krejčí, Feistmantel et Helmhacker classèrent les dislocations de direction nord-sud ou à peu près, dites ruptures de la Vltava, parmi les dislocations les plus récentes appartenant aux anciens terrains paléozoïques du centre de la Bohême; ils supposèrent que leur formation avait eu lieu à une époque postérieure à l'ère paléozoïque mais antérieure à la transgression cénomaniennne. Parmi ces ruptures la plus considérable était, selon leur avis, la dislocation, qui semblait marquer la direction du parcours de la Vltava au sud et au nord de Prague. D'après les études les plus récentes, faites dans la contrée avoisinant Prague, il est nécessaire de réfuter l'existence de la „rupture de la Vltava“, car les conditions de structure des terrains n'en fournissent aucun document. La où le parcours de la vallée de la Vltava c'esta commodé à la direction des perturbations tectoniques ce ne se fut jamais dans le sens des dislocations qui ont la direction nord-sud, mais principalement le long des dislocations transversales varisques de direction N. W.-S. E.

Quant aux ruptures antécétacées du Barrandien de direction N.-S., il est impossible de les réunir en un seul groupe comme l'ont fait les savants autrefois, car il y a des dislocations d'âges très divers et les mouvements tectoniques, qui se sont manifestés dans leur sens ont eu lieu de façons bien différentes. Les unes se sont déjà produites à l'époque du plissement varisque, les autres fort probablement ne se sont manifestées qu' à l'époque postérieure au Carbonifère.

Aucune raison ne permet pas non plus d'admettre l'existence d'une „rupture de la Vltava“ de direction N.-S., datant d'une époque postérieure au Crétacé, ainsi que le cite Katzer. La différence en hauteur des terrains crétacés, déposés à l'époque de la transgression cénomaniennne, de l'une et de l'autre rive de la Vltava au nord de Prague est causée soit



par l'inégalité primitive du sous-sol antécétacé, soit par de petits affaissements, postérieurs au Crétacé, dont la direction est proche de celle des ruptures varisques transversales.

Dès lors il est impossible de désigner les dislocations du centre de la Bohême de direction nord-sud comme „ruptures de la Vltava“.

*Institut géologique de  
l'École polytechnique tchèque de Prague.*

---



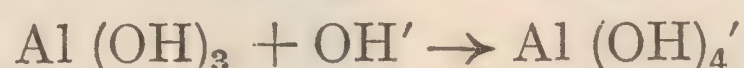
Dr. J. HEYROVSKÝ:

## Aluminic acid.

(A contribution to the theory of amphoteric hydroxides.)

### Summary:

The acidic properties of aluminium hydroxide are explained by complex anion formation according to the process:



(comp. J. Heyrovský, Trans. Chem. Soc. 117 [1920] p. 1013). From the mass action constant of this reaction, which determines the degree of hydrolysis of aluminates, the affinity of hydroxyl-ions to the solid aluminium hydroxide is calculated as

$$A = RT \ln (K + 1).$$

This is, in the case of the crystalline hydroxide, at 25° C, equal to 0.0180 volt-faraday, for the freshly formed hydroxide it is at 25° C 0.0912 and at 0° C 0.1000 volt-faraday.

It is further pointed out, that in the hydrolysis of aluminates the action of ions of water does not come in at all and consequently the „solubility product“ of aluminic acid has no real significance.

The stability of the complex anion  $\text{Al}(\text{OH})_4'$  is probably due to the close proximity of the four hydroxylic groups in the Werner's first coordination sphere. The four groups are held — using B. Brauner's conception of simultaneous electrovalencies — at the central aluminium atom by the four positive valencies, a new negative valency of aluminium holding the negative charge of the complex; the algebraic sum of these simultaneous valencies of aluminium remains, of course, + 3.

It seems, that for all amphoteric hydroxides the dissolution in alkalies is due to complex ion formation, the hydroxyl ions attacking the molecules of the solid hydroxides.

That one and the same compound could furnish both hydrions and hydroxyl-ions and thus act amphoterically is regarded as improbable.



# Excroissances des crustacés du Tithonique de Štramberk.

Par

Dr. MAURICE REMEŠ, Olomouc.

Avec 7 figures.

(Présenté le 3 Juin 1921.)

En étudiant *les crustacés de Štramberk*, mon intérêt a été éveillé par des *tumeurs* qui se trouvaient à la carapace de quelques-uns et toujours au même endroit. J'en ai trouvé une dizaine parmi quelques certaines d'exemplaires. Il était évident que ces intumescences n'étaient pas dues au hasard, causées par exemple par une blessure, car *leur localisation constante* rendait cette opinion improbable. En outre aucun indice n'est visible sur la surface qui permettrait de supposer qu'une force extérieure en ait été la cause de sorte qu'on ne peut les expliquer que dues à une cause interne. Les carapaces de ces crustacés fossiles sont conservés en forme de minces coquilles, incomplètes pour la plupart, et recouvrant les moulages internes; dans le cas où ces coquilles ne sont pas conservées nous ne pouvons juger leur forme que d'après la forme et le dessin des moulages intérieurs. De minces coupes n'auraient donné aucun résultat satisfaisant.

Je me suis alors rappelé que des intumescences pareilles sont provoquées sur les carapaces de certains crustacés actuels par des *bopyrides* parasites ce qui m'a fait supposer que de mêmes parasites ont certainement provoqué les excroissances constatées sur les crustacés de Š t r a m b e r k. Grâce à l'extrême obligeance de M. le Dr. J u l e s P i a, il m'a été permis de pouvoir étudier deux spécimens de crustacés à intumescence, causées par des bopyrides, appartenant aux collections du Musée de l'ex-cour impériale de Vienne. C'étaient des espèces de la mer Adriatique: *Galathea squamifera* Leach et *Leander squilla* Leach. Une analogie parfaite entre les excroissances fossiles et les excroissances actuelles est visible au premier coup d'oeil de sorte que leur origine est sans contredit identique.



Dr. MAURICE REMEŠ:

Excroissances des crustacés du Tithonique de Štramberk.









Les excroissances sont pour la plupart arrondies, plus ou moins nettement délimitées, de relief plus ou moins accentué et de différentes grandeurs. Dans les cas où la carapace est conservée, la surface en est parfaitement unie et les dessins n'en sont pas effacés. Outre tous les indices mentionnés, leur emplacement est particulièrement caractéristique, car on les trouve toujours, soit sur le bord droit soit sur le bord gauche de la partie postérieure de la carapace. Elles sont surtout bien visibles sur deux exemplaires (*Galathea antiqua* Möricke et *Galathea striata* Remeš) où elles occupent la partie postérieure droite de la carapace y formant une tumeur bien distincte. Les tumeurs de ces deux exemplaires du genre *Galathea* ressemblent le plus à celles que nous voyons sur les espèces actuelles. C'est principalement sur *Leander squilla* que la délimitation est très nette et bien visible, mais beaucoup moins sur *Galathea squamifera*. J'ai pu constater des intumescences pareilles à droite de la partie postérieure de la carapace sur les espèces suivantes: *Cyclothyreus strambergensis* Remeš, *Prosopon oxythyreiforme* Gem. *Prosopon Katholickýi* Rem. tandis que sur le *Prosopon polyodon* Reuss et *Pr. bidentatum* Reuss l'intumescence se trouve sur la partie postérieure à gauche. Elles se trouvent au même endroit dans le *Pr. complanatum* Reuss et dans le *Pr. complanati-forme* Möricke, mais comme elles sont peu visibles, j'en n'ai pas fait le dessin. Je pense que la partie du corps où se trouvent ces intumescences est celle où se trouvent les branchies. La comparaison que j'ai pu établir entre les exemplaires actuels et ceux mentionnés plus haut me prouve que les intumescences sont dans les deux cas causées par des bopyrides qui vivaient en parasites dans les cavités des branchies de ces crustacés. Je crois qu'il n'a pas encore été question de découvertes pareilles dans la littérature paléontologique. Je connais dans la littérature zoologique l'ouvrage de G. O. Sars: An account of the Crustacea of Norway vol. II. Isopoda. Bergen 1899, contenant des illustrations d'excroissances pareilles. Il m'a été impossible de me le procurer.

Il ressort de mes études que des bopyrides ou crustacés parasites semblables existaient déjà à l'époque du Tithonique et que, comme ceux de nos jours, ils ont causé de mêmes altérations sur les carapaces des crustacés.

Ces exemplaires qui se trouvent dans mes collections proviennent tous du calcaire blanc de Š t r a m b e r k.



# A contribution to the knowledge of the Gammarida of the Adriatic region and their geographical distribution.

By Dr. KAREL SCHÄFERNA.

Pres. March 14. 1919.

(With 9 figures in text.)

MUDr. Z d. Frank en b e r g e r has had the kindness to give me some Amphipods, which are collected by him on the battle-field at the rivers Piave and Tagliamento in the years 1917/18. All this material comes from the following localities:

1. C i t a N u o v a: *Gammarus pungens* Ray f. *carinata* mihi. 10 specimens with *Palaemonetes varians*. July 1918.
2. B a g n a r i a: *G. spinicaudatus* mihi (5 large specimens), *G. pungens* f. *acarinata* mihi (10 large specimens). November 1917.
3. S e s t o: *G. pulex* L. (9 spec.), *G. pungens* f. *acarinata* (3 spec. ♀♀), and *Niphargus illidžensis* f. *dalmatina* mihi (1 specimen). 1917.
4. M o n t i c a n o, a brook near F o n f a n e l l e: *G. pulex*, 20 specimens; *G. pungens* f. *acarinata* and f. *carinata* in numerous specimens, *Carinogammarus pungentiformis* mihi in 1 specimen. 1917.

In the whole collection prevails the species *G. pungens*, which was by the Italian zoologists very neglected. Della Valle thinks *G. pungens* is only a variety from *G. pulex*: „cioè nella var. di *G. pulex*, che va sotto il nome di *G. pungens*“ (l. c. pg. 27), or elsewhere: „per come modo di Sistematica io, con le debite riserve, mi risolvo così a registrar come buone le due specie del nostro Golfo, cioè il *G. locusta* e il *G. marinus*, senza poter far lo stesso anche col *G. pungens* che si confonde col *marinus* da una parte, e si riattacca dell' altra al *G. fluviatilis* tanto per l'abitazione quanto per la maggiore brevità dall ramo interno dei piedi codali posteriori. Tuttavia per comodo da Bibliographia e dello studio della Distribuzione geographica e Dimora riunisco sotto i nomi di *G. pungens* e *G. fluviatilis* le indicazioni di quei lavori che accennano a forme somiglianti a queste due“ (l. c. pg. 758).



But if we want to compare the marsupial plates of a female of *G. pungens* with the same of *G. pulex* (Fig. 1—4 and fig. 5—8), we can see that *G. pungens* is not only a variety, but a very good species, according

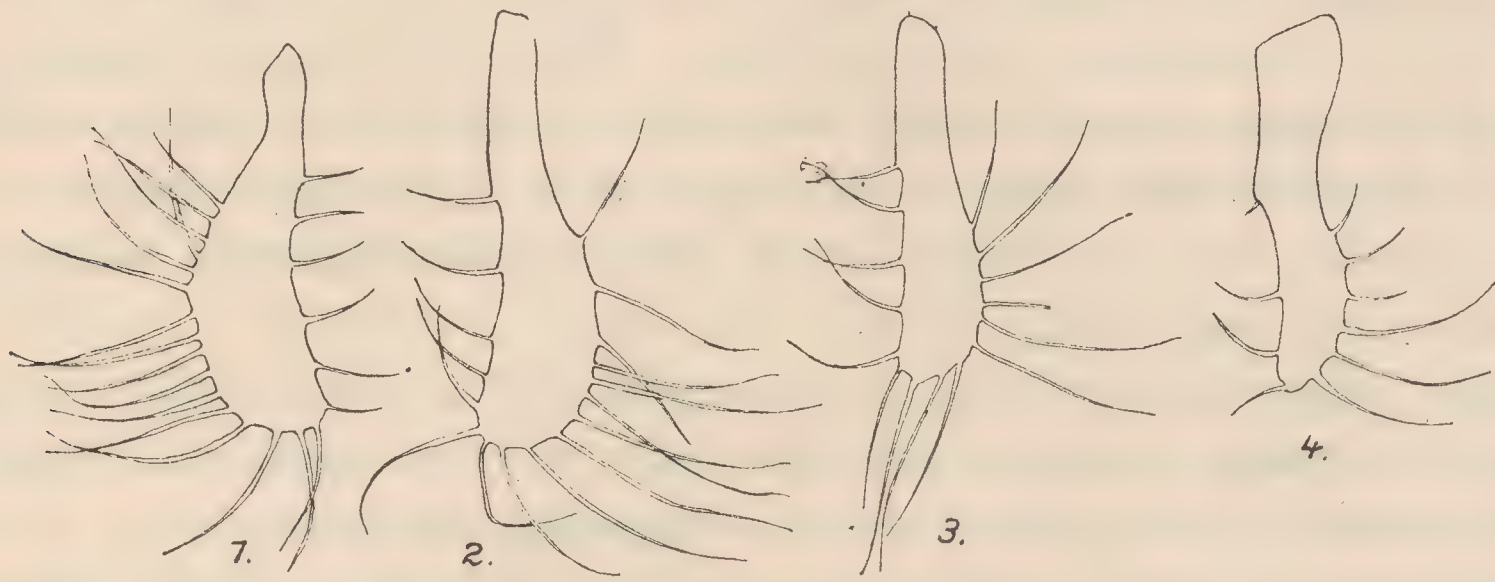


Fig. 1—4 *G. pungens*. Marsupial plates.

to Stebbing. But the marsupial plates of *G. pungens* are narrower and the last plate of the peraeon segment 5 is only little smaller than

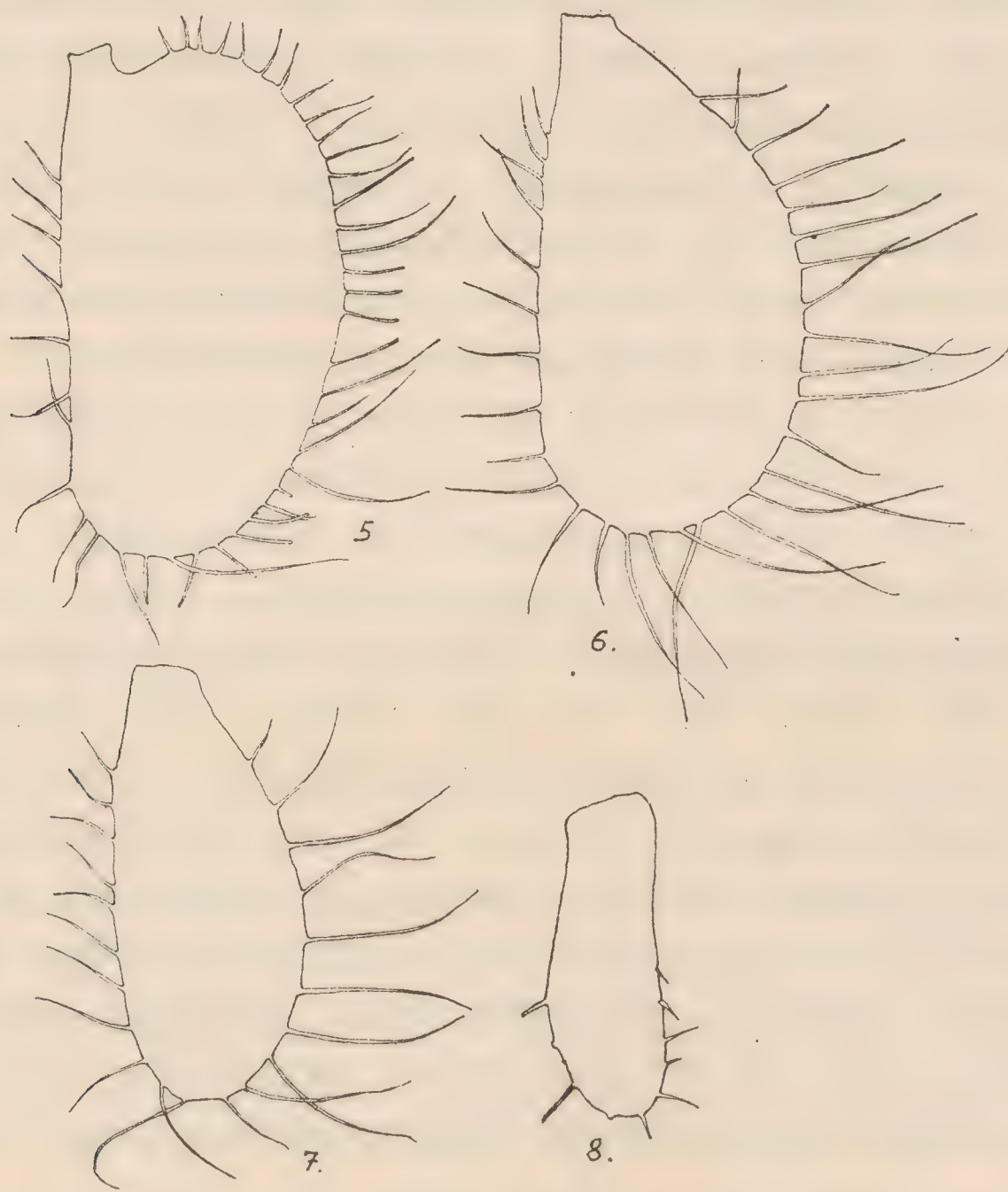


Fig. 5—8 *G. pulex*. Marsupial plates.

the preceding plate. The same marsupial plate of *G. pulex* is shortened. All the marsupial plates of *G. pungens* have very long basal sticks without side-fringes, while the same basal sticks of *G. pulex* are very short. That this is really only a shortening of the basal sticks, we can see at the size



of the fringes, which go with *G. pulex* till the basis (except the marsupial plate of the segment 5). The same plates of *G. pungens* are not hairy on the 2<sup>nd</sup> plate at one third and on the following plates nearly one half.

The abbreviation of the endopodit of the last uropod is not accidental but a consequence of variability. With the adult *G. pulex* is this endopodit always proportionally long and proportions, coming with the adult *G. pungens*, are only to be found with a young *G. pulex*.

Even the form of propodits of gnathopoda differs in both species with male and also female ones.

Also proportions of the 3—5 pereopod, of postero-lateral corners of pleon segments, of telson, and the form of eyes with *G. pungens* are specific marks I refer to in other monography of mine.

Therefore I cannot admit the opinion of A. Garbini who disavows the species *G. pungens* and identifies it with *G. fluviatilis* Roes. \*) He says that *G. pungens* differs from *G. fluviatilis* in the following manner: „per avere l'endopodito degli uropodi terminali rudimentale, e l'esopodito carico di setole“. Garbini puts also the following question: „Sarebbe carattere specifico cotesto? A mio credere no; perchè come abbiamo già visto nei *G.* della nostra provincia troviamo tutte le forme di passaggio fra gli individui con endopodito lungo quasi quanto l'esopodito (*G. fluviatilis* [i. e. *G. pulex*] della regione montana) e quelle con l'endopodito rudimentale“ (l. c. pg. 32). From the words of Garbini: „ad ogni modo siccome anche Della Valle specialista in materia volle mantenere comme buona tale specie, faccio altrettanto pur io“, we can see that he did not well understand Della Valle, because this author we have cited before did not declare *G. pungens* as a good species. There are very few reports of the geographical distribution of *G. pungens*. After these it lives in the mouth of Rhône, on Cyprus, Azores, in the river Angara (Asia) and in the Baikal lake. There are many localities after Della Valle in Italy, where this and other authors have found *G. pungens*.

Other localities from the Balkan-Peninsula, resp. from the coast of Adria, where Prof. Dr. Al. Mrázek and I have gathered this form, I allege in other paper, which is about to be published. In this paper I show *G. pungens* be a very young freshwater species which were developed from the marine ancestor *C. pungentiformis*. The latter species goes from the Adria directly in the brackish water, afterwards in the freshwater, where it is modified: its carina on the segments of pleon is more or less wanting.

In the valley of Narenta (in Herzegovina) I was able to determine all this process; I have named the form, with the back of the 3<sup>rd</sup> segment of pleon very slightly compressed, *G. pungens* f. *carinata*, and the form without compression *G. pungens* f. *acarinata*. Simultaneously with the

\*) This signification is false, because Garbini mistakes *G. fluviatilis* with *G. pulex*, while *G. fluviatilis* Roes. is our *Carinogammarus roeselii* Roes.



length of living in the fresh water begins to decrease the equipment of bristle and the basipodits of peraeon segments 5—7 are shortened. The same I have seen in the river Arsa (in Istria) from the sea to the lake of Čepič. The reaction of *G. pungens* to the change of different conditions of life is perfect.

Discoveries of Dr. Frankenger confirm my opinion and augment the localities of *G. pungens* in the northern bend of Adria, where these species were gathered by Dr. P. Steinmann and me in the river Timavo. The first locality near Cita Nuova (8 k. m. from S. Dona di Piave) is a channel of lagoons close to the sea, where only lives *G. pungens* f. *carinata* in the water which is almost stagnant. No other species of Amphipoda were gathered in this locality but instead of these species *Palaemonetes varians* is living here. Near Bagnaria (S. W. from Palmanuova) occurs also close to the sea *G. pungens* f. *carinata*, but with a very slight compression, even copies of the type forma *acarinata*. Calceoli are very well developed. *G. spinicaudatus* were surely locally separated from *G. pungens*, as I have seen in the river Buna near Blagaj in Herzegovina. Other localities differ from these both. Near Sesto is to be found *G. pulex* in a small mountain torrent. But this robust species living here in the cold water prevails against the *G. pungens* f. *acarinata*. Very interesting is the occurrence of *Niphargus* in the same locality. Similar biological conditions are in the small river Monticano near Fontanelle. There is calcareous water here and Gammarus are incrustated. The most forms are *G. pungens* f. *acarinata*, but f. *carinata* occurs too, and we are even surprised to see *C. pungentiformis*, only in one copy, with a large carina. The colour of this species is white, that of other *G. pungens* (also in alcohol) is brown.

After my experiences from Arsa and Narenta I think *C. pungentiformis* were the youngest, *G. pungens* f. *acarinata* the eldest colonist in the fresh water.

The course: sea, Livenza-Monticano may be perhaps for the Gammarids very fit to go to the fresh water. This course is not likely to be closed, but to the already adapted *G. pungens* new immigrants will probably come. It would be in this country desirable to study more exactly the stratigraphic occurrence of all these forms. In the meanwhile I say that in one of the glasses from Monticano were only *G. pungens* (24 copies), but in the other one from the same region were with *G. pungens* 20 copies of *G. pulex*. The both species may come from two biologically different localities of this river. This would be in accordance with my discoveries in the river Bogliunšica, which is flowing in the lake of Čepič. In the warm water of this river and in its tepid sources which are running in the valley I found *G. pungens* f. *acarinata*. In the cold sources which are coming from Montemaggiore and running in Bogliunšica and in the lake lived only *G. spinicaudatus*, but nowhere come both forms together.



*G. pungens* has a higher optimum of temperature than *G. pulex* or *G. spinicaudatus* which come from other sources and are of other age as the inhabitants in the fresh water. They (*G. pulex* and *G. spinicaudatus*) may be perhaps from the glacial or preglacial period and do not occur in the warmer localities close to the sea. In this lives *G. pungens* which is used to go, also to-day, in the fresh water.

The discovery of *Niphargus illidžensis* near Sesto might be a real surprise. It enlarges the area of this form I described after my discoveries from Illidže (near Sarajevo) and from the lake of Vrana in Dalmatia. The nearest relation to this form may be *N. Ladmiraulti* (Chevreux) from France. It is clear that these are subterranean forms which often occur in the mediterranean region. The discovery of the *N. illidžensis* on an overground locality which otherwise forms a row with other similar discoveries of other authors, does not change the subterranean character of *Niphargus*. This I shall describe in another paper of mine. The species of *N. illidžensis* is very easy to be distinguished by having 4 spines on the concavity of dactylopodit of peraeopod 1, 2 and 3 (Fig. 9), and 6 spines on dactylopodit of peraeopod 5 and 6.

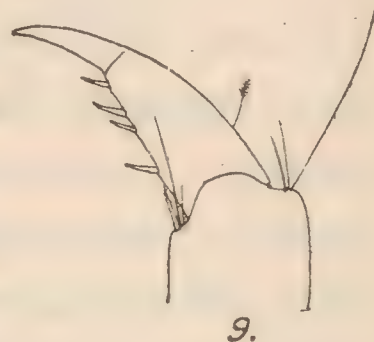


Fig. 9 *N. illidžensis* Schäf. Dactylopodit of peraeopod 3.

Prague, February 1919.



### Literature.

- A. Della Valle: Gammarini del Golfo di Napoli. Fauna u. Flora des Golfes von Neapel. 1893.
- Adr. Garbini: Appunti di Carcinologia Veronese. Acc. Verona. Ser. 3. V. 71. 1895.
- K. Schäferna: Amphipoda balcanica. (In the press.)
- T. R. R. Stebbing: Amphipoda. I. Gammaridea. Tierreich. Berlin 1906.



# Systèmes trilinéaires des lignes sur une surface et déformation projective des surfaces.

Dr. EDUARD ČECH.

Dans la note présente, je me sers des formules établies par Wilczynski dans les Transactions of the Amer. Math. Soc. (vol. 8—10.).<sup>1)</sup> Etant donnée une surface  $S$  par des équations aux dérivées partielles en forme canonique

$$(1) \quad \begin{aligned} y_{uu} + 2b y_v + f y &= 0, \\ y_{vv} + 2a' y_u + g y &= 0, \end{aligned}$$

les sémi-invariants fondamentaux  $y, z = y_u, \varrho = y_v, \sigma = y_{uv}$  attachent à chaque point  $P_y$  de  $S$  un système local de coordonnées ponctuelles  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .<sup>2)</sup> Si l'on trace sur  $S$  une famille de courbes, définie par l'équation différentielle

$$(\alpha) \quad \frac{dv}{du} = \tau(u, v) = \tau,$$

l'équation du plan osculateur de la courbe de la famille passant par  $P_y$ , dans les coordonnées locales, est

$$(8) \quad 2\tau^2 x_2 - 2\tau x_3 + [\tau_u + \tau\tau_v - 2b + 2a'\tau^3] x_4 = 0.$$

Considérons les développables circonscrites à  $S$  le long des courbes du système  $(\alpha)$ ; l'équation du point de rebroussement de celle de ces développables qui touche  $S$  en  $P_y$  est,  $\xi_i$  étant contragrédients aux  $x_i$ ,

$$(15) \quad -2\tau^2 \xi_3 + 2\tau \xi_2 + [\tau_u \tau \tau_v + 2b - 2a'\tau^3] \xi_1 = 0.$$

Cela posé, considérons trois familles de courbes sur  $S$ , définies par les équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = \tau, \quad \frac{dv}{du} = \tau', \quad \frac{dv}{du} = \tau''. \quad \left( (\tau - \tau')(\tau - \tau'')(\tau' - \tau'') \neq 0 \right).$$

Je dis que ces trois familles forment *un système trilinéaire*, quand, à chaque point de  $S$ , les plans osculateurs des trois courbes qui passent par ce point contiennent une même droite et, simultanément, les trois points de rebroussement des développables circonscrites appartiennent

<sup>1)</sup> Projective differential geometry of curved surfaces, First-Fifth Memoir.

<sup>2)</sup> Wilczynski, First Memoir, §§ 5 et 6.



a une même droite. D'après (8) et (15), on a tout de suite les deux conditions nécessaires et suffisantes

$$(T) \quad \begin{aligned} & b - \tau \tau' \tau'' a' = 0, \\ & \begin{vmatrix} \tau & \tau^2 & \tau_u + \tau \tau_v \\ \tau' & \tau'^2 & \tau'_u + \tau' \tau'_v \\ \tau'' & \tau''^2 & \tau''_u + \tau'' \tau''_v \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$b \, d u^3 + a' \, d v^3 = 0$$

est l'équation différentielle des lignes à osculation quadrique,<sup>3)</sup> on voit la signification de la première des conditions (T): les trois tangentes aux courbes du système, à un point quelconque de  $S$ , doivent former un groupe apolaire au groupe des trois tangentes conjuguées à celles à osculation quadrique. Les conditions (T) sont manifestement vérifiées si l'on pose

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{b}{a'}}, \quad \tau' = e^{\frac{2\pi i}{3}} \tau, \quad \tau'' = e^{\frac{4\pi i}{3}} \tau.$$

On a ainsi le résultat intéressant que *les lignes conjuguées aux celles à osculation quadrique forment un système trilinéaire*. Les équations de la droite  $l$  d'intersection des trois plans osculateurs sont

$$(18) \quad 6 a' b x_2 + (a' b_v - a'_v b) x_4 = 6 a' b x_3 - (a' b_u - a'_u b) x_4 = 0;$$

celles de la droite  $l'$  qui passe par les trois points de rebroussement sont

$$(19) \quad 6 a' b \xi_3 - (a' b_v - a'_v b) \xi_1 = 6 a' b \xi_2 + (a' b_u - a'_u b) \xi_1 = 0.$$

Quand

$$\frac{\partial}{\partial v} a' b^2 = \frac{\partial}{\partial u} a'^2 b = 0,$$

et alors seulement, les droites  $l$ ,  $l'$  coïncident avec les droites directrices de Wilczynski.<sup>4)</sup>

La condition nécessaire et suffisante pour que les systèmes trilinéaires sur deux surfaces se correspondent mutuellement est la correspondance des lignes à osculation quadrique où, en d'autres paroles, l'invariance de l'équation différentielle

$$b \, d u^3 + a' \, d v^3 = 0.$$

La représentation a certainement le caractère que je viens de décrire quand à chaque couple de points correspondants, les étoiles des plans osculateurs se correspondent homographiquement. En supposant encore la correspondance des lignes asymptotiques, on a cette fois comme condition l'invariance des expressions  $a'$ ,  $b$ , où mieux, l'invariance de la forme différentielle

$$b \, d u^3 + a' \, d v^3.$$

On vient ainsi, incidemment, au résultat que la déformation projective de Fubini admet une définition plus simple de celle originale.

<sup>3)</sup> Wilczynski, Fifth Memoir, § 1, et Second Memoir, § 6, éq. (99).

<sup>4)</sup> Wilczynski, Second Memoir, § 4.



# Sur les invariants d'une certaine équation linéaire aux dérivées partielles.

Dr. FR. RÁDL.

(Présenté dans la séance du 15 Avril 1921.)

La définition des invariants  $h, k$ , qui était introduite par Darboux à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

je la généralise à l'équation

$$\sum_0^{n-1} k \left( p_{k,1} \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^k \partial y} + p_{k,0} \frac{\partial^k z}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (1)$$

que j'écris dans la forme du système

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} + q_1 z_1 + h z = 0, \quad z_1 &= \frac{\partial z_2}{\partial x} + q_2 z_2 + (h^2) z, \quad z_2 = \frac{\partial z_3}{\partial x} + q_3 z_3 + \\ &+ (h^3) z, \quad \dots, \quad z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + q_{n-1} z_{n-1} + (h^{n-1}) z, \quad z_{n-1} = \frac{\partial z}{\partial y} + q_0 z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ou dans la forme d'un autre système

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + r_{n-1} z_{n-1} + (k^{n-1}) z_{n-2} + (k^{n-2}) z_{n-3} + \dots + (k^2) z_1 + k z &= 0, \\ z_{n-1} = \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + r_{n-2} z_{n-2}, \quad z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-3}}{\partial x} + r_{n-3} z_{n-3}, \quad \dots, \quad z_2 = \frac{\partial z_1}{\partial x} + \\ &+ r_1 z_1, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + r_0 z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Les invariants nouveaux sont les valeurs  $h, (h^2), \dots, (h^{n-1})$ ;  $k, (k^2), \dots, (k^{n-1})$ , généralement les valeurs  $(h^s k^t)$ ;  $s, t = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $1 \leq s + t \leq n-1$ . Je démontre les théorèmes:



1. Les coefficients de l'équ. (1), développés dans la forme (2) ou (3), peuvent être exprimés par les invariants de l'équ. (1), le nombre des invariants et des coefficients étant le même.

2. Les valeurs  $(h^s k^t)$  ne changent pas par la substitution  $z/\lambda z$ , de même par la permutation des opérations  $h, k$ .

3. On obtient les invariants  $(h^s k^t)$  de l'équ. adjointe par échange des opérations  $h, k$ .



# Sur une certaine équation lineaire aux dérivées partielles, qui n'a pas la série des équations transformées.

Dr. FRANT. RÁDL.

(Présenté dans la séance du 6 Mai 1921.)

On peut obtenir, l'équation du mémoire précédent étant donnée, une série des équations transformées par un procédé analogue à celui de Laplace. Si disparaissent simultanément les invariants

$$h, (h^2), \dots, (h^{n-1}),$$

on peut écrire cette équation dans la forme

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} = 0, \quad z_{n-1} = \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial l A_1}{\partial x} z_{n-2}, \quad z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-3}}{\partial x} + \frac{\partial l A_2}{\partial x} z_{n-3}, \dots,$$

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial l A_{n-1}}{\partial x} z$$

et exprimer les invariants  $h, (h^2) \dots (h^{n-1})$  à l'aide des valeurs  $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ .

S'il y a lieu aussi la condition

$$h = (h^2) = \dots = (h^{n-1}) = 0,$$

je démontre, que cela signifie un système des  $n-1$  équations diff. ord. lin. d'ordre resp.  $n-1^{\text{ème}}, n-2^{\text{ème}}, \dots, 1^{\text{er}}$  à une inconnue resp.  $A, A_2 \dots A_{n-1}$ .

La résolution des ces équations donne les valeurs  $A_1 \dots A_{n-1}$  et on obtient ainsi l'équation, que l'on ne peut pas transformer et dont la série se compose donc d'une seule équation.



# Observations à la Théorie de la Loi de Lorenz.

Par le chargé de cours

dr. phil. K. TEIGE,

adjoint de l'institut de physique mathématique de l'université Tchèque  
de Charles à Prague.

(Présenté le 24 juin 1921.)

La loi de Lorenz dit que la relation de la conductibilité calorique  $k$  à la conductibilité électrique  $\kappa$  pour la température absolue  $T$  est donnée par

$$\frac{k}{\kappa} = C \cdot T,$$

où  $C$  signifie une constante indépendante de la nature du métal. En réalité cette relation n'est remplie qu'approximativement. Il est remarquable cependant que la moyenne des valeurs  $C$  établies pour différents métaux ne s'accorde avec aucune des valeurs résultant des diverses théories pour la conductibilité de l'électricité et de la chaleur.

Des trois théories les plus connues il résulte, pour la relation  $\frac{k}{\kappa}$  à 18° C les valeurs suivantes :

1° Théorie de Drude (simplifiée pour une catégorie d'électrons seulement)

$$\frac{k}{\kappa} = 6.47 \cdot 10^{10},$$

2° Théorie de Lorenz:

$$\frac{k}{\kappa} = 4.31 \cdot 10^{10},$$

3° Théorie de Riecke (la plus complète)

$$\frac{k}{\kappa} = 7.28 \cdot 10^{10} \left( 1 + \frac{2}{3} 291 \delta \right),$$

où  $\delta$  signifié le coefficient de température du nombre d'électrons.



Parcontre J ä g e r et D i e s s e l h o r s t ont mesuré des valeurs dont la moyenne, sauf pour le B i s m u t h est de

$$7.11 \cdot 10^{10}.$$

La théorie de Riecke serait celle qui s'approcherait le plus de cette valeur pour  $\delta = 0$ , ce qui est cependant en désaccord avec la théorie sur la chaleur de T h o m s o n et les forces piézo-thermo-électriques.

On arrive à un accord avec les résultats expérimentaux beaucoup plus parfait moyennant une petite modification de la théorie de Riecke qui est basée sur une partie fondamentale de mes travaux

„Sur le rapport entre la conductibilité spécifique des métaux et la pression hydrostatique,“

„Théorie des forces piézo-thermo-électriques“.

La modification consiste dans le remplacement de  $CT$ , c'est à dire du contenu calorique interne d'un gramme-molécule, selon la théorie classique, par

$$E_v = \int_0^T C_v dT,$$

où  $E_v$  est le contenu calorique réel du gramme-molécule du métal et qui résulte assez exactement de la formule de Debye.

Cela signifie que le nombre et la force vivante des électrons ne sont point déterminés par la chaleur simplement, mais bien encore par l'énergie interne du métal dans lequel se trouvent les électrons.

La formule modifiée de R i e c k e serait alors:

$$\frac{k}{\kappa} = \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha}{e} \right)^2 \frac{E_v}{5.955} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\delta E_v}{5.955} \right) = 4.198 \times 10^7 E_v (1 + 0.110 \delta E_v).$$

Cette formule s'accorde complètement avec les résultats expérimentaux, car  $4.198 \times 10^7 E_v$  est inférieure à la relation des conductibilités pour tous les métaux.

Par conséquent  $\delta$  a une certaine valeur positive que l'on peut comparer avec le coefficient de température du nombre d'électrons — comme il résulte d'autre phénomènes de physique. Je la compare avec  $\delta$ , que j'ai obtenu dans le dit travail:

„Théorie des forces piézo-thermo-électriques“.



# Organe hermaphrodite d'une fleur anormale du *Lilium candidum* L.

Contribution à la tératologie de la fleur par

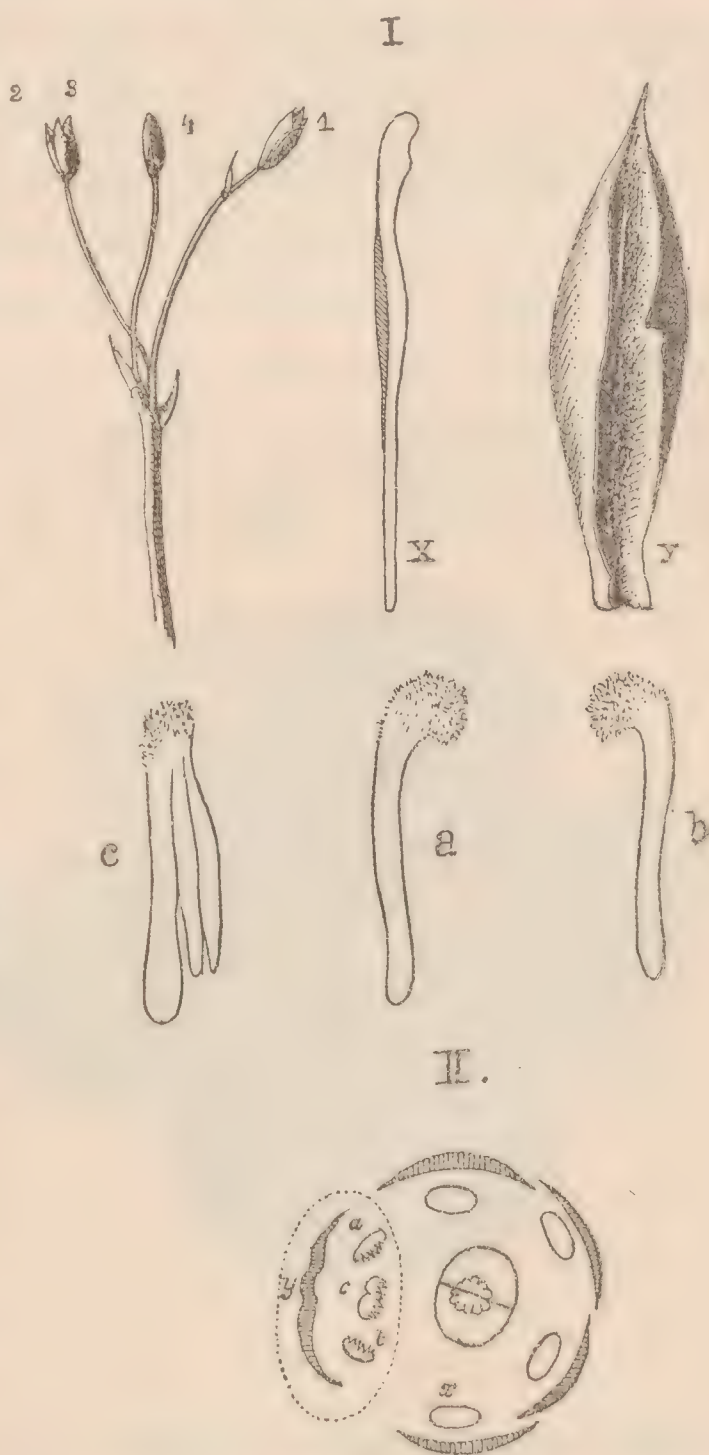
**Dr. Jan Vilhelm,**  
agrégé de l'Université Charles à Prague.

(Avec 2 figures dans le texte.)

(Présenté à la session du 18 Novembre 1921.)

On trouve chez le *Lilium candidum* L. de fréquentes anomalies et tout particulièrement la *pétalogie*, la *pléiotaxie*, la *multiplication*, la *fasciation* et le *spiralisme*.\*) Vers la fin de juin 1921 M. le docteur Boh. Němec, professeur à l'université, me donna, pour des études morphologiques une fleur de *Lilium candidum* L. L'inflorescence comprenait deux fleurs normales dont l'une avait un pétale de plus et une troisième fleur anormale.

En réalité la fleur anormale était formée de deux fleurs dont les organes présentaient, d'une façon inégale, un développement incomplet et dont les pédoncules étaient entre-greffés. Le nombre des organes de ces deux fleurs était réduit et quelques-uns étaient développés irrégulièrement. Une des fleurs était composée de quatre pétales dont les deux plus externes alternaient avec les deux autres, puis suivaient quatre étamines. L'une des étamines était, dans sa moitié, transformée en lame pétaloïde et ne portait qu'une moitié d'anthère. L'ovaire était biloculaire surmonté d'un style, terminé par deux stigmates.



\*) L. c. Penzig: *Miscellanea Teratologica*, 1884. — Masters-Dammer: *Pflanzen-Teratologie*, 1886.



Ainsi qu'il ressort du diagramme, l'autre des fleurs entre-greffées s'était intercalée entre le premier et le quatrième pétale à l'aisselle d'une bractée de petite taille, elle était très incomplète ne se composant que de trois parties. Deux parties de la fleur étaient conformes entre elles. C'étaient des carpelles transformés en lames pétaloïdes de nature pulpeuse, blanc-verdâtre, ayant à peu près la grandeur d'un ovaire normal; leurs extrémités grossies en massues, étaient jaune-verdâtre, recourbées l'une contre l'autre, de structure glanduleuse comme le sont les stigmates normaux. La troisième partie de la fleur anormale était une étamine transformée en lame pétaloïde dont le filet était constitué de même façon que les deux carpelles altérés. Cette étamine présentait à son extrémité une structure de stigme et en outre une anthère fixée au filet grossi et recourbé vers le bas. L'anthère était jaune, ses loges ne contenaient pas de pollen. Cet organe *anormal* est *hermaphrodite* et démontre que les étamines et les carpelles sont de *même valeur morphologique*.

Je dois des remerciements à M. Dr. Prof. B o h. N ě m e c qui a bien voulu me procurer le matériel nécessaire.



# La paracorolle des fleurs de *Mimulus*.

Contribution à la morphologie et à la biologie des fleurs.

Par Dr. JAN VILHELM,  
agrégé de l'Université Charles à Prague.

Avec 4 figures dans le texte.

(Présenté à la séance du 5 Novembre 1920.)

En Septembre 1920 je reçus de mon collègue M. le docteur A r t u r B r o ž e k agrégé à l'université de Prague quelques fleurs de l'espèce dénommée par lui *Mimulus tigrinoides-luteus var. flore pleno* afin que j'y puisse faire des recherches morphologiques. Au cours des recherches et des études génétiques faites par M. B r o ž e k au jardin botanique de l'Institut pour la physiologie des plantes, de M. le professeur et docteur B o h. N ě m e c, il avait réussi d'obtenir par l'autofécondation et par la sélection cette variété (autre nouvelle lignée) en plusieurs individus.

Ce fut en 1913 que M. B r o ž e k entreprit la culture de cette plante hybride. En 1914, sur 25 plantes données par les semences d'une fleur autogame, il y avait 3 cas extrêmes dont les fleurs présentaient des excroissances pétaloïdes tachetées de jaune et de rouge, considérées par M. B r o ž e k pour des étamines pétaloïdes. La fleur choisie pour l'autofécondation avait six lames pétaloïdes outre les étamines normales. La sélection avait pour but d'obtenir la lignée „*flore pleno*“. En 1915 des fleurs normales simples et *flore pleno* se produisirent dans la culture. Pour la continuation de ses recherches M. B r o ž e k prit la fleur marquée par lui Te, 16 g, 22 h (voir la figure); cette fleur avait des pétales jaunes et huit excroissances pétaloïdes dans le tube. En 1916 la génération provenant des semences de cette fleur présenta sur chaque plante plus ou moins de fleurs ayant ces excroissances pétaloïdes nouvelles. Le



Fig. 1.



Mimulus „flore pleno“ a été cultivé jusqu'à maintenant et la nouvelle forme se maintint au 100%. Pendant les recherches des premières années le nombre des lames pétaloïdes variait et ils étaient plus petits (6—10), leur forme même et leur grandeur présentaient divers degrés d'évolution. Dès

1916 la nouvelle lignée de cette variété „flore pleno“ fut fixée (fig. 1).

Ces fleurs de *Mimulus* soi-disant doubles sont remarquables par un certain nombre de pétales qui occupent l'intérieur du tube de la corolle, quoique pourtant les fleurs présentent quatre étamines normales. La couleur de ces pétales et leurs taches coïncident avec celles de la corolle tubuleuse. En examinant les fleurs en détail on peut constater que, placées entre des étamines fixées par de longs filets à la base du tube de la corolle se trouvent, disposées par couples, des excroissances pétaloïdes prenant naissance à la base du tube. Toutes



Fig. 2.

sont à peu près de même grandeur et ne dépassent que peu l'orifice du tube. Leur forme aussi rappelle à peu près la conformation de la corolle, car, d'une base étroite presque filiforme ces excroissances vont s'élargissant vers le haut en forme de limbe large à contours irréguliers. Leur partie supérieure est aussi concave et leur renflement forme la face intérieure. Leur teinte coïncide avec celle de la corolle: le côté tourné à l'extérieur a les mêmes taches et la même teinte que l'intérieur du tube de la corolle, tandis que le côté tourné à l'intérieur coïncide, quant à la teinte, avec l'extérieur du tube.



Fig. 3.



Fig. 4.



Les étamines alternent d'une manière exacte avec les divisions de la corolle tandis que les excroissances se trouvent contre ces divisions. Ces étamines et ces excroissances pétaloïdes ont, parallèles entre elles, la longueur du tube de la corolle fixées seulement à la base de celle-ci; il arrive que quelques unes de ces excroissances ne se détachent qu'à la moitié de la corolle (fig. 2—4).

Cette constitution particulière des fleurs de *Mimulus* n'a pas d'autre valeur morphologique que celle constatée souvent pour les fleurs d'autres espèces de plantes dont on peut conserver l'hérédité dans les variétés horticoles. On trouve par exemple souvent dans les magasins de fleuristes la *Sinningia speciosa* de l'Amérique du Sud, décrite par E. M o r r e n comme variété. Cette variété de *Gloxinia* à fleurs doubles porte à l'extérieur de la corolle tubuleuse des lobes d'une autre corolle (catacorolle) tournés à l'envers relativement au tube de la corolle normale. Grâce à leur teinte leur orientation est bien visible. La paracorolle des fleurs de *Mimulus* est de même valeur morphologique. Là au contraire la corolle présente un dédoublement à l'intérieur du tube. V e l e n o v s k ý place ce cas de *Gloxinia* parmi les exemples de feuilles à limbe double. Les côtés opposés des feuilles à limbe double présentent aussi une même constitution. Le cas du *Mimulus* peut être comparé aux exemples des stipules et des ligules citées par V e l e n o v s k ý. Les excroissances des fleurs de *Mimulus* n'alternent pas non plus avec les divisions de la corolle. Le développement de ces nouvelles excroissances pétaloïdes, même de chaque côté de l'étamine avortée, nous prouvera qu'elles ne sont pas de nature staminodiale. Elles sont développées même là où d'habitude ne se trouve aucune étamine. Č e l a k o v s k ý considère la coronule des *Narcisses* comme étant une partie de la corolle.

Il est évident que cette excroissance pétaloïde — la paracorolle — des fleurs de *Mimulus* est la partie de la corolle primitive altérée en corolle à limbe double. Dans le cas présent il a réussi d'élever cette variété de semis et la nouvelle particularité morphologique des fleurs s'est conservée dans les générations suivantes. Cette variété élevée par la méthode expérimentale peut servir d'exemple à la botanique systématique pour l'explication de la formation des variétés et des races nouvelles parmi les plantes phanérogames et de quelle façon celles-ci conservent par l'hérédité les particularités nouvellement acquises.

Il est facile de s'expliquer le dessein biologique de cette paracorolle ou émergences stipulaires remplissant tout l'intérieur du tube de la corolle. Les nouveaux pétales dont le côté tourné à l'extérieur est de même teinte et de même structure, très spéciales, que l'intérieur du tube de la corolle (taches rouge foncé avec de longs poils sur fond jaune) servent à l'augmentation des fonctions propres à ce tube.

La corolle protège en général les organes de reproduction contre les influences nuisibles, sa teinte sert à attirer les insectes et à leur montrer



où se trouvent les organes de reproduction. C'est pourquoi les taches rouge foncé se trouvent surtout sur les pétales et concentrées aux endroits qui sont dans le voisinage des étamines. Les longs poils qui se trouvent sur les taches rouges empêchent l'accès de la fleur aux insectes inutiles à sa fécondation. C'est ainsi que ces nouveaux organes pétalloïdes servent à l'augmentation des fonctions de la corolle quant à l'intervention des insectes dans la pollinisation. Dans les fleurs doubles de *Mimulus*, les étamines sont cachées entre les nouveaux pétales de la corolle et les insectes (les abeilles) sont obligés de les chercher tandis que le style avec les stigmates dépassent un peu l'orifice et les pétales nouveaux. Le stigmate est ainsi beaucoup plus séparé du contact direct avec les anthères des étamines, ce qui empêche l'autogamie dans les fleurs. Dans cette race de *Mimulus* la séparation du stigmate et des anthères des étamines est bien accentuée de sorte que l'autofécondation des fleurs de *Mimulus* en est empêchée.

Je me permets d'exprimer ici ma gratitude envers mon collègue M. Dr. A. Brožek qui m'a fourni des photographies et le matériel nécessaire à ce travail.

### Index Bibliographique.

1. Brožek Artur: *Mosaikový míšenec Mimulus tigrinoides Hort.*, hybrida var *Paulina* (var. nova). Lékařské rozhledy. 1920.
2. Bull. Acad. Belg.: 1865; XIX part. 2. p. 93.
3. Čelakovský Lad.: *O významu a původu věnce (paracorolla) Narcisovitých.* Rozpr. Čes. Akad. Ročn. VII., tř. II., čís. 13.
4. Knuth Paul: *Handbuch der Blütenbiologie* II. Bđ., 2. T., Leipzig, 1899, p. 155.
5. Penzig: *Miscellanea Teratologica* 1884.
6. Masters-Dammer: *Pflanzen Teratologie*, 1886; p. 509, Fig. 238; p. 420.
7. Velenovský: *Srovnáv. morfologie*. Díl II. (1907), p. 343. fig. 261.; Díl. III. (1910, p. 856.



SILVESTR PRÁT:

## The Isolation of Fungi of Wasps'-Nest.

(Institute of Plant Physiology of Bohemian University in Prague-Praha.)

Professor Dr. B. Němec found that the paper-covers of wasps-nests are permeated with mycelium and spores of Fungi and he handed over to me the cover of a large nest (*Vespa media*) for the purpose of isolating them. In water or water-solution of sugar (1—20% saccharose), a short mycelium germinated quickly and in a short time a hyaline slime was formed somewhat darkened by a quantity of dark spores. Two species of Fungi — *Dematium* and *Alternaria* — found there have been isolated from these primitive cultures.

*Dematium* grew very differently according to the substratum. In a sugar-solution a quantity of 1—2 cellular dark spores ( $12-20 \times 8-10 \mu$ ) were formed; the dark (black-green) mycelium had very irregular branches; between the cylinder cells there were puffed out or globular cells, either single or in series. On nitrogeneous soils (Pepton, Liebig's extract etc.) the hyphes were clear, wider and entirely covered with a number of hyaline, one-cellular spores in the form of *Saccharomyces*.

*Alternaria* (similar to *A. tenuis* Nees) distinguished itself by characteristic multicellular spores; they were amassed on the multicellular conidiophores in complicated branched chains and irregularly composed fans. According to the substratum they were of different sizes ( $65 \times 14 \mu$  —  $16 \times 12 \mu$ ) and forms (from 6—16 cells), the brown membrane was in some cases smooth on the surface, but it often had tender or coarser bristles. The sizes of the hyphe-cells and the sizes and forms of the spores varied greatly according to the substratum, but the characteristical form was always preserved.

In order to prove the direct connection of the germinated mycelium and the isolated Fungi with the spores and continuous hyphes growing through the paper-cover of the nests, small pieces of the nests were detached and scattered in sterilised water; some single small fragments were placed in a drop of nutrition-solution on the cover-glas and observations were made about germination in the dampchamber.



Besides that, the wadding, filtering-paper and pine-saw dust were moistened with some Liebig's extract strongly diluted with water and after the sterilisation of these cultures both Fungi were inoculated. After a year, in cultures of *Dematium* some filaments were found in which were growths of mycelium. *Alternaria* formed on the wadding, paper and saw dust dark mycelium and characteristic spores. In wadding the mycelium was composed of clear or dark hyphes formed by cylindrical and globular cells; they contained only little fat. Clear-brown hyphes sometime grew in the filaments of the wadding. Also in the filaments of the filtering-paper penetrated hyphes filled up in some cases with little drops of fat. And also in the bits of pinesaw-dust there were visible here and there series of cylindrical cells, which had grown in the wood. The form of the wadding-, paper- and sawdust filaments with the hyphes which had grown therein was microscopical the same as in the case of the filaments and bits acquired by the preparation of the paper-covers of the wasp's nests; it was thus almost impossible to distinguish the preparations of the cultures from those of the wasp's nests, as may be seen in the microphotos.

1.



2.



4.



3.





# Sur la sensibilité des corrélations chez les plantes.

Dr. JAN KOŘÍNEK.

(Présenté le 4 novembre 1921.)

En étudiant le croissement des bourgeons axillaires à l'aisselle de cotylédons chez les plantes germinantes, j'ai fait l'observation que quelquefois un de ces bourgeons pousse beaucoup plus que l'autre. La différence entre eux était plus grande quand les plantes étaient cultivées dans de mauvaises conditions. A savoir j'ai cultivé une série de plantes dans la sciure, tandis que l'autre dans la terre jardinière. Dans le dernier cas il était quelquefois à peu près impossible de reconnaître lequel de ces bourgeons était plus grand. Il m'est venue l'idée, que cette différence est causée par le manque du matériel nutritif.

Donc j'ai fait deux séries d'expérimentations:

1. J'enlevais aux plantes une partie du matériel nutritif des cotylédons.
2. J'ajoutais encore au matériel existant des sels minéraux.

Ma méthode de cultiver était très simple. Je laissais les plantes germer dans la sciure et pousser la tige 1 *cm* environ. Puis j'ai coupé cette tige pour provoquer le croissement des bourgeons. Cette méthode de provoquer le croissement de bourgeons axillaires à l'aisselle des cotylédons provient de S a c h s et était employée par tous les auteurs postérieurs, surtout par D o s t á l. Au lieu d'enlever le bourgeon terminal sur la tige principale il suffit d'empêcher son croissement par l'atmosphère de l'hydrogène. (M c C a l l u m) ou par le platrer (M o g k). En même temps j'ai ôté une partie plus ou moins grande des cotylédons pour priver les plantes du matériel nutritif ou pour l'augmenter j'ai laissé les cotylédons intacts et cultivé les plantes dans des solutions nutritives. Chaque plante était mise aparte dans une éprouvette remplie d'eau ou suivant les circonstances remplie de la solution van der C r o n e. En 14 jours environ les deux tiges atteignaient la longueur de 12 *cm* environ, puis elles étaient coupées et pesées. De chaque plante provenaient donc deux tiges, une plus grande,



l'autre plus petite. J'ai pesé les plus petites apart et les plus grandes aussi et calculé le poids moyen de chaque plante. De cette manière l'influence des exceptions individuelles de singulières plantes était considérablement diminuée.

I série des expérimentations.

Les plantes étaient privées d'une partie des cotylédons.

J'ai travaillé principalement avec *Pisum sativum* qui semble être le matériel le plus sensible pour ce but, mais j'ai atteint le même effet avec des autres plantes comme par exemple *Vicia Faba*, *Phaseolus multiflorus*, *Aesculus hippocastanum*. Comme j'ai déjà dit j'ôtai une plus ou moins grande partie des cotylédons — naturellement la quantité égale de tous les deux cotylédons. Les plantes avec les cotylédons intacts servaient pour le contrôle. Toutes les plantes étaient cultivées dans l'eau de l'aqueduc de Brno.

Voici la tabelle des résultats:

	Nombre des plantes	Poids sommaire des tiges plus		Poids moyen des tiges plus		La somme du poids	Proportion entre les deux tiges
		grandes	petites	grandes	petites		
Cotylédons intacts	14	5,20	3,65	0,37	0,26	0,63	1,42
Cotylédons de la moitié enlevés	15	5,09	3,35	0,34	0,22	0,56	1,54
Cotylédons a peu près tous enlevés	14	2,50	0,65	0,18	0,05	0,23	3,84

Comme on voit la somme des poids est diminuée chez les plantes avec les cotylédons enlevés, ce qui est bien naturel. Mais ce qui est très surprenant est, que la proportion entre les deux tiges est augmentée, même considérablement augmentée. On pourrait aisement attendre, que la proportion ne change pas. Je donne un exemple: Disons: La plus grande tige pèse 10 *dkg*, la plus petite 9 *dkg* — donc la proportion est  $\frac{10}{9} = 1.11$ . Chez la plante avec les cotylédons enlevés les deux tiges seront comme ci: disons la plus grande pèse maintenant 10 g; nous pourrions très bien attendre que la petite pèse aussi dix fois moins c'est à dire 9 g, ainsi que la proportion reste la même c'est à dire  $\frac{10}{9} = 1.11$ . Mais cette possibilité



n'existe pas. Dans le cas si la plus grande tige pèsait dix fois moins en comparaison à la plante normale avec les cotylédons intacts — dans ce cas le poids de la tige plus petite ne sera pas diminué seulement aussi dix fois, mais disons, du moins trente fois, ainsi que la proportion sera augmentée à  $\frac{10}{3} = 3.33$ . Dans notre exemple réel la proportion a augmenté de 1.42 chez les plantes avec les cotylédons intacts à 1.54 chez les plantes privées de la moitié des cotylédons et à 3.84 chez les plantes, dont les cotylédons étaient à peu près tous enlevés. Il faut encore mentionner, que le changement touche plus la tige plus petite que la tige plus grande. A savoir la tige plus grande de la plante avec les cotylédons normaux pèse 0.37, celle de la plante sans cotylédons 0.18, si donc la différence de 0.19. Entre les deux plus petites tiges sous les mêmes conditions il y a la différence de 0.40.

## II série des expérimentations.

Les plantes étaient cultivées dans des solutions nutritives.

Il est bien logique de conclure du fait précédent ; que la proportion sera diminuée chez les plantes qui ont plus de matériel nutritif, que les plantes normales. Il est évident, qu'il ne peut pas s'agir de matières organiques, parceque la plante en a assez, même au stade quand elle même est déjà en état d'assimiler. La plante a plutôt besoin de sels anorganiques ce qu'elle prouve par cela qu'elle se forme d'abord des racines. Alors mes expérimentations étaient les suivantes: Je laissais les cotylédons intacts et la plante cultivais dans des solutions nutritives. J'ai choisi toujours la solution van der C r o n e. Les plantes prospéraient toujours bien dedans et je n'ai jamais observe des développements anormaux, comme „chlorose“ etc. Pour le contrôle servaient les plantes aux cotylédons intacts, mais mises dans l'eau au lieu dans la solution.

Voici la tabelle des résultats:

	Nombre des plantes	Poids sommaire des tiges plus		Poids moyen des tiges plus		La somme du poids	Proportion entre les deux tiges
		grandes	petites	grandes	petites		
L'eau	15	8,80	3,40	0,59	0,23	0,82	2,59
Crone normale	13	8,80	6,30	0,68	0,48	1,16	1,39
2.5 Crone	12	7,30	5,10	0,60	0,42	1,02	1,43



D'après ce qu'on voit la proportion entre les deux tiges est moins chez les plantes cultivées dans la solution nutritive. C'est de nouveau la tige la plus petite, qui était plus touchée par le changement, que la tige plus grande, la différence entre les tiges plus petites étant 0.25, tandis que entre les plus grandes seulement 0.09. Alors les résultats sont analogues aux résultats de la première série des expérimentations.

J'ai installé encore trois séries d'expérimentations, que je ne mentionne que tout brièvement, parcequ'elles ne démontrent rien de nouveau.

1. La deuxième série était répétée dans l'obscurité. Naturellement „étiolement“ est apparu. Les effets se sont manifestés encore plus distinctement qu'à la lumière. On en pourrait juger, que les plantes dans l'obscurité ont plus grand besoin de sels anorganiques. Ce fait est démontré directement par les analyses de *W i e s s m a n n*.

2. La combinaison de deux premières séries, où les plantes privées des cotylédons étaient cultivées aux solutions nutritives, ne font que certifier les résultats précédents.

3. Le même effet était observé sur les plantes croissantes dans la fertile terre jardinière et dans la terre stérile.

Que pouvons nous conclure de ces résultats? Entre ces deux tiges nées à l'aisselle des cotylédons existe la lutte corrélatrice. Son intensité dépend de la quantité de matériel nutritif étant à la disposition. Si la quantité en est suffisante, la lutte n'existe ou a peu près n'existe pas. Mais dans le cours du développement le besoin de la nourriture devient de plus en plus grand, puis la nourriture ne suffit pas pour les deux tiges. Chacune d'eux cherche à l'entraîner pour elle même, l'influence corrélatrice commence à se manifester.

Tout cela ne se comprend pas de même — nous pourrions bien comprendre, que les deux tiges se contentent chacune de la moitié du matériel et croîtront toutes les deux comme cette quantité le permettra. Mais le fait est, que la plus forte domine la plus faible, qui ne vit pour ainsi dire que par la grâce de la première, n'ayant pour vivre que les restes de nourriture, que la victorieuse lui accorde. Nous pourrions construire la courbe, qui donnera image de cette lutte corrélatrice. Mettons sur l'axe, *X* les quantités pour la somme du poids de deux tiges, sur l'axe *Y* leur proportion. Nous recevons les particulières quantités des plantes, dont les cotylédons étaient plus ou moins enlevés, des plantes avec les cotylédons intact, puis des plantes cultivées dans des solutions nutritives. Nous obtiendrons ainsi une courbe rapidement ascendante — probablement parabolle.

Nous pourrions parler de l'importance biologique de ce phénomène. Pour la plante il est plus avantageux de former une tige vigoureuse, que deux tiges faibles. Mais comme dans toutes les explications biologiques, il reste incertain, s'il s'agit d'un phénomène téléologique où d'un fait tout simplement mécanique.



Le phénomène décrit pourrait peut être avoir même quelques importances pratiques. A l'aide duquel on pourrait peut être introduire une unité absolue pour l'intensité du croissement. Dans la physiologie végétale presque tous nos moyens de mesurer sont relatifs. Prenons assimilation par exemple, si l'on mesure son intensité, il faut toujours prendre du moins deux exemplaires, de les mettre sous différentes conditions et comparer les effets. Dans la physiologie nous sommes obligés de toujours et toujours comparer. Ce n'est pas comme en physique, où nous avons des unités précisément établies. Le physicien dit simplement par exemple l'élasticité du plomb a tant d'unités. Le physiologiste ne pourrait dire que l'assimilation d'une feuille est plus grande que d'une autre. Sous les meilleurs conditions, l'intensité du croissement, comme la courbe le démontre, la proportion de deux tiges axillaires doit être 1, à savoir les tiges sont égales. Sous les plus mauvaises conditions il ne se développe qu'une tige — l'autre égale zéro. Entre ces deux extrêmes il y a tous les passages possibles. Plus la proportion s'approche de la quantité 1, plus l'intensité du croissement s'approche à son maximum. Ainsi nous pourrions dire: chez cette plante tant d'unités manquent pour le maximum et nous ne devrions pas la comparer à une autre.

J'ai cherché des analogies de ce phénomène dans la nature. J'ajoute encore qu'on n'en trouve que quelques suppositions obscures dans la littérature. Par exemple dans G o e b e l „Organographie der Pflanzen“ (page 441) nous trouvons une observation polemique, que voici: „Dass bei kräftig ernährten Pflanzen sowohl Blätter als Nebenblätter sich stärker entwickeln als bei anderen, ist aber eigentlich selbstverständlich. Gegen eine Korrelation beweist das gar nichts! Denn wenn ein Ueberfluss an Baustoffen vorhanden ist, kann natürlich ein Wettbewerb um diese nicht in Betracht kommen.“

Dans la nature nous trouvons bien des analogies du phénomène décrit, la plus intéressante j'ai trouvé dans K l e b s: „Ueber die Rhythmik in der Entwicklung der Pflanzen“. Les arbres de notre climat et tous les arbres en général qui sont acoutumés à la vie periodique, se conduisent aux tropiques d'une étrange manière. Ils font, pour ainsi dire un compromis entre la vie ininterrompue des végétaux des tropiques au climat constant. K l e b s décrit un arbre *Tectona grandis* qui forme des grandes forêts dans les côtes littorales de Java, où d'après les monsoons le climat est periodique. Aux environs de Buitenzorg, où le climat est constant, l'arbre ne s'accommode pas à la vie ininterrompue. On peut observer, que quelques uns de ses rameaux poussent, tandisque les autres sont sans feuilles, comme secs. K l e b s explique la chose comme cela. L'assimilation va sans cesse mais elle n'est pas suivie par l'absorbction de sels minéraux par les racines. Mais pour le croissement une certaine proportion entre ceux-ci et les matières hydrocarboneuses est nécessaire. Ainsi il arrive que dans un certain moment les matières anorganiques ne suffisent pas pour toute la plante,



la lutte corrélatrice commence à apparaître, la vie de quelques rameaux est supprimée. Quelque temps après, peut être sous l'influence de l'ancienne vie périodique, le croissement de rameaux fonctionnants s'arrête, l'influence sur les rameaux inactifs cesse; ceux-ci commencent alors à pousser et supprimer ses anciens supprimeurs.

Notre germinant *Pisum* représente aussi un arbre à deux rameaux, dont seulement un a assez de matières nutritives pour pouvoir subsister. Dans la famille *Caprifoliaceae* nous observons quelquefois chez les plantes bien nourries au lieu de feuilles opposées, trois feuilles verticillées.

Dans la famille *Caryophyllaceae* où il y a „folia decussata“ les tiges poussent seulement à l'aiselle d'une feuille, ou du moins une des tiges opposées pousse plus que l'autre. C'est probablement aussi l'influence de la lutte corrélatrice.

Ce travail a été fait en partie à l'Institut pour la physiologie des végétaux de Prague chez le prof. B. Němec et d'autre part à l'Institut botanique de la Haute école vétérinaire de Brno chez le prof. R. Dostál.

J'adresse mes meilleurs remerciements à ces deux messieurs.

Brno, juin 1921.

### Littérature.

- Dostál R.: Korrelační vztahy u klíčnic rostlin Papilionaceí. Rozpravy 1908.  
 Goebel: Organographie der Pflanzen. Jena 1913.  
 Klebs: Über die Rhythmik in der Entwicklung der Pflanzen. Heildeberg 1911.  
 Kořínek: O symmetrii klíčnic rostlin. Věda přírodní III. 1922.  
 Mc. Callum: Regeneration in plants. Botanical Gazette 1905.  
 Mogk: Untersuchungen über Korrelationen von Knospen u. Sprossen. Archiv für Entwicklungsmechanik der Org. Bd. 38, 1914.  
 Reitsma: Correlative Variabilität bij Plante. Amster. Dissert. 1907.  
 Wiessmann: Einfluss des Lichtes auf Wachstum und Nährstoffaufnahme beim Hafer. Landw. Jahrbücher 53, 1919.



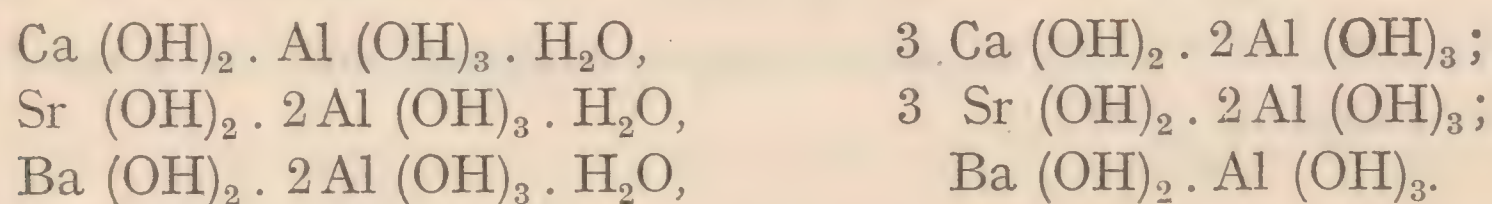
## Solutions of aluminates of the alkaline earths.

Dr. J. HEYROVSKÝ, H. KADLCOVÁ, K. STOKLASOVÁ.

(Présenté dans la séance du 4 Novembre 1921.)

The various compositions of the crystalline aluminates of alkaline earths, as determined by Beckmann\*) and Allen and Rogers\*\*) have lead the authors to investigate, which kinds of aluminate ions exist in the respective aluminate solutions.

It was shown†), that the formation of alkali aluminates is an additive process due to the formation of the monovalent complex anion  $\text{Al}(\text{OH})_4'$  and a similar process was expected for the alkaline earth aluminates. This view is supported by the fact, that the various formulae of the solid alkaline earth aluminates can all be written as additive compounds of hydroxides, e. g:



To investigate the solutions the cryoscopic method of Noyes and Whitney††) was used, and in some cases conductivity measurements and analysis of the solutions were applied. To avoid contamination of the alkaline solutions by atmospheric carbonic acid only ground glass connections and stoppers were used and soda-lime tubes attached.

### Magnesium and calcium.

The aluminates of these metals are only slightly soluble. Into a saturated solution of magnesium oxide (Kahlbaum's puriss.) of specific conductivity  $1.11 \times 10^{-4}$  mho (at 25° C) amalgamated aluminium foil was dropped.

\*) Journ. prakt. Chem. 26, p. 385 (1882).

\*\*) Amer. Chem. Journ. 24, p. 304 (1900).

†) Heyrovský: Trans. Chem. Soc. 117, p. 1013 (1920).

††) Zeitsch. phys. Chem. 15, p. 693 (1894).



After the dissolution the conductivity decreased to  $0.273 \times 10^{-4}$  mho and remained constant, showing that the solubility of magnesium aluminate is about one half of that of the hydroxide.

Similarly a solution of pure calcium oxide of specific conductivity  $8.30 \times 10^{-3}$  mho (at  $25^{\circ}\text{C}$ ) showed after the dissolution of aluminium a decrease to  $1.90 \times 10^{-3}$  mho; simultaneously white foils of the calcium aluminate separated out.

The cryoscopic examination of a lime solution showed  $0.087^{\circ}\text{C}$  lowering; after the dissolution of aluminium this decreased to  $0.028^{\circ}\text{C}$ . Thus the solubility of calcium aluminate appears to be one third of that of lime.

### Strontium.

In a 0.057 normal  $\text{Sr}(\text{OH})_2$  solution small pieces of aluminium foil were dissolved and after each dissolution the lowering of freezing point observed, with the following results:

gram-atoms Al dissolved per litre	lowering of freezing point observed:
0	$0.159^{\circ}\text{C}$
0.005	0.170
0.011	0.175
0.050	0.172
0.056	0.176

After several weeks the solution was analysed and the atomic ratio of Al : Sr found as 0.90 : 1.

### Barium.

A 0.0605 n. solution of  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  was gradually saturated with aluminium and corresponding conductivity changes and cryoscopic readings were observed. The results are:

gram-atoms Al dissolved per litre	specific conductivity at $0^{\circ}\text{C}$	lowering of freezing point
0	$6.745 \times 10^{-3}$ mho	$0.119^{\circ}\text{C}$
0.0206	4.855 „	0.120
0.0313	3.927 „	0.120
0.0428	2.909 „	0.120
0.0626	1.880 „	0.120
0.0759 decomposes	4.137 „	0.125

The decrease of conductivity with increasing aluminium concentration is quite regular and linear until the ratio of Al : Ba is 2 : 1, which



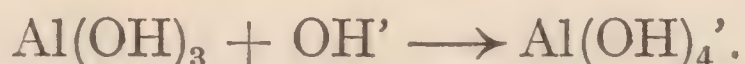
indicates that no other ions than those of a monobasic acid substitute the hydroxyl ions in neutralisation. After the spontaneous decomposition of the most saturated solution, the conductivity reached the same value as has been observed in the halfsaturated solution, containing one gram atom of aluminium to two gram-equivalents of barium; hence the hydrolysis in this solution is 50 %

Another set of measurements was made with a 0.186 n.  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  solution. Here the lowering of freezing point was  $0.380^\circ \text{C}$  and gradually changed to  $0.363^\circ \text{C}$  in the solution, which was most saturated with aluminium hydroxide. Analysis of this most saturated solution gave the ratio of atoms of Al : Ba as 0.97 : 1.

### Conclusion.

The slight changes in the lowering of freezing points and the regular fall of conductivity observed in solutions of the alkaline earths when gradually saturated with aluminium hydroxide in nascent state, show that only ions of a monobasic aluminate exist in such solutions. In contact with the crystalline aluminium hydroxide these solutions are about 50 % hydrolysed; then they contain an equal amount of the ions  $\text{OH}'$  and  $\text{Al}(\text{OH})_4'$ . These ions may join into the crystalline lattice giving rise to aluminates of the various compositions mentioned above.

The monobasicity of the aluminic acid may be regarded as generally proved, the aluminate formation being due to the process:



The authors express their sincere thanks to Professor B. Brauner for his interest in this work.

*The Chemical Institute of the  
Charles' University.*



# Réduction du nombre de transformations quadratiques d'une quartique elliptique plane.

Par

B. BYDŽOVSKÝ.

(Rédaction française du texte original tchèque.)

Présenté le 18 juin 1920.

Dans ce mémoire je me propose de déterminer toutes les quartiques elliptiques planes qui admettent moins de transformations quadratiques que la courbe générale de cette espèce. \*)

La réduction du nombre de ces transformations peut se produire de deux manières suivantes:

I. Par suite de la coïncidence de deux (ou de plusieurs) de ces transformations.

II. Par suite du fait qu'une ou plusieurs de ces transformations se réduisent à une homographie et que, en même temps, de nouvelles transformations quadratiques se produisent à un nombre moindre ou qu'elles n'apparaissent point.

I. Deux transformations  $(\omega_i)$  ou deux transformations  $[\omega_i]$  ne peuvent jamais coïncider. Pour que les deux inversions

$$u' \equiv -u + a_1 + b_1, \quad u' \equiv -u + a_2 + b_2$$

coïncident, il faut et il suffit que  $2(a_1 + b_1) \equiv 0$ , ou, ce qui revient au même, comme on s'en rend facilement compte,

$$a_1 + b_1 = 0, \text{ d'où l'on déduit } a_2 + b_2 = 0.$$

Cette condition caractérise, ce qui est facile de démontrer, la courbe tacnodale. On trouve le résultat suivant:

---

\*) Je suppose connus les résultats de mon travail antérieur „Sur les transformations quadratiques d'une quartique plane générale de genre un“ dans ce Bulletin. V. aussi ma communication „Sur les transformations quadratiques et c.“ au congrès intern. des mathém. de Strasbourg.



*L'unique courbe de l'espèce considérée pour laquelle plusieurs transformations quadratiques qui la reproduisent coïncident, est la courbe tacnodale. Pour cette courbe les deux inversions n'appartenant pas au groupe coïncident avec une inversion  $[\omega_i]$*

Il n'y a donc que sept transformations quadratiques reproduisant la quartique tacnodale; ces transformations forment un groupe. Pour cette courbe les coniques principales dégénèrent pour les inversions  $[\omega_i]$  excepté celle qui est mentionnée dans le résultat ci-dessus. Soit  $k_0$  cette conique. Les centres des inversions  $[\omega_i]$  sont le point tacnodal  $D$  et trois points  $O_1, O_2, O_3$  formant un triangle autopolaire de cette conique. En menant d'un point  $O_i$  les tangentes à  $k_0$ , on obtient deux points de contact  $T_i, T'_i$ ; les droites  $DT_i, DT'_i$  forment la conique principale de l'inversion dont  $O_i$  est le centre. Les trois couples de droites qu'on obtient de cette manière sont conjugués harmoniques deux à deux.

II. Cherchons les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'une transformation de notre courbe se réduise à une homographie. Dans ce cas les points doubles — supposons les distincts — doivent se correspondre mutuellement ou être des points unis de l'homographie. On trouve facilement que pour une inversion  $[\omega_i]$  le premier cas seulement peut se présenter. On en déduit que

$$a_1 \equiv -a_2, \quad b_1 \equiv -b_2$$

ou

$$a_1 \equiv -a_2 + \omega_i, \quad b_1 \equiv -b_2 + \omega_i \quad (1)$$

sont les conditions nécessaires pour qu'une inversion du groupe se réduise à une homographie. Une considération géométrique simple suffit pour faire voir qu'elles sont aussi suffisantes.

Il se peut que cela arrive pour deux inversions. En effet, en outre des relations (1) peuvent être remplies encore celles-ci:  $a_1 \equiv -b_2 + \omega_i$ ,  $b_1 \equiv -a_2 + \omega_i$  (pour une seule valeur de  $i$ ), ce qui conduit à une seconde homographie. En tenant compte de ce que deux inversions composées produisent une transformation  $(\omega_k)$ , on peut énoncer le résultat complet suivant:

*Parmi les inversions  $[\omega_i]$  du groupe une ou deux peuvent se réduire à une homographie; dans le second cas une troisième transformation du groupe, autre que les inversions, a la même propriété.*

Dans une involution  $(\omega_i)$  les points doubles ne peuvent jamais s'échanger, comme on trouve facilement; si donc une involution  $(\omega_i)$  se réduit à une homographie, les points doubles en sont nécessairement les points unis. On déduit de cette observation que dans ce cas-là des relations de la forme (1) existent entre les paramètres des points doubles. Ce qui donne le résultat suivant:

*Une seule involution  $(\omega_i)$  peut se réduire à une homographie; s'il en est ainsi, chaque point double se reproduit par elle en échangeant ses tan-*



gentes. L'existence d'une telle homographie a pour conséquence que deux inversions du groupe se réduisent de même à des homographies.

Pour qu'une inversion n'appartenant pas au groupe, soit

$$u' \equiv -u + a_1 + b_1,$$

se réduise à une homographie, il faut qu'elle reproduise les deux points doubles. On trouve que cela exige que

$$a_2 \equiv -a_2 + a_1 + b_1, \quad b_2 \equiv -b_2 + a_1 + b_1,$$

ce qui donne aussi les conditions suffisantes. Ces conditions peuvent être écrites sous la forme équivalente

$$2(a_2 - b_2) \equiv 0, \quad 2a_2 \equiv a_1 + b_1.$$

Ces relations donnent encore  $4(a_1 + b_1) \equiv 0$ .

Si la seconde inversion  $u' \equiv -u + a_2 + b_2$  doit se réduire, elle aussi, à une homographie, il faut et il suffit que  $2(a_1 - b_1) \equiv 0$ ,  $2a_1 \equiv a_2 + b_2$ .

Si cela doit avoir lieu pour les deux inversions à la fois, on déduit des quatre relations précédentes

$$a_1 \equiv b_1 + \omega_i, \quad a_2 \equiv b_2 + \omega_i,$$

ce qui veut dire (v. plus haut) que trois transformations du groupe sont devenues des homographies.

On a trouvé le théorème:

*Chacune des deux inversions n'appartenant pas au groupe peut se réduire à une homographie; si cela arrive pour toutes les deux, il en est de même de trois transformations du groupe.*

En tenant compte des résultats précédents on peut énumérer tous les cas qui peuvent se présenter en vue du nombre des homographies et des transformations quadratiques de la courbe.

a) Une inversion du groupe — soit  $u' \equiv -u$  — est devenue homographie. Composée avec les deux inversions n'appartenant pas au groupe elle donne naissance à deux nouvelles transformations quadratiques

$$u' \equiv u + a_1 + b_1, \quad u' \equiv u + a_2 + b_2.$$

La courbe admet dix transformations quadratiques.

b) Si

$$u' \equiv -u + a_1 + b_1$$

est une homographie,  $a_1 + b_1$  est un quart de période, soit  $\frac{\omega_1}{2}$ . Composée avec les sept transformations elle conduit à sept nouvelles transformations quadratiques. La courbe possède quatorze transformations quadratiques.



c) Si trois transformations du groupe se réduisent à des homographies, la courbe admet, comme on trouve facilement, douze transformations quadratiques.

d) Si les deux inversions n'appartenant pas au groupe se réduisent à des homographies, il en est de même de trois transformations du groupe; en les composant avec les transformations non réduites, on obtient en tout huit transformations.

*Il y a donc une seule courbe pour laquelle le nombre total de transformations quadratiques soit moindre que neuf; c'est une courbe ayant, en outre de sept homographies, seulement huit transformations quadratiques.*

Dans les considérations précédentes nous avons exclu la courbe tacnodale. Par des considérations de même espèce on trouve pour cette courbe le résultat suivant:

*Parmi toutes les quartiques elliptiques celle qui admet le moindre nombre de transformations quadratiques est la courbe tacnodale (spéciale) se reproduisant par trois homographies; elle admet seulement quatre transformations quadratiques.*

La courbe bien connue  $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x)$  est un exemple de cette espèce de courbes.



# Sur les transformations quadratiques d'une quartique plane générale de genre un.

Par

B. BYDŽOVSKÝ.

(Rédaction française du texte original tchèque.)

Présenté le 18 juin 1820.

C'est M. C i a n i\*) qui a exposé systématiquement la théorie des neuf transformations quadratiques (Cremoniennes) reproduisant cette courbe. J'aborde la même question par une autre méthode et je complète l'étude de ces transformations par des considérations d'ordre géométrique.

Exprimons les coordonnées d'un point de la courbe par des fonctions elliptiques, de sorte que

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \pmod{\text{per}}$$

donne la condition nécessaire pour que quatre points de la courbe aux paramètres  $u_1, \dots$  soient situés sur une droite. Désignons par  $a_1, b_1; a_2, b_2$  les paramètres des deux points doubles  $D_1, D_2$ . Ces paramètres remplissent la relation

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \equiv 0 \tag{A}$$

Toute transformation uniunivoque des points de la courbe s'exprime par une congruence

$$u' \equiv \pm u + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Pour qu'une quartique à deux points doubles se reproduise par une transformation quadratique, il faut d'abord, *a*) que deux points principaux soient situés aux points doubles et le troisième point principal en dehors de la courbe; ou bien *b*) qu'un point principal coïncide avec un point double, les deux autres avec deux points simples de la courbe; il

---

\*) E. C i a n i: Le quartiche piane invertibili. Giorn. di mat., vol. LVII. p. 31—35.



faut en outre qu'à toute droite passant par un point principal coïncidant avec le point double  $D_1$ , corresponde une droite passant de même par un point double.

I. Soit  $D_2$  ce point. Si  $(u_1)$ ,  $(u_2)$  sont les points simples de la courbe qui se trouvent sur cette courbe, de manière que

$$a_1 + b_1 + u_1 + u_2 \equiv 0,$$

les points correspondants remplissent les conditions

$$a_1 + b_1 \pm (u_1 + u_2) + 2C \equiv 0.$$

On déduit de ces deux conditions:

$$2C \equiv 0 \text{ ou } 2(a_1 + b_1) + 2C \equiv 0. \quad (1)$$

a) Si les points principaux se trouvent dans le cas a), on obtient de même

$$2(a_2 + b_2) + 2C \equiv 0. \quad (2)$$

Des relations (1), (2) on obtient, en tenant compte de (A):

$$4(a_1 + b_1) \equiv 0, \quad (3)$$

ce qui n'est pas possible pour une courbe générale.

b) Si l'on se trouve dans le cas b), le point  $D_2$  correspond à lui-même, c'est à dire, on a

$$a_2 \equiv \pm a_2 + C, \quad b_2 \equiv \pm b_2 + C$$

ou bien

$$a_2 \equiv \pm b_2 + C, \quad b_2 \equiv \pm a_2 + C.$$

Il en suit

$$2(a_2 - b_2) \equiv 0, \quad (4)$$

relation impossible pour la courbe générale, ou bien

$$a_2 + b_2 \equiv C,$$

ce qui s'accorde avec (1).

II. Soit  $D_2$  le point en question, c'est à dire qu'aux droites passant par le point  $D_1$  correspondent les droites passant par le point  $D_2$ .

Dans le cas a) on obtient

$$a_2 + b_2 \pm (u_1 + u_2) + 2C \equiv 0;$$

on en déduit la relation (3) ou bien celle-ci:  $2C \equiv 0$ . Dans le cas b) c'est le point  $D_1$  qui correspond au point  $D_2$ , celui-ci étant un point principal. On déduit de là, par des considérations analogues aux précédentes, une des deux relations:

$$2(a_1 + a_2) \equiv 0, \quad 2(a_1 + b_2) \equiv 0, \quad (5)$$

dont aucune ne peut être remplie pour une courbe générale.



Enfin, on a trouvé sur la courbe les correspondances suivantes qui peuvent être contenues dans des transformations quadratiques du plan:

I. Quatre correspondances

$$u' \equiv -u + C, \text{ pour } 2C \equiv 0.$$

II. Trois correspondances

$$u' \equiv u + C, \text{ pour } 2C \equiv 0.$$

III. Deux correspondances

$$u' \equiv -u + a_1 + b_1, \quad u' \equiv -u + a_2 + b_2.$$

Ces neuf correspondances sont contenues dans les neuf transformations quadratiques connues reproduisant la courbe. On trouve facilement:

*Les correspondances du cas I. correspondent, en ce sens, aux quatre inversions dont les centres sont situés en dehors de la courbe; je les désignerai par  $[\omega_i]$ ,  $\omega_i$  signifiant une demi-période ou zéro.*

*Les correspondances du cas II. sont contenues dans trois involutions quadratiques ( $\omega_i$ ) qui ne sont pas des inversions.*

*Les correspondances du cas III. sont contenues dans deux inversions dont les centres sont les points doubles; ces inversions n'appartiennent pas au groupe formé par les sept transformations précédentes.*

Remarquons encore que, si l'on exige qu'une courbe (spéciale) admette encore d'autres transformations quadratiques, ses points doubles doivent satisfaire à une des relations (3), (4), (5).

Les transformations trouvées jouissent de plusieurs propriétés remarquables. On les démontre en appliquant le théorème des points correspondants, qui s'exprime facilement par le paramètre elliptique, et en faisant quelques considérations purement géométriques. C'est ainsi qu'on trouve:

*La propriété caractéristique des couples de points de la courbe, produits par l'application d'une transformation ( $\omega_i$ ), est celle que ces couples sont projetés de chaque point double par des droites d'une involution.*

*Les huit points de contact des tangentes qu'on peut mener à la courbe du point principal d'une involution ( $\omega_i$ ) situé hors de la courbe, se décomposent en deux groupes de quatre points; aux points de chaque groupe la courbe est touchée par une cubique adjointe.*

Les trois involutions quadratiques ( $\omega_i$ ) forment (avec l'identité) un sous-groupe  $g_4$ . Les groupes de points, auxquelles donne naissance l'application de  $g_4$ , sont les points de contact des coniques adjointes d'un faisceau, dont les points fixes sont situés sur la courbe.

Lorsque les points fixes du faisceau coïncident, on obtient les coniques doublement tangentes.

En composant deux inversions  $[\omega_i]$ , on obtient une involution ( $\omega_k$ ); ces trois transformations forment un groupe avec l'identité. Considérons un tel groupe:  $O$ , ( $\omega_1$ ),  $[O]$ ,  $[\omega_1]$ . Les groupes de quatre points résultant



de l'application de ce groupe de transformations sont donnés par l'intersection de la courbe avec les coniques adjointes formant un faisceau. Les points fixes de ce faisceau sont (situés hors de la courbe; ce sont) deux points unis de la transformation  $(\omega_1)$ .

Le groupe total des sept transformations  $(\omega_i)$ ,  $[\omega_i]$  contient six sous-groupes du genre considéré; il s'ensuit:

*Le groupe total de huit points auquel conduit le groupe total des sept transformations est situé de trois manières différentes sur un couple de coniques adjointes.*

Les groupes totaux de points sont découpés sur la courbe par des cubiques adjointes formant un faisceau. Les points fixes de ce faisceau sont les points doubles  $D_1, D_2$  de la courbe, les centres  $O_i$  des quatre inversions  $[\omega_i]$  et les trois intersections  $S_k$  des droites joignant deux à deux les points  $O_i$ .

Remarquons que les points  $S_k$  sont les points principaux des involutions  $(\omega_i)$  situés hors de la courbe. On voit de plus que les points  $D_1, D_2$  se correspondent dans une correspondance de Geiser, dont les points principaux sont  $O_i, S_k$ . Mais cette correspondance, qui est, en général, d'ordre huit, se réduit dans ce cas à la transformation quadratique par laquelle se correspondent les pôles réciproques par rapport au faisceau de coniques passant par les points  $O_i$ . La réciproque est vraie, c. à d. on peut énoncer le théorème suivant:

*Un système de six points, dont deux  $D_1, D_2$  sont des poles réciproques par rapport au faisceau de coniques passant par les autres quatre points  $O_i$ , possède la propriété qu'il y a quatre inversions aux centres  $O_i$  et aux points principaux  $D_1, D_2$  qui donnent naissance au groupe de sept involutions quadratiques reproduisant une quartique elliptique.*

*Il y a une double infinité de quartiques elliptiques qui sont reproduites par un tel groupe donné; toute courbe de ce système est déterminée par deux points.*

Il suit de là qu'on peut faire passer une quartique par chaque couple de deux groupes totaux de points auxquels conduit le groupe de transformation considéré.



# Sur les constantes optiques de quelques minéraux de la Bohême.

Par

dr. BOH. JEŽEK à Příbram.

Présenté le 24 juin 1921.

## 1. Pyrope, grenat de la Bohême.

J'ai pu mesurer les indices de réfraction des grenats de la Bohême de quelques localités du célèbre gisement bohême près de T ř e b e n i c e et de deux localités subordonnées près de J i č í n, par la méthode du prisme, avec une erreur possible  $\pm 0.00028$ . Les grenats étudiées sont parfaitement monoréfringentes, et je n'ai pas observé des anomalies optiques.

J'ai obtenu pour les indices de réfraction les valeurs suivants:

Indices pour la lumière du:	Gisement: T ř e b e n i c e				Gisement: J i č í n	
	Localité				Localité	
	Měrunice	Podsedice	Dlažkovice	Třibivlice	Železnice	Lh.Bradlec
Li	1.73885	1.73806	1.73882	1.73721	1.73960	1.73914
Na	1.74436	1.74507	1.74507	1.74385	1.74563	1.74606
Tl	1.74763	1.74696	1.75048	1.75150	1.75080	1.75258
bleu	1.75968	1.75784	1.75800	1.76004	1.76012	1.76134

## 2. Beryl.

J'ai mesurée les indices de réfraction des trois cristaux clair verts qui se trouvaient dans le pegmatite de P í s e k (la carrière „U o b r á z k u“), par la méthode de la réflexion totale avec un réfractomètre de A b b e - Z e i s s. J'ai obtenu pour la lumière d u s o d i u m les valeurs suivants avec une erreur maximum  $\pm 0.0002$ :



	$\omega_{Na}$	$\varepsilon_{Na}$	$\omega - \varepsilon$
Cristal No. 1:	1.5744	1.5694	0.0050
Cristal No. 2:	1.5751	1.5701	0.0050
Cristal No. 3:	1.5751	1.5692	0.0059

### 3. Néphéline.

La néphéline étudiée se rencontre dans la néphélinite du coteau P o d-  
h o r n près de M a r i e n b a d avec la mélilite, augite, apatite, magné-  
tite, et plus rarement avec la sodalite et olivine. Les indices de réfraction  
ont été mesurées au moyen d'un réfractomètre de A b b e - Z e i s s avec  
une erreur maximum  $\pm 0.0002$ , et on a obtenu pour la lumière du sodium  
les valeurs suivants:

	$\omega_{Na}$	$\varepsilon_{Na}$	$\omega - \varepsilon$
Cristal No. 1:	1.54888	1.54327	0.00559
Cristal No. 2:	1.54886	1.54358	0.00528
Cristal No. 3:	1.54912	1.54382	0.00530



# Sur l'histologie du tissu tendineux dans les flexures.

Par

Dr. O. V. SRDĚNKO,

professeur à l'université Charles de Prague.

(Présenté le 4./XI. 1921.)

Dans une note précédente j'ai décrit l'architecture microscopique fonctionnelle des flexures des tendons. Dans la présente communication je donnerai en abrégé le résultat des études faites sur l'histologie du tissu tendineux dans ces mêmes flexures.

Ce tissu se distingue par deux traits caractéristiques. D'une part, par l'arrangement spécial des fascicules tendineux et, de l'autre, par son changement de caractère.

En ce qui concerne le premier point, c'est-à-dire l'arrangement des fascicules tendineux d'une façon différente de celle du tendon ordinaire de traction, il se ramène aux trois facteurs suivants:

1<sup>o</sup> le tissu fasciculaire est plus dense dans les régions, où s'exerce la pression;

2<sup>o</sup> les fascicules et les fibres ne courent pas parallèlement dans la même direction;

3<sup>o</sup> ils s'anastomosent les uns aux autres jusqu'à former un tissu spongieux.

1<sup>o</sup> le tissu fasciculaire dans la flexure tendineuse à la surface de pression apparaît jusqu'à une certaine profondeur plus dense et plus compact, parceque, à cet endroit, le tissu interfasciculaire est rare et que, au lieu de former de larges bandes, il se présente en un mince réseau composé de fibres collagènes et élastiques. La surface des tendons destinée à la pression n'est pas divisée en fascicules secondaires et tertiaires, comme nous le voyons pour les tendons, qui servent à la traction.

2<sup>o</sup> les fascicules et les fibres collagènes dans la flexure tendineuse ne courent pas parallèlement à l'axe longitudinale du tendon, mais ils



prennent une direction oblique ou transversale, au lieu de rester rectilignes ils s'infléchissent en arc ou en spirale.

3<sup>o</sup> Les fibres s'anastomosent les unes aux autres, c'est-à-dire qu'un rameau se détache d'une fibre primitive pour former, avec celui venant d'une autre, une nouvelle fibre, ou bien que la partie d'un faisceau s'unit à celle d'un autre pour former un nouveau faisceau, de sorte qu'il se produit un tissu spongieux, constitué par un épais réseau de trabécules, dans lequel sont placées les cellules tendineuses et qui laisse entre les fils de sa trame des espaces libres de forme irrégulière et communiquant ensemble, où coule la lymphe pendant la vie.

La partie spongieuse du tendon dans la flexure se transforme proximale et distalement en tendon normal de traction ou en insertion tendineuse. Le tissu spongieux est plus ou moins profond, d'après, l'intensité de la pression qu'il à subir.

De même son évolution peut être plus ou moins avancé.

Le tendon spongieux, composé de tissu tendineux fasciculaire peut présenter différentes combinaisons par suite de la présence d'une quantité plus ou moins grande de tissu interfasciculaire, élastique et collagène.

La seconde marque caractéristique du tissu tendineux dans les flexures est le changement qu'il subit superficiellement aux surfaces de pression et qui est occasionné par les cellules, dont quelques-unes produisent la substance hyaline intercellulaire et s'entourent d'une capsule. Par là ce tissu se rapproche du cartilage. Ce passage de tissu fibrillaire en tissu cartilagineux a de nombreux degrés, que l'on peut constater l'un à côté de l'autre dans la même flexure, suivant les conditions fonctionnelles (principalement friction et pression) auxquelles sont soumises les différentes places.

La transformation des cellules fibrillaires en cellules capsulées peut s'accomplir non seulement à l'intérieur de la surface de friction, mais elle peut atteindre plus ou moins profondément le tissu interfasciculaire. Chez l'homme, cette transformation fait des progrès avec l'âge.

Nous pensons qu'il s'agit là d'une modification causée par la fonction et dans les changements de caractères.

Dans le tissu des flexures tendineuses que nous venons de décrire, on peut trouver, à notre avis, un exemple classique, un cas spécifique d'adaptation fonctionnelle du tissu de soutien.



# Sur la correspondance générale de deux surfaces.

Dr. EDUARD ČECH.

(Présenté le 15 avril 1921.)

Dans ma note antérieure „Systèmes trilinéaires des lignes sur une surface et déformation projective des surfaces“ j'ai remarqué que la correspondance de deux surfaces  $S_\gamma$ ,  $S_\eta$ , dans laquelle les lignes asymptotiques de tous les deux systèmes se correspondent mutuellement, est la déformation projective de Furbini, si les étoiles de plans osculateurs, en deux points correspondants, sont homographiques. Ceci m'a amené à considérer, dans la note présente, la correspondance  $R$  des étoiles de plans osculateurs, les surfaces  $S_\gamma$  et  $S_\eta$  étant représentées l'une sur l'autre d'une manière quelconque. Je trouve que  $R$  ne peut être homographique que dans le cas déjà, mentionné et, par suite, la correspondance homographique des étoiles de plans osculateurs suffit à caractériser la déformation projective. Quand une seule tangente asymptotique de  $S_\eta$  correspond à une tangente asymptotique de  $S_\gamma$ ,  $R$  peut être une transformation quadratique; on a alors dans les deux étoiles,  $\infty^1$  couples de faisceaux correspondants, dont les axes forment, dans chaque étoile, un plan. Quand aucune tangente asymptotique de  $S_\eta$  ne correspond à une tangente asymptotique de  $S_\gamma$ ,  $R$  est une transformation cubique et on a un seul couple de faisceaux correspondants. D'ailleurs, dans le premier des trois cas,  $R$  peut être aussi quadratique ou cubique, et, dans le deuxième,  $R$  peut être cubique; alors aucun couple de faisceaux de plans correspondants n'existe pas.



# Transgressions et regressions de la mer du Silurien inférieur dans la Bohême.

(Contribution à la paléogéographie du Barrandien.)

(Résumé du texte tchèque.)

Par

RADIM KETTNER, Prague.

Présenté dans la séance du 4 novembre 1921.

On connaît depuis longtemps la nature transgressive du Silurien tchèque bien visible sur chaque carte géologique du Barrandien. En quelques endroits les couches siluriennes reposent sur le Cambrien, tandis qu'ailleurs elles se trouvent sur l'Algonkien. Le Cambrien, du reste, est situé asymétriquement relativement au long axe du Barrandien, étant principalement développé à l'aile S. E., et manquant presque totalement à l'aile N. W. La bande cambrienne de *Tejřovice*, *Skreje* et *Lohovice* fait exception ; mais elle s'étend à l'extérieur du terrain formé par des couches siluriennes.

Les nouvelles études des géologues tchèques dans le Silurien inférieur et dans le Cambrien ont fourni une quantité de détails très intéressants qui prouvent que la transgression de la mer du Silurien inférieur n'est pas unique, mais qu'à vrai dire il existe plusieurs transgressions spéciales qui se sont manifestées à divers époques. Ces transgressions diverses se présentent en maints endroits du Barrandien et sont même quelquefois accompagnées par des mouvements retrogrades de la mer (regressions). Ces mouvements de la mer du Silurien inférieur positifs ou négatifs ne sont liés, ainsi qu'on a pu le constater jusqu'à présent, qu'à deux des plus anciennes bandes, c'est à dire aux *couches de Krušná hora* ( $d \alpha$ ) et à celles de *Komárov* ( $d \beta$ ). C'est à partir du commencement de la formation des couches d'*Osek* et de *Kvátň* ( $d \gamma$ ) qu'on a pu constater une évolution ininterrompue dans le bassin de sédimentation dont l'étendue ne subit pas de changement essentiel causé par des mouvements positifs et négatifs de la surface de la mer.



Aujourd'hui on sait qu'en Bohême il existe entre les dépôts cambriens et ceux du Silurien inférieur un hiatus démontrant *une période continentale pendant le Cambrien supérieur*. Son début qui eut lieu après la sédimentation des couches cambriennes est remarquable par *des épanchements considérables des laves porphyritiques et porphyriques*. Elle fut terminée par *une grande dénudation*. Une grande partie des coulées porphyritiques et porphyriques épanchées pendant cette époque cambrienne furent détruites par la dite dénudation.

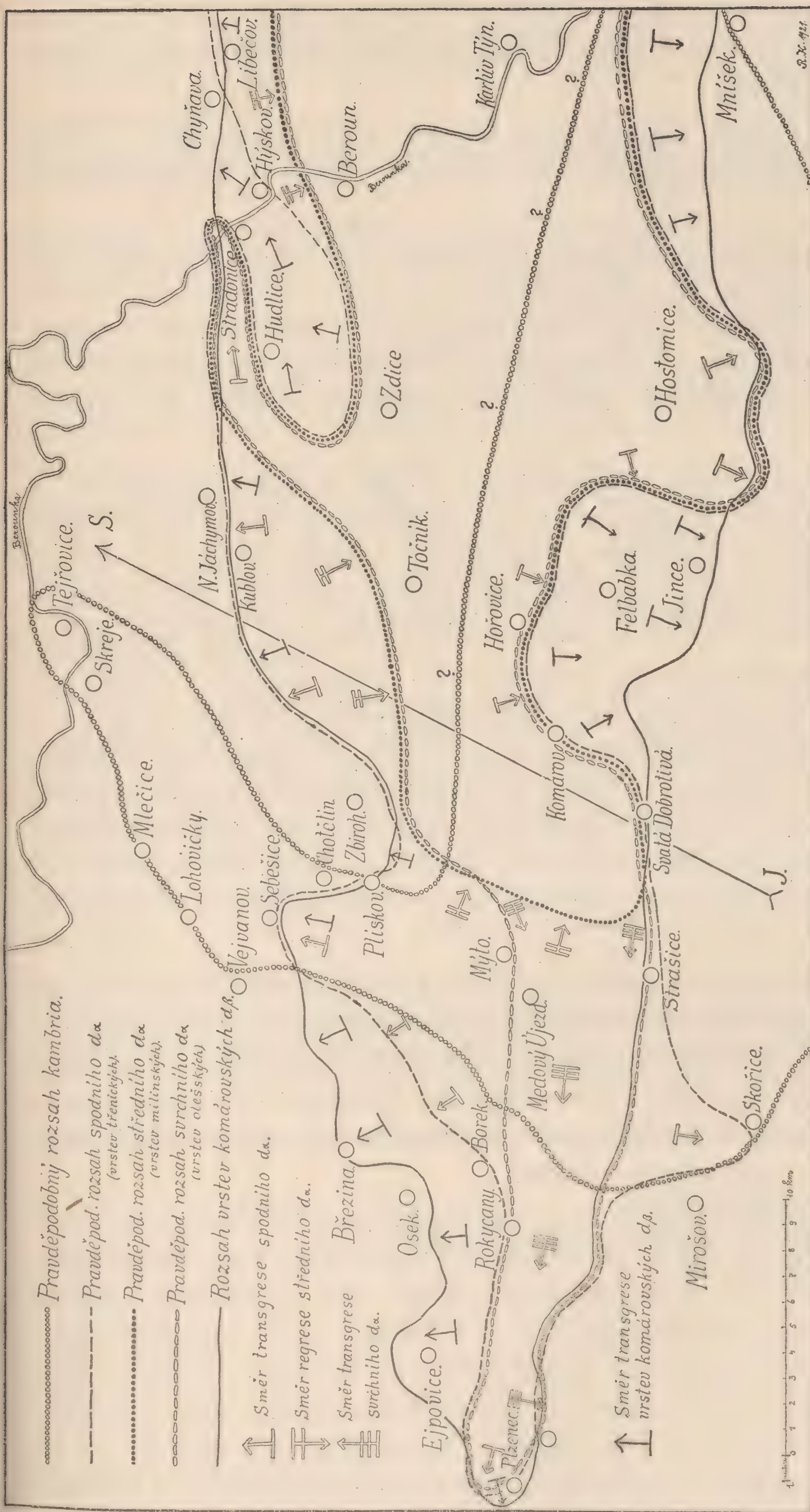
*L'étendue des dépôts cambriens* avant le commencement de la sédimentation des couches siluriennes était bien différente de celle occupée par les dépôts siluriens. Il existe dans le Barrandien deux endroits où se trouvent des dépôts cambriens: c'est *le grand territoire des monts Brdy* (territoire de *Příbram* et de *Jince*) s'étendant à l'aile S. E., puis *le territoire* beaucoup plus petit *de Skreje et de Tejšovice* situé à l'aile N. W. du Barrandien, mais en dehors des dépôts siluriens. Il n'y a pas d'autres couches cambriennes au mur du Silurien inférieur à l'aile N. W. du Barrandien. Le développement facial de ces deux territoires cambriens est très différents. Voilà la question: Une connection de ces deux territoires cambriens existait-elle avant la transgression de la mer silurienne, ou les dépôts cambriens furent ils formés dans deux bassins indépendants, séparés l'un de l'autre? Les investigations nouvelles nous prouvent que le faciès du Cambrien de *Skreje* et de *Tejšovice* s'est développé *dans un golfe* communiquant avec le grand bassin cambrien de *Brdy*. Les coupes naturelles du Cambrien près de *Medový Újezd* et les petites îles cambriennes près de *Plískov* et *Chotětín* récemment découvertes nous prouvent la communication du Cambrien de *Brdy* avec celui de *Skreje* et *Tejšovice*.

Les dépôts les plus anciens du Silurien tchèque sont *les couches de Krušná hora* ( $d\alpha$ ). (Tremadoc inférieur). D'après les recherches paléontologiques de M. C e l d a K l o u č e k et les recherches pétrographiques de l'auteur on peut diviser les couches de *Krušná hora* en trois niveaux: 1. *niveau inférieur* — *couches de Třenice* —  $d\alpha_1$  (grès polymictes avec beaucoup de débris porphyriques et une base de conglomérats), 2. *niveau moyen* — *couches de Milina* —  $d\alpha_2$  (grauwackes rouges avec intercalations des phthanites) et 3. *niveau supérieur* — *couches d'Olešná* —  $d\alpha_3$  (schistes argileux ou gréseux rouges).

Les couches de *Krušná hora* n'ont pas partout leur développement complet. Ce sont surtout les deux niveaux supérieurs ( $d\alpha_2$  et  $d\alpha_3$ ), quelquefois seulement le niveau moyen de la bande  $d\alpha$  ( $d\alpha_2$ ) qui manquent dans la série des couches. Ce fait est d'autant plus intéressant, si nous étudions en même temps l'étendue des *couches de Komárov* ( $d\beta$ ). (Tremadoc supérieur.)

En quelques endroits les couches  $d\beta$  se sont déposées immédiatement après la formation de  $d\alpha_3$  de sorte que là la sédimentation ne fut pas interrompue. Mais là où les parties des *couches de Krušná hora* ne sont pas déve-





**Explications:** Pravděpodobný rozsah kambria = Etendue probable du Cambrien.

Pravděpodobný rozsah spodního  $d\alpha$  (vrstev třenických) = Etendue probable des couches de Třenice ( $d\alpha_1$ ).

Pravděpodobný rozsah středního  $d\alpha$  (vrstev mlínských) = Etendue probable des couches de Milina ( $d\alpha_2$ ).

Pravděpodobný rozsah svrchního  $d\alpha$  (vrstev olešských) = Etendue probable des couches d'Olešná ( $d\alpha_3$ ).

Rozsah vrstev komárovských  $d\beta$  = Etendue des couches de Komárov ( $d\beta$ ).

Směr transgrese spodního  $d\alpha$  = Direction de la transgression de  $d\alpha_1$ .

Směr regrese středního  $d\alpha$  = Direction de la regression de  $d\alpha_2$ .

Směr transgrese svrchního  $d\alpha$  = Direction de la transgression de  $d\alpha_3$ .

Směr transgrese vrstev komárovských  $d\beta$  = Direction de la transgression des couches de Komárov  $d\beta$ .

S—J = N—S.



loppées au mur de la bande  $d\beta$ , il faut supposer *des lacunes stratigraphiques* causées par les changements d'étendue de la mer silurienne. Et il y a beaucoup d'endroits où les *couches de Krušná hora* manquent totalement au mur des *couches de Komárov*, alors *celles-ci reposent directement sur l'Algonkien ou sur le Cambrien*.

Il est donc évident que ce n'est pas par une transgression unique qu'a commencé le Silurien inférieur de la Bohême, mais qu'on en distingue au moins deux.

Il n'y a pas de doutes sur *la nature transgressive des couches de Třenice* ( $d\alpha_1$ ). La seule constitution pétrographique témoigne déjà que *les couches de Třenice* se sont déposées après une longue période continentale pendant laquelle les porphyrites et porphyres du Cambrien supérieur surtout furent dénudés et fournirent ainsi aux couches de *Třenice* le matériel clastique.

*Les couches de Třenice* comprennent la plus grande étendue de la bande  $d\alpha$ . Là où des niveaux moyen et supérieur de la bande  $d\alpha$  font défaut, ce n'est pas la dénudation des dépôts une fois sédimentés qui en fut cause, mais bien plutôt *un retrait de la mer* en un plus petit espace de sorte que les niveaux moyen et supérieur ne purent pas s'y développer.

Il est très intéressant de constater que dans la partie occidentale du bassin silurien tchèque *une nouvelle transgression* de la mer de  $d\alpha$  eut lieu après ce retrait, et cela *au commencement de  $d\alpha_3$* . Cette nouvelle transgression n'eut pas l'étendue de celle qui avait eu lieu au commencement de  $d\alpha_1$  et n'atteignit pas un aussi vaste espace que celui occupé par les couches de *Třenice*. En un seul endroit à l'Est de *Plzenec*, on peut constater que la mer des *couches d'Olešná* ( $d\alpha_3$ ) dépassa un peu les limites *des couches de Třenice*.

Là où cette transgression de la mer de  $d\alpha_3$  eut lieu, *les couches d'Olešná* reposent directement sur celles de *Třenice*, celles de *Milina* à intercalations des phtanites étant absentes dans la succession des strates. Le contact entre les couches de  $d\alpha_1$  et de  $d\alpha_3$  est toujours très distinct. Il n'existe pas de transition entre les deux séries comme ce serait le cas partout où la sédimentation n'a pas subi d'interruption.

*Les couches de Komárov* ( $d\beta$ ) présentent presque partout une transgressivité très distincte. Là où les *couches d'Olešná* ( $d\alpha_3$ ) sont développées, aucune interruption de la sédimentation n'eut lieu; quant aux qualités pétrographiques et paléontologiques, on y remarque même des transitions insensibles entre *les couches de Krušná hora* et celle de *Komárov*. Mais l'étendue des *couches de Komárov* ne se maintient, qu'en peu d'endroits dans les limites données par les *couches d'Olešná* ( $d\alpha_3$ ). La mer de  $d\beta$  est en général en transgression même sur la plus grande étendue de  $d\alpha$  (couches de *Třenice*), de sorte que les *couches de Komárov* reposent directement sur l'Algonkien ou sur le Cambrien à l'extrémité du bassin silurien.



C'est avec la formation des couches de *Komárov*, que cesse l'oscillation de la mer du silurien inférieur tchèque. *Les couches d'Osek et de Kváň* ( $d\gamma$ ) ainsi que tous les dépôts postérieurs du Silurien inférieur se sont formés dans un bassin de sédimentation dont l'étendue coïncidait presque totalement avec celle des couches de *Komárov*. On ne remarque plus de transgressions ni de regressions de la mer après la formation de la bande  $d\beta$ . Ce n'est qu'à la fin de la période du Silurien inférieur (après la formation *des quarzites de Kosov* —  $d\zeta$ ) qu'on peut constater de nouveau un petit hiatus stratigraphique par l'absence de la zone la plus basse du Silurien supérieur, zone caractérisée par *Diplograptus acumminatus*.

Sur la carte schématique ci-jointe nous avons tâché de rendre visibles les transgressions et les regressions de la mer du Silurien inférieur tchèque pendant le Tremadoc. Il est tout naturel que l'étendue des couches (par exemple de celles de *Komárov*  $d\beta$ ) figurée dans notre carte ne soit pas conforme à l'étendue originaire de la mer. Celle-ci a pu s'étendre plus loin, mais plus tard les dépôts furent certainement dénudés en partie. Il n'y eut que le bord des *couches de Třenice* et d'autres niveaux de la bande  $d\alpha$  se trouvant dans le mur de la bande transgressante de  $d\beta$  qui ont dû correspondre approximativement à l'étendue primitive de la mer du Silurien inférieur.

Nous n'avons figuré sur notre carte que les transgressions et les regressions du Silurien inférieur de la partie occidentale du Barrandien qui est la plus intéressante et la mieux explorée. *Les environs de Komárov* où la sédimentation du Silurien inférieur n'a subi *aucune interruption*, puis la contrée située entre *Plzenec* et *Medový Újezd* où eut lieu la *transgression locale de  $d\alpha_3$*  et enfin la *nature transgressive de  $d\beta$*  bien visible en beaucoup de points de notre carte méritent d'attirer particulièrement l'attention.

Nous sommes sûrs que la partie orientale du Barrandien contient aussi de nombreux exemples des mouvements de la mer silurienne tchèque la plus ancienne, mais les études stratigraphiques du Silurien dans cette contrée ne sont pas encore terminées. Les coupes naturelles n'y sont pas non plus si nettes que dans la partie occidentale du Barrandien.

*Institut géologique  
de la Haute École Polytechnique tchèque  
de Prague.*



# Etudes sur la tectonique près de Březina au Nord de Rokycany.

(Résumé du texte tchèque.)

Par

RADIM KETTNER, Prague.

(Avec 4 figures dans le texte.)

(Présenté dans la séance du 18 novembre 1921.)

Nous donnons ici une courte description de la tectonique des environs les plus proches du village de *Březina* au Nord de la ville de *Rokycany*. Situés à l'extrémité ouest du bassin silurien tchèque ces environs présentent une quantité énorme de failles irrégulières, bien visible surtout dans les roches dures des quartzites de Drabov ( $d\delta$ ). On se trouve ici à la limite ouest du groupe quartzitique de *Plecháč*, et cela dans une zone limitrophe entre de Silurien inférieur et l'Algonkien.

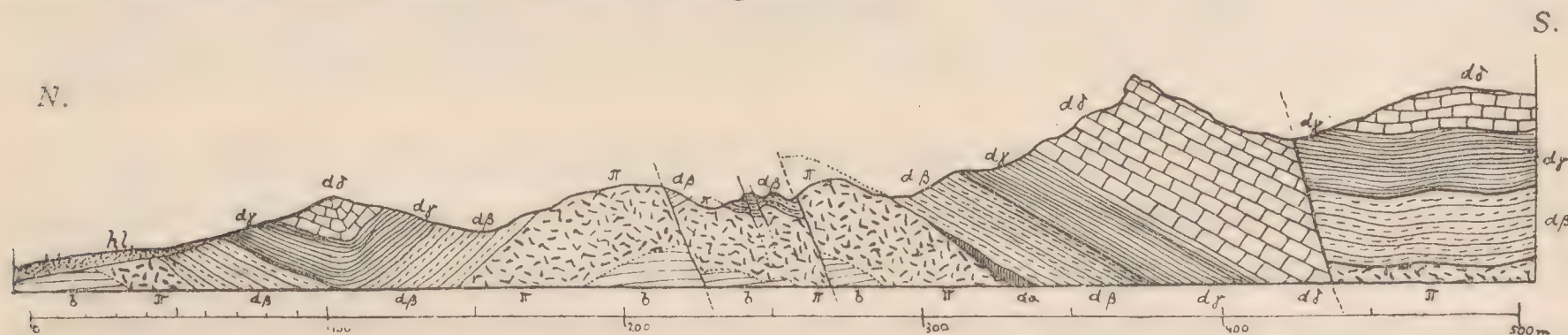


Fig. 1. Coupe géologique de l'extrémité sud du village Březina à travers les anciens travaux miniers.

( $b$  = Algonkien,  $\pi$  = porphyrites cambriens,  $d\alpha$  = couches de Krušná hora,  $d\beta$  = couches de Komárov,  $d\gamma$  = couches d'Osek et de Kváň,  $d\delta$  = quartzites de Drabov,  $hl$  = décombres et limon.)

La construction tectonique du groupe quartzitique de *Plecháč* dérive peut être d'un *brachysynclinal* disloqué par de très nombreuses fractures longitudinales, transversales et diagonales. Le terme le plus récent dans la série des dépôts formant ce groupe des monts est représenté par les *quartzites de Drabov* ( $d\delta$ ) qui grâce à leur dureté et à leur grande résistance s'élèvent en forme de chaînes très remarquables causant ainsi la surface topographique de la contrée. Au mur des quartzites de Drabov il n'y a que



deux séries des couches siluriennes: celles d' *Osek* et de *Kváň* ( $d\gamma$ ) et celles de *Komárov* ( $d\beta$ ). Les premières sont représentées par des schistes argileux noirâtres avec beaucoup de mica blanc et des nodules durs. Les couches de *Komárov* se composent de schistes argileux de couleur jaune-gris et de minerais de fer oolithiques, surtout de l'oligiste. Les couches les plus



Fig. 2. Carte géologique détaillée des environs les plus proches du village de Březina. (1. = porphyrites cambriens, 2. = couches de Komárov  $d\beta$ , 3. = couches d'Osek et de Kváň,  $d\gamma$ , 4. = quartzites de Drabov  $d\delta$ , 5. = décombres et limon; A-B = la direction de la coupe fig. 1.)

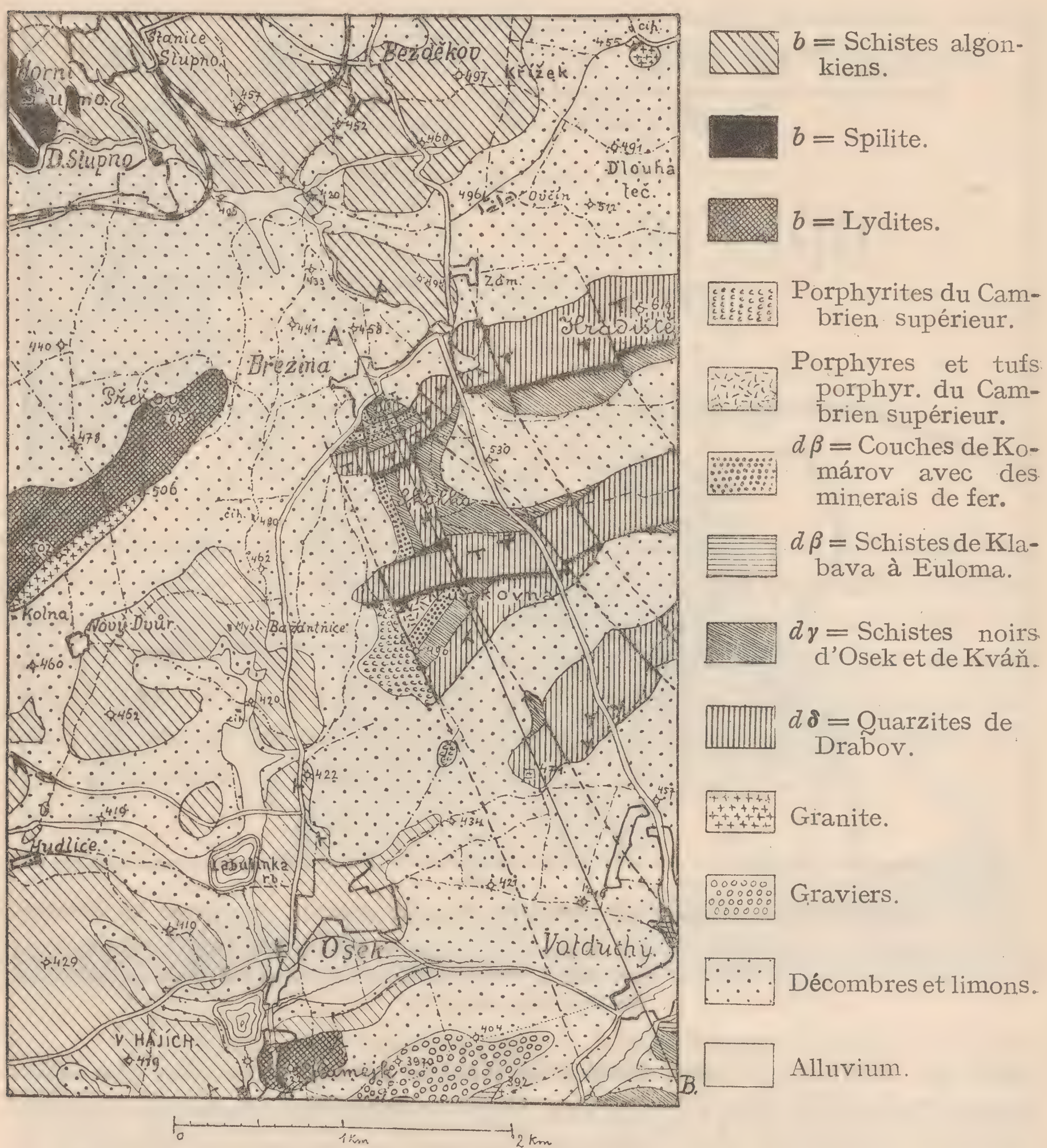
basses du Silurien inférieur, couches de *Krušná hora* ( $d\alpha$ ) ne sont pas développées dans les environs de Březina. Voilà pourquoi les couches de *Komárov* reposent directement sur l'Algonkien ou sur des coulées porphyritiques et porphyriques du Cambrien supérieur. Les porphyres cambriens sont accompagnés en quelques endroits par des tufs verts bien visibles p. ex. dans une carrière de la forêt *Turkovna* au Sud de Březina.

Tandisque la direction des couches siluriennes et des principales fractures longitudinales est ENE-WSW, ainsi que l'exige la structure des chaînes varisques dans la Bohême du centre, les dépôts algonkiens possèdent dans les environs de Březina une direction tout-à-fait différente, c'est-à-dire du N au S. Cette direction N-S peut être aussi constatée



dans les autres endroits algonkiens. Nous sommes d'avis que cette direction anormale répond à la structure primitive de l'Algonkien tchèque avant la sédimentation des dépôts cambriens.

La limite ouest du groupe des monts de *Plecháč* est marquée par une zone tectonique qui divise le terrain silurien de l'Algonkien. Les fractures



nombreuses que nous voyons sur les quartzites de Drabov près de *Březina* ne sont qu'un accompagnement de la dite zone tectonique.

La structure du sol près de *Březina* est figurée sur des esquisses de cartes et sur des coupes géologiques jointes à cette notice. En premier lieu nous donnons une carte très détaillée des environs les plus proches du Sud du village de *Březina* (voir la fig. No 2) où se trouvait autrefois une mine de fer et où les affleurements nous découvrent très distinctement la tectonique des couches siluriennes, surtout de très nombreuses failles.



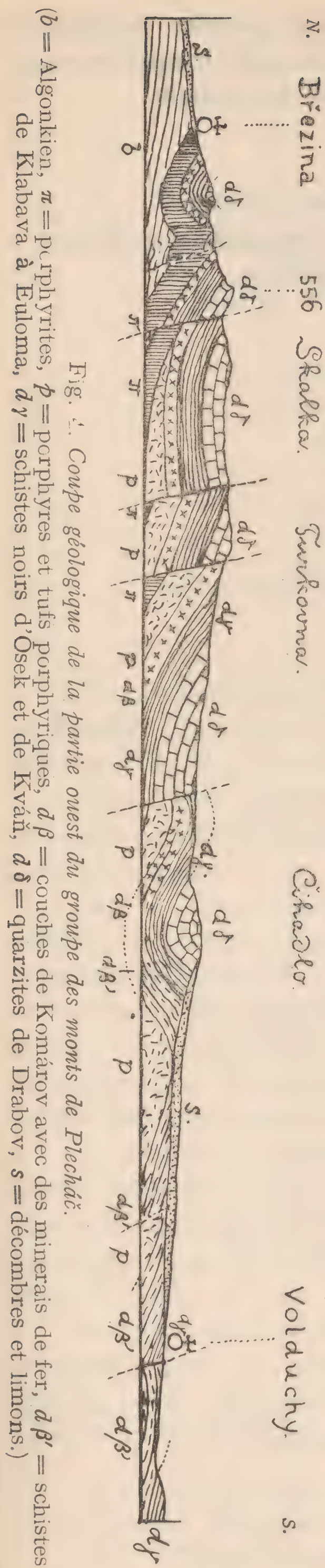


Fig. 4. Coupe géologique de la partie ouest du groupe des monts de Plecháč.

Des failles ont divisé les couches siluriennes en plusieurs massifs irréguliers qui ont été déplacés et contournés de diverses façons. Nous pouvons constater de même que ces couches sont sensiblement plissées (voir la coupe No 1). La voûte anticlinale au Sud de *Březina*, aujourd'hui disparue et par dénudation et par des travaux miniers, a mis à nu le mur des couches siluriennes: les porphyrites noirâtres ou violet-foncé de l'âge cambrien. Le minerai de fer de la bande  $d\beta$  repose directement sur ces roches éruptives. Les petits massifs isolés et les piliers de minerai éparpillés sur la base porphyritique nous prouve que la voûte anticlinale a été interrompue par quelques failles ainsi que nous l'avons dépeint sur la coupe No 1 ci jointe.

Outre cette représentation de tectonique spéciale des environs les plus proches du village nous donnons dans cette notice *une carte géologique* qui explique la structure du sol *dans la partie ouest du groupe des monts de Plecháč* au Sud de *Březina* et qui figure aussi la constitution géologique de toute la contrée environnante. La direction anormale des couches de quartzites  $d\delta$  dans quelques massifs est une preuve que toute la tectonique de la limite ouest de *Plecháč* dépend des mouvements très irréguliers des massifs. Nous avons essayé de figurer la tectonique de cet endroit aussi par la *coupe géologique No 4*.

Nous croyons que nos cartes et nos coupes font suffisamment ressortir la structure de la partie ouest du bassin silurien tchèque. Les autres endroits des anciens sédiments paléozoïques dans la partie ouest du bassin sont caractérisés par des événements tectoniques semblables. Ainsi p. ex. le territoire des conglomérats cambriens au SE de *Rokycany* et le groupe des monts de *Radeč* à l'E de *Radnice*, formé par des quartzites durs de Drabov. En effet, on peut constater partout dans ces territoires les mêmes lois tectoniques, telles qu'elles sont connues dans des autres endroits du Barrandien. Mais la grande fragilité des couches prévalantes, surtout la fragilité des quartzites de Drabov a été la cause de



la dislocation des couches qui n'ont pu résister à la pression orogénique et se sont transformées en une quantité de petits massifs irréguliers compliquant ainsi singulièrement l'aspect tectonique de la contrée.

*Institut géologique  
de la Haute Ecole polytechnique tchèque  
à Prague.*



# La géologie du terrain pétrolifère près des Papradno en Slovaquie.

(Avec une figure dans le texte.)

Resumé du texte tchèque.

Par

GUIDO ZÁRUBA (Prague).

Présenté dans la séance de 4 novembre 1921.

On connaît l'existence du naphte près de *Papradno* en Slovaquie (comté de Trenčín) à peu près depuis 1860, mais dans la littérature elle n'est traitée que par Th. Possewitz<sup>1)</sup> et R. Zubre<sup>2)</sup> qui en font une remarque.

Le naphte apparaît dans la vallée du ruisseau de *Medvedje* comme une source naturelle sortant de couches schisteuses et gréseuses sur la surface du ruisseau.

M. H. Drucker de *Trenčín* y entreprit les premiers travaux primitifs de forage, mais il n'a pas réussi. Aujourd'hui on s'intéresse beaucoup du terrain de naphte de *Papradno*. Cette année *Bureau d'Etat pour la distribution des grandes propriétés* (Státní pozemkový úřad) et la *Banque agrarienne et industrielle de Moravie* ont entrepris un forage qui avait 80 m de profondeur. On n'a pas rencontré de naphte, mais on a trouvé plus qu'une fois des traces des gazes pétroliques.

Le terrain du naphte près de *Papradno* et *Medvedje* appartient aux *couches crétacées et paléogènes du flyche carpathique*. La constitution géologique de ce terrain est la même que celle des environs de *Turzovka*, décrite récemment par M. Radim Kettner<sup>3)</sup> dans la revue „Hornický věstník“ 1921.

Nous n'avons pas pu déterminer les couches au mur des *grès d'Istebna* (Sénonien) dans la contrée de *Papradno*. Selon nos expériences acquises dans la vallée du ruisseaux de *Papradno* et dans les environs de *Púchov* il paraît qu'ils se trouvent sous les grès d'Istebna des *conglomérats à grain*

<sup>1)</sup> Th. Possewitz, Petroleum und Asphalt in Ungarn.

<sup>2)</sup> Ungar. Montanindustrie- und Handelszeitung 1899.

<sup>3)</sup> La géologie du gisement de nafte près de Turzovka en Slovaquie.



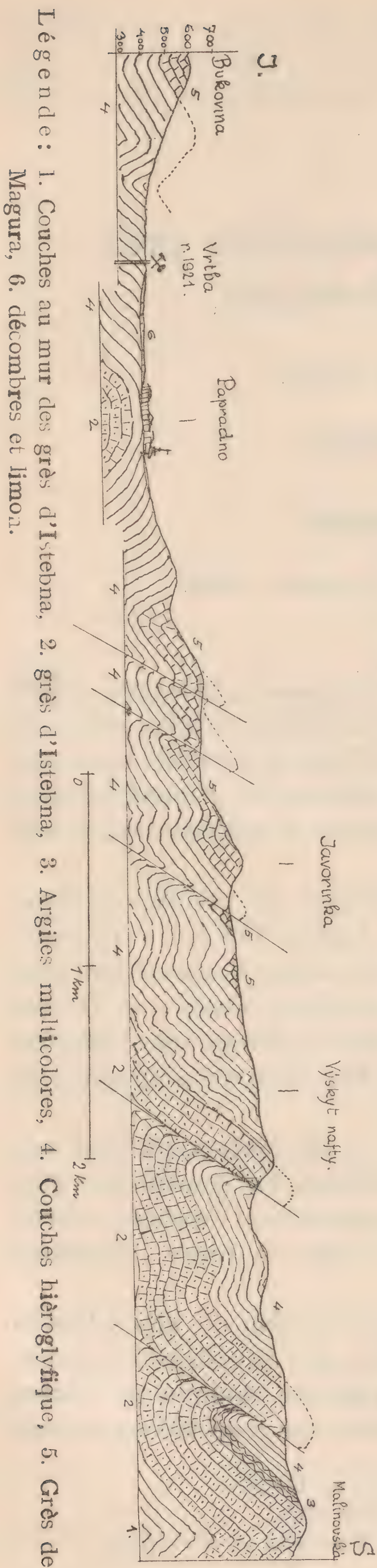
*gros* composés principalement des galets provenant des calcaires jurassiques.

Ces conglomérats désignent peut être une transgression de la mer du Crétacé supérieur sur les rochers („Klippen“) jurassiques. Il est probable que dans notre terrain les grès d'Istebna couchent directement sur la base assez vieille, peut-être éocrétacée ou jurassique. Il n'y a pas de preuves pour supposer audessous des grès d'Istebna des *marnes à Inocerames* ou des *couches de Ropianka* comme des territoires pétrolifères de la Galicie. Dans les environs de Papradno on ne trouve non plus des *argiles multicolores* au toit des grès d'Istebna dont M. R. Kettner parle dans son travail cité.

Dans les environs de *Papradno* les dépôts les plus puissants appartiennent à l'*Eocène* et à l'*Oligocène inférieur*. Formant le toit des grès d'Istebna ils répondent aux *couches hiéroglyphiques* des géologues carpathiques. Des petites saillies vermiculaires et tuberculeuses sur la surface des couches appelées „*fucoides*“ et „*hieroglyphes*“ ne se trouvent que rarement dans cette série des couches, mais un autre signe caractéristique des couches hiéroglyphiques est très souvent à remarquer près de Papradno: quelques couches de grès sont déformées sinuément et décomposent d'après des plaines de la forme à peu-près sphérique. Ces grès sont connus dans la littérature allemande sous le nom „*krummschalige Sandsteine*“.

La série des couches paléogènes des environs de *Papradno* est terminée par *des grès de Magura* qui appartiennent à l'Oligocène supérieur. Ceux-ci aux sommets des monts se trouvent surtout plissés au synclinal.

Coupe géologique dans les environs de Papradno.



Légende: 1. Couches au mur des grès d'Istebna, 2. grès d'Istebna, 3. Argiles multicolores, 4. Couches hiéroglyphique, 5. Grès de Magura, 6. décombres et limon.



Quant à la tectonique du terrain pétrolifère près de *Papradno*, elle est bien visible sur la coupe jointe à notre notice. Commenant sur le sommet de *Malinovska* notre coupe est menée dans la direction sud vers *Papradno* et au mont de *Bukovina*. Le village de *Papradno* est situé sur une *voûte anticlinale*. Au Nord de *Papradno* on peut constater des plis-failles bien remarquables sur la répétition *des grès d'Istebna et de Magura*. Dans la vallée de *Medvedje* les couches montrent un plissement spécial aux anticlinaux et synclinaux petits. C'est ici que la source du naphthe se trouve sur un de ces petits anticlinaux.

*Le gisement de naphthe de Papradno est lié aux couches de l'Eocène inférieur* ainsi qu'on a pu le constater près de *Turzovka* ou à *Bohuslavice* en Moravie.

Du reste le terrain de *Papradno*, à l'égard de sa constitution tectonique *ne nous laisse pas de grandes espérances de trouver des gisements puissants du naphthe*. Les couches sont trop redressées et disloquées et nulle part on ne trouve un anticlinal favorable pour y fonder un forage éxepté l'anticlinal cité. La source du naphthe près de *Papradno* est la preuve que le Paléogène des Carpathes de Moravie et de Slovaquie est pétrolifère, mais il n'y a pas encore de systématiques recherches géologiques à la base desquelles on pourrait indiquer les endroits du forage qui nous donneraient des espoirs meilleurs que jusqu'à présent.

*Institut géologique  
de la Haute École politechnique tchèque  
de Prague.*



## Sur la vitesse de réaction du magnésium en milieu aqueux.

Extrait d'une étude cinétique tchèque par  
Dr. ANTONÍN VYSKOČIL.

(Présenté le 23 Avril 1920.)

L'équation de Nernst et Brunner:  $K = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{C - c_1}{C - c_2}$  n'est pas applicable à la vitesse de dissolution du magnésium métallique dans les solutions aqueuses de sels ammoniacaux, la vitesse s'accroissant pendant un certain temps avec la concentration croissante des ions  $\text{OH}'$ . Voilà pourquoi le magnésium se dissout plus lentement dans les solutions de sels ammoniacaux très légèrement acidulées que dans les mêmes solutions un peu alcalisées.

Si le magnésium est relié avec une électrode inattaquable formant une pile galvanique, les valeurs absolues de vitesse sont plus élevées, mais montrent en somme la même formule que pour la dissolution simple.

Lorsque le magnésium métallique se dissout dans une solution aqueuse de sel d'ammoniaque, il y a d'abord — comme avec les solutions neutres de sels métalliques — décomposition de l'eau par le métal; les sels ammoniacaux (resp.  $\text{NH}_4'$ ) y agissent comme dissolvant du  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  qui est le produit primaire. Dans les cas où l'acidité ou l'alcalinité n'est pas trop éloignée de la neutralité, la vitesse relative de réaction dépend beaucoup du pouvoir oxydant (ou réducteur) de la solution.

On peut mettre ces expériences en accord avec l'opinion de W. Kistiakowsky qui suppose que les électrodes métalliques présentent outre le procédé:  $\text{Me} - n \ominus = \text{Me}^{n\bullet}$  (resp.  $\text{Me} + n \oplus = \text{Me}^{n\bullet}$ ) aussi appliqué notamment avec *Al* et *Mg*, la possibilité du procédé:  $\text{Me} + n \text{OH}' - n \ominus = \text{Me}(\text{OH})_n$  (précipité). Aux conditions dernièrement énoncées les électrodes métalliques prennent par conséquent le caractère d'électrodes de gaz.

Ainsi l'analogie (électrochimique) entre *Al* et *Mg*, qu'a supposé Kistiakowsky, peut être considérée comme confirmée aussi par l'analyse cinétique. Dans les solutions des chromates et de permanganates (y compris



celles de l'ammonium) le pouvoir réductif du magnésium s'abaisse à un tel point que la vitesse de réaction peut virtuellement descendre jusqu'à zéro. Quelques anions (notamment le  $\text{Cl}'$ ) y agissent comme des catalyseurs positifs.

Le magnésium garde cette passivité acquise pour certaines réactions (comme p. ex. la dissolution du magnésium dans des solutions diluées du  $\text{NH}_4\text{J}$ ) durant un certain temps tout en paraissant être absolument intact, même quand il a été déjà *retiré* de la solution qui le rend passif et qu'il a été parfaitement lavé à l'eau.

En ce qui concerne encore l'action du magnésium sur l'eau en présence de différents sels métalliques neutres, il faut considérer au point de vue cinétique aussi la dissolubilité relativement petite du  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  dans les dites solutions. C'est pourquoi ils forment à la surface du magnésium des pellicules et des couches qui le protègent plus ou moins, mais qui, surtout dans certains cas, excitent des courants galvaniques locaux activant la réaction.

Si l'on prête une influence catalytique à certains sels neutres, il faut l'attribuer surtout aux anions. Les chlorions sont les plus efficaces de tous.

L'auteur mesurait la vitesse de réaction non seulement par rapport au volume de l'hydrogène acquis, tout en remuant rapidement la solution, mais aussi d'après la méthode gravimétrique (en mesurant la perte de la substance du magnésium métallique). L'auteur prenait toujours bien soin que la température, la surface du magnésium et (employant une petite turbine) la vitesse du brassage restassent constamment égales.



## Plasmolyse des Cyanophycées.

(Travail de l'Institut de la physiologie des plantes à l'Université Charles à Prague.)

SILVESTR PRÁT.

(Présenté le 4 XI. 1921.)

La différence essentielle entre une cellule de Cyanophycées et celle qui représente le type d'une cellule végétale est le manque de vacuoles et voilà pourquoi dans les solutions hypertoniques, l'eau peut être enlevée seulement du plasma. Une séparation complète du plasma de la membrane d'une cellule est un phénomène très rare et je n'ai jamais observé une contraction complète du protoplasme en une boule, mais presque toujours le protoplasme gardait une forme irrégulière. J'ai tâché de définir les limites de la concentration plasmolysante  $\text{KNO}_3$  et  $\text{NaCl}$  par une observation, dans quelle concentration la plasmolyse (à peu près de toutes les cellules) s'égalait dans le temps plus court qu'une minute. Dans le rang des solutions ayant la différence de 0.02—0.04 mol la concentration moins élevée n'était pas plasmolysante tandis que la concentration plus haute fût plasmolysante pendant le temps plus prolongé qu'une minute. Les valeurs trouvées naturellement (chez *Oscillatoria* 1.6—1.8%  $\text{KNO}_3$  ou 1—1.1%  $\text{NaCl}$ ) ne peuvent pas répondre aux valeurs osmotiques des cellules, parce que la pression de l'enflement du plasma, l'adhésion aux membranes et de même une assez grande perméabilité causent toujours le réhaussement de la concentration.

Quelques espèces des Oscillatoriacées ainsi observées avaient la limite de concentration qui variait à peu près entre 0.8—1.5%  $\text{NaCl}$  ou 10—13% de saccharose. Une plus courte influence des solutions hypertoniques était supportée sans perte; mais après quelque temps, on pouvait observer une déplasmolyse, les fibres brunissaient et commençaient à être tout à fait délabrées. *Oscillatoria* après 10 minutes de l'influence de 20%  $\text{NaCl}$ , 20%  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$  étaient déperis, mais elles restaient dans la solution nourrissante même après 60 min. de l'influence 20%  $\text{SrCl}_2$ . Les Cyanophycées supportent aussi bien très fortes solutions hypertoniques de saccharose surtout si on laisse par évaporation grandir la concentration



succéssivement. La déplasmolyse des Cyanophycées avait lieu d'autant plus tôt, que le plasmolyticum était moins hypertonique, c'est à dire dans les solutions plus concentrées beaucoup plus lentement. La vitesse de déplasmolyse dans les sels différents, c'est à dire la perméabilité du protoplaste pour les ions différents est arrangée dans le tableau:

0 veut dire une déplasmolyse vite ( $\frac{1}{2}$ —5').

+ déplasmolyse dans les concentrations plus basses que  $m/3$  pendant 10—30', dans les concentrations plus hautes pendant 30—50'.

++ déplasmolyse durant plus qu'une heure.

	Li	K	Na	Mg	Ca	Sr	Ba
Cl	+	0	+	++	++	++	++
NO <sub>3</sub>		±			++	+	+
SO <sub>4</sub>		+	+++	++++			
H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>		+					
HPO <sub>4</sub>		0					
PO <sub>4</sub>		±					
CNS		00					

Par combinaison des ions monovalents ou divalents (NaCl + MgSO<sub>4</sub>) la perméabilité était très abaissée.



# Sur la surface remplie par des foyers de toutes les sections paraboliques d'un paraboloidé hyperbolique.

Par

Dr. VLADIMÍR MAŠEK.

Les sections paraboliques sur un paraboloidé hyperbolique sont déterminées par des plans parallèles avec son axe. Ces plans étant  $\infty^2$ , les foyers de toutes les sections paraboliques remplissent une certaine surface. Le système des plans parallèles avec l'axe du paraboloidé hyperbolique donné  $H$  coupe ce paraboloidé en paraboles égales  $p$ , dont les foyers remplissent une parabole  $\pi$ , qui se trouve dans le plan conjugué aux plans parallèles en question. La différence des paramètres des paraboles des sections faites par deux plans normaux conjugués dans son sommet est constante et égale  $a^2 - b^2$ , si  $a^2$  resp.  $b^2$  sont les paramètres des paraboles principales. *Ainsi, la surface étudiée se forme, si nous déplaçons toutes les paraboles qui courent par le sommet du paraboloidé donné, afin que ces foyer coïncident dans le point  $F$ , qui se trouve sur l'axe  $z$  du paraboloidé à la distance  $z_F = \frac{a^2 - b^2}{4}$  de son sommet.*

Selon  $a \geq b$  le point  $F$  se trouve au-dessus ou au-dessous du sommet  $O$  du paraboloidé. Si  $a = b$ , c'est à dire si le paraboloidé hyperbolique donné est équilatère, le point  $F$  coïncide avec le sommet  $O$  du paraboloidé.

Soit

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

l'équation du paraboloidé hyperbolique donné  $H$ . Puis l'équation de la surface considérée est

$$(1) \quad 4(x^2 b^2 - a^2 y^2)^2 - 4z a^2 b^2 (x^2 b^2 - a^2 y^2) - a^2 b^2 (y^2 a^4 + x^2 b^4) = 0.$$

Vu l'équation (1), notre surface est de 4<sup>ème</sup> ordre. Désignons la  $P^4$ . La surface  $P^4$  est symétrique aux plans  $(xz)$  et  $(yz)$ . Si nous introduisons des coordonnées homogènes, on voit que la surface  $P^4$  coupe le plan à l'infini



en deux droites doubles, qui sont données dans la direction des plans directeurs du paraboloidé H. Désignons les  $u\infty$  et  $v\infty$ . Il s'ensuit de la construction que deux paraboles de la surface se coupent dans chaque point de l'axe  $z$ . L'axe  $z$  est donc aussi la droite double de la surface. *La surface comprend en tout trois droites doubles qui se coupent dans un seul point, c'est à dire dans le point  $Z\infty$  de l'axe  $z$ . La surface cherchée est alors la surface de Steiner.*

Du nombre des points doubles des courbes plans résulte la qualité connue de la surface de Steiner, que le plan tangent la coupe en deux coniques. Les plans tangents de la surface  $P^4$  dans les points de la droite double  $z$  forment une involution, dont les plans doubles sont identiques avec les plans principaux du paraboloidé H. Les points cuspidaux sont alors identiques avec les sommets  $V$  et  $V'$  des paraboles principales du paraboloidé H. Les plans tangents de la surface dans les points  $V$  et  $V'$  forment deux faisceaux des plans dont les axes sont les tangents  $v$  et  $v'$  des paraboles dans les points  $V$  et  $V'$ . *Les faisceaux de plans avec les axes  $v$  et  $v'$  coupent alors la surface en coniques.*

De la qualité des paraboles confocales que les points de contact des tangents qui passent par le point situé sur l'axe se trouvent sur le cercle, résulte la qualité de la surface  $P^4$ : *La courbe  $k^4$ , d'après laquelle le cône ayant son sommet sur la droite double  $z$  touche la surface  $P^4$ , est située sur la sphère, qui a son centre dans le foyer commun  $F$  et passe par le sommet du cône. La courbe  $k^4$  est donc une courbe sphérique.*

La qualité connue de la surface de Steiner est, que l'cône touchant ayant son sommet sur la surface se divise en deux cônes 2<sup>ème</sup> degré. La courbe  $k^4$  est alors une courbe de 4<sup>ème</sup> ordre, car elle est l'intersection de la sphère avec le cône 2<sup>ème</sup> degré.

L'équation du cône touchant ayant son sommet dans le point  $M$  ( $0, 0, m$ ) de l'axe  $z$  est

$$(2) \quad 4m(x^2b^2 - a^2y^2) + a^2b^2(z - m)^2 + y^2a^4 + x^2b^4 = 0.$$

Si nous coupons ce cône par les plans  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , nous allons établir une qualité intéressante de la surface  $P^4$ , soit, que *les directions des plans directeurs du paraboloidé H, sont les directions des plans cycliques des cônes circonscrits à la surface des points de l'axe  $z$ . De la projection de la courbe  $k^4$  dans le plan ( $xz$ ) on voit facilement, que les projections orthogonales des courbes touchantes de l'axe  $z$ , sont des ellipses homothétiques par rapport à leurs centre commun  $V$  comme centre d'homothétie. De l'équation résulte encore la qualité que les directions des plans déterminant les droites doubles  $u\infty$  et  $v\infty$  sont aussi les directions des plans cycliques du cylindre projetant la courbe  $k^4$  verticalement dans le plan ( $xz$ ). Les courbes  $k^4$  se trouvent donc d'une part sur les sphères au centre commun  $F$ , de l'autre sur les cylindres homothétiques coaxiales, qui sont coupés par les plans  $\alpha$  et  $\beta$  passant par l'axe  $z$  et les droites  $u\infty$  et  $v\infty$ , dans les*



cercles concentriques au centre  $V$ . Parce que les cercles correspondants de ces surfaces dans le plan  $\alpha$  ou  $\beta$  se touchent dans le point  $M$ , le *faisceau des sphères est projectif avec le faisceau des cylindres homothétiques considérés*. Ainsi la surface  $P^4$  est remplie par des courbes d'intersection des surfaces correspondantes de ces faisceaux projectifs.

Un plan tangent coupe la surface  $P^4$  généralement en deux hyperboles se projetant dans le plan de projection  $\pi$  en hyperboles, qui passent par l'intersection  $O$  des axes coordonnés et ont pour asymptotes des droites parallèles avec les droites principales du parabolöide donné.

Si nous établissons le lieu géométrique des centres de toutes les coniques situées sur la surface  $P^4$ , nous obtiendrons l'équation

$$(3) \quad z = \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{8}.$$

De cette équation on peut tirer un résultat intéressant: *Le lieu géométrique des centres des toutes les coniques de la surface  $P^4$  est un parabolöide hyperbolique. Son sommet est situé au milieu de la distance entre le foyer  $F$  et le sommet  $O$ .*

Les projections horizontales des coniques passant par un point  $P$  de la surface  $P^4$  forment un faisceau d'hyperboles. Ces hyperboles passent par la projection  $P_1$  du point  $P$ , par le point  $O$  et par les points  $V'_\infty$  et  $U'_\infty$ , qui sont donnés par les directions des génératrices passant par  $O$  du parabolöide  $H$ . Les centres de ce faisceaux d'hyperboles se trouvent sur une droite; il s'ensuit que *les centres de toutes les coniques passant par un certain point de la surface  $P^4$  remplissent la parabole, dont le plan est parallèle avec l'axe  $z$ .*



# Silurien inférieur de la contrée entre Vinoř et Brandýs n. L.

Par

ALOIS MATĚJKA (Prague).

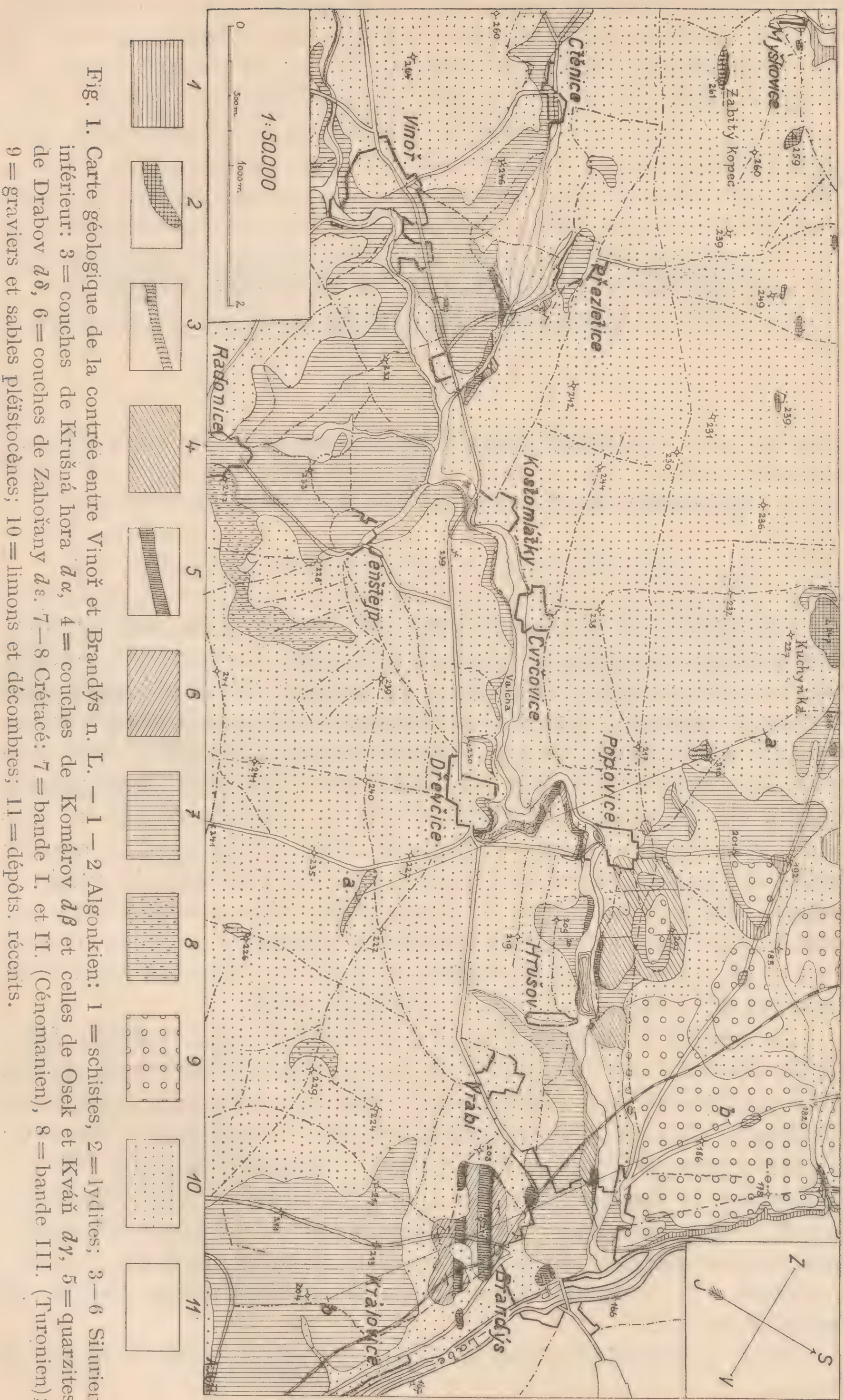
(Présenté dans la séance du 18 Novembre 1921.)

Les couches du Silurien inférieur qui, dans le flanc nord du Barandien, plongent, au Nord-Est de Prague, sous la couverture crétacée reparaissent, entre *Vinoř* et *Brandýs n. L.*, dans la vallée du ruisseau *Valcha* et dans son voisinage le plus proche. Elles sont visibles soit dans la vallée même qui a été creusée dans les couches crétacées jusqu'à la base silurienne, soit aux endroits où le sol formait, au temps de la transgression crétacée, des élévations qui n'avaient pas été recouvertes par les plus anciens sédiments de l'époque crétacée et où en conséquence, les couches siluriennes, après la dénudation partielle des terrains crétacés, surgirent au-dessus du plateau crétacé en forme d'îles. C'est pourquoi nous n'y trouvons nulle part de coupes naturelles, si favorables à l'étude, comme on en trouve ailleurs dans la Bohême centrale et la majorité des bandes siluriennes n'y affleure pas dans sa puissance totale.

*Les couches de Krušná Hora d $\alpha$*  qui affleurent sur le *Zabitý kopec* près de *Myškovice* et à l'Ouest de *Popovice* sont formées à leur base par des roches considérablement différentes de celles qui d'habitude constituent cette bande. Ce sont des conglomérats de base, ferrugineux, rouge-brun qui passent aux grès, puis ce sont des grès siliceux à gros grain, puis des conglomérats et des quartzites. Les termes supérieurs y sont formés par des grès rouges, ferrugineux, à mica blanc et par des schistes, roches identiques et probablement du même âge que celles qui, dans les environs de Prague, se trouvent dans la partie supérieure des couches de *Krušná hora*.

Nous ne connaissons pas le passage de ces couches à la bande suivante.







Quant aux *couches de Komárov d $\beta$*  il est à remarquer que les roches qui, dans les environs de Prague, constituent cette bande, c'est-à-dire les diabases à structure amygdaloïde, les tufs ainsi que les tufs à ciment ferrugineux avec gisements de minéral de fer, n'ont pas été constatés dans notre contrée. Là où devrait se trouver l'affleurement de ces couches nous ne trouvons que des *schistes vert-gris, argileux, à mica blanc*. On serait tenté de les considérer comme des schistes d'Osek et Kváň d' $\gamma$  car ils s'étendent jusque dans le mur des quartzites de Drabov. Mais il est impossible d'admettre cette façon de voir car cette série de schistes a une puissance plus que deux fois plus grande que la puissance habituelle des schistes d'Osek et Kváň. Une telle puissance des couches d'Osek et Kváň ne saurait être expliquée, même si l'on supposait un dédoublement de ces couches causé par une faille inverse. Il est donc évident que dans notre contrée *les couches de Komárov d $\beta$  ne sont pas développées dans leur faciès volcanique* mais en forme de ces schistes argileux, vert-gris. En faveur de cette explication, milite aussi le fait que, sur la rive droite de la Vltava au Sud-Ouest de Kobylisy, une partie des couches de Komárov est formée par des roches tout à fait identiques aux roches de la bande d' $\gamma$  se trouvant dans leur toit.

*Les couches d'Osek et Kváň d' $\gamma$*  sont formées par des roches absolument identiques à celles de la bande d' $\beta$ . Elles diffèrent de ces dernières, à la base de leur série, par la présence de *concrétions siliceuses* (nodules de Rokycany) et, dans le mur des quartzites de Drabov, par leur teinte noire. Elles affleurent dans le mur des quartzites de Drabov d' $\delta$  au Nord-Est de Vinoř, puis dans les environs de Popovice et enfin dans la vallée du ruisseau Valcha au Nord de la Pražská ulice à Brandýs n. L.; on y a trouvé dans les concrétions siliceuses les espèces suivantes: *Orthoceras sp.*, *Illaeus sp.*, *Calymmene Arago*, *Orthis moesta*.

*Les quartzites de Drabov d' $\delta$*  présentent un développement pareil à celui qu'ils ont dans les environs de Prague. Ce sont des quartzites à grain fin où des quartzites compacts de couleurs claires qui forment des bancs d'une épaisseur de 20—80 cm. La série de couches qui forme le passage de la bande d' $\delta$  à la bande d' $\varepsilon$  présente entre les bancs de quartzite de minces couches de schistes argileux dont l'épaisseur varie de 5 à 15 cm (dans les cas exceptionnels elles atteignent  $\frac{1}{2}$  m). Elles sont identiques à la couche inférieure des *couches de Zahořany d' $\varepsilon$*  formées de schistes noirs à mica blanc, très argileux, contenant, par places, des couches de grauwackes schisteux à division parallélépipédique.

Les quartzites de Drabov affleurent au Nord de Vinoř. Les couches de Zahořany affleurent en quelques endroits de la contrée située entre Podolánka et Popovice dans le mur des grès crétacés. Ces deux catégories de couches se repètent, au Sud de Popovice, en trois bandes successives. Il en est de même dans le voisinage le plus proche de Brandýs n. L.



La direction des couches siluriennes est E. N. E.-W. S. W., leur inclinaison en majeure partie S. E. Il y a quelques exceptions causées par des synclinaux et des anticlinaux (au Sud de *Popovice* et de *Brandýs*) qui ont été formés par les quartzites de Drabov puis aussi un anticlinal local au Sud de *Popovice* qui a été formé par les couches d'Osek et Kváň. La direction des schistes algonkiens est N. E.-S. W., leur inclinaison N. W. La discordance entre ces deux formations est évidente. La limite qui les

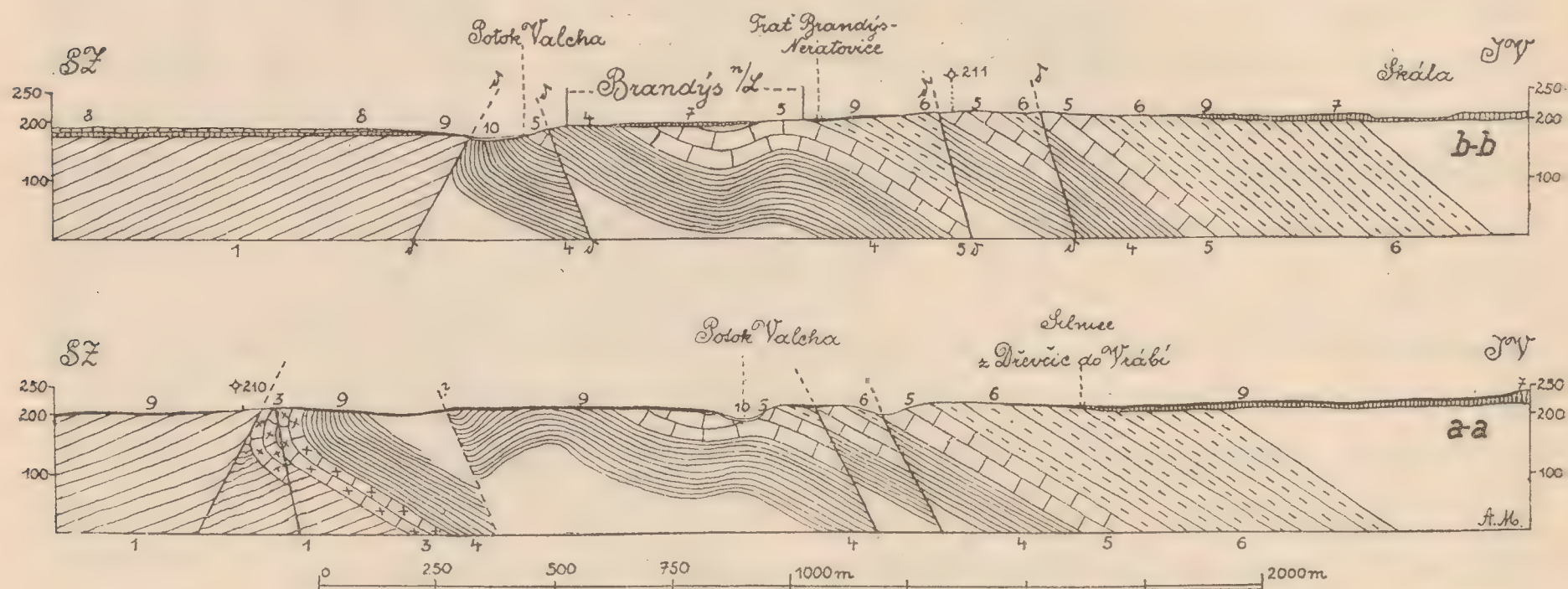


Fig. 2. Coupes du Silurien inférieur à l'Ouest de Brandýs n. L.— 1 = schistes algonkiens; 3 =  $d\alpha$ , 4 =  $d\beta + d\gamma$ , 5 =  $d\delta$ , 6 =  $d\varepsilon$ ; 7 = Crétacé; 8 = graviers et sables; 9 = limons; 10 dépôts récents.

sépare est de nature *tectonique*, causée par une *faille inverse*, dans le sens de laquelle le *massif algonkien*, se trouvant au Nord, a été *surélevé* sur le *massif silurien*, qui se trouve au Sud. Le plan de la dislocation plonge vers le Nord-Ouest sous un angle très accentué. En conséquence les couches de *Krušná hora* sont *renversées* sur le *Zabítý kopec* et près de *Popovice* et plongent dans le même sens sous un angle de  $70^\circ$ .

La direction de cette faille inverse n'est pas parallèle à la direction des couches siluriennes, de sorte, que vers l'Est, le long de la dislocation, les termes inférieurs du Silurien disparaissent successivement. Ainsi il arrive que près de Brandýs l'Algonkien touche aux schistes  $d\beta$  et à ceux d'Osek et Kváň.

Outre cette faille inverse on en trouve encore trois autres qui occasionnent près de *Popovice* et au Sud de Brandýs une *quadruple répétition* de la bande des quartzites de Drabov. Dans le sens de leur plan, les massifs sud ont été *surélevés* sur ceux du Nord. Les plans de dislocation plongent dans le même sens que les couches siluriennes, comme il arrive d'habitude dans le Barrandien. Outre ces dislocations il en existe de *transversales* de moindre importance et postérieures aux failles inverses. Elles sont surtout rendues visibles par le parcours des quartzites de Drabov.



# Aplite diabasique de Housina près de Zdice en Bohême.

(Avec une carte géologique et une figure dans le texte.)

Par

ODOLEN KODYM (Prague).

Résumé du texte tchèque.

Présenté le 22 avril 1921.

Dans le flanc sud du massif de collines formé par les terrains du Silurien supérieur et du Dévonien, affleure au sud de Beroun, sur la pente dite Housina, une roche que, pour son caractère lithologique, je désigne sous le nom d'aplite diabasique. Cet aplite diabasique forme dans les schistes de Králův Dvůr  $d\zeta_1$  du Silurien inférieur<sup>1)</sup> une bande bien visible



Fig. 1. Carte géologique montrant l'étendue de l'aplite diabasique. Parties noires = aplite diabasique. Hachure oblique = zone  $d s$  (couche de Zahořany) du Silurien inférieur (= Ordovicien). Hachure verticale = zone  $d \zeta$  (couches de Zdice) du Silurien inférieur. Annelé = graviers des terrasses. Pointillé = limon. Parties blanches = dépôts récents.

sur la carte géologique (fig. 1). Cette masse peut être désignée comme sill intrusif ou laccolithe type cédrique, car elle s'étend en concordance entre les schistes avoisinants et elle a causé un métamorphisme de contact des couches du toit. En outre toute cette masse est plissée avec les schistes

<sup>1)</sup> J'emploie la nouvelle désignation des couches du Barrandien. Voir R. Kettner et O. Kodým, Nová stratigrafie Barrandienu. Čas. Musea 1919.



avoisinants de sorte qu'elle affleure deux ou trois fois. J'évalue la puissance de ce filon à 30—50 *m*.

L'époque de l'intrusion ressort des conditions géologiques. L'aplite diabasique de Housina a pénétré dans les couches de Králův Dvůr *d*  $\zeta_1$  c'est-à-dire dans l'étage le plus récent du Silurien inférieur; le métamorphisme causé par lui dans son toit nous oblige à le considérer comme étant postérieur au Silurien inférieur. Comme il a été plissé en même temps que les couches avoisinantes, à l'époque varisque, nous sommes obligés de supposer qu'il a été mis en place avant le commencement de l'époque Carbonifère. Ainsi l'intrusion de l'aplite diabasique date sûrement, soit du Silurien supérieur, soit du Dévonien. C'est de cette époque que dans le Barrandien, proviennent les sills intrusifs et les nappes de diabase accompagnées de tufs, dont la formation date de l'époque où les couches de Liteň *e*  $\alpha$  c'est-à-dire leurs parties moyennes et supérieures se sont déposées. Il est très vraisemblable que l'aplite diabasique de Housina doit son origine au foyer magmatique des diabases qui se sont épanchées à l'époque du Silurien supérieur et qu'elle est un produit acide de différenciation du magma diabasique. Ce fait est prouvé par son caractère lithologique et sa composition chimique dont nous allons parler plus loin.

L'aplite diabasique est connue depuis assez longtemps et J. Krejčí,<sup>2)</sup> — J. Krejčí et K. Feistmantel,<sup>3)</sup> B. Katzer,<sup>4)</sup> J. Woldřich,<sup>5)</sup> A. Liebus<sup>6)</sup> et autres en font mention. Tous ces auteurs désignent cette roche comme étant une minette à laquelle notre roche ressemble un peu, du moins à l'oeil nu, par de nombreuses phénocrysts de biotite. Cependant le manque absolu d'orthose, les relations géologiques et l'origine du magma diabasique exigent un autre nom. Les auteurs mentionnés ne décrivent pas la roche ou la caractéristique qu'ils en donnent est incomplète ou incorrecte. Krejčí-Feistmantel et plus tard Katzer disent que la „minette“ de Housina est accompagné de tufs. Je prétends que c'est une erreur ainsi qu'il en ressort déjà du caractère indiscutablement intrusif de cette roche et je n'ai non plus trouvé nulle part du tuf de cette roche.

### Description de la roche.

La roche fraîche, non altérée, est grise légèrement olivâtre. Elle est toujours altérée à la surface et sa couleur se transforme en jaune; par une altération continue elle devient brun clair puis brun foncé. La couleur brune de la roche altérée est causée par la limonite qui se forme aux dépens

<sup>2)</sup> J. Krejčí: Geologie čili nauka o útvarech zemských. Praha 1877. p. 416, 470.

<sup>3)</sup> J. Krejčí-K. Feistmantel: Orographische u. tektonische Übersicht etc. Archiv pro přír. proz. Čech 1890, p. 55.

<sup>4)</sup> B. Katzer: Geologie von Böhmen, Prague 1892, p. 977—978.

<sup>5)</sup> J. N. Woldřich: Všeobecná geologie III. Praha 1905, p. 220.

<sup>6)</sup> Das Gebiet des Roten und Jalový-Baches um Komorau und das Schieferterrain von Lochowitz. Verhandlungen d. k. k. geolog. R. A. 1904.



de la biotite. — La texture de la roche est grainue. Comme densité de la roche on a trouvé par la méthode hydrostatique 2.55—2.65 (après la cuisson 2.68). — On peut constater que la roche a une tendance à se désagréger en boules comme les diabases. La structure de la roche est finement grainue, les grains en sont bien visibles à l'oeil nu. La loupe permet de distinguer des paillettes de biotite ainsi que des grains et des cristaux allongés de feldspath en notable prédominance sur les autres éléments. Quelques grains ou des cristaux allongés de feldspath sont, par places, de plus grandes dimensions que les autres éléments ce qui cause la texture porphyrique.

La loupe permet de distinguer dans les lames minces une grande quantité de lamelles longues et troubles du feldspath qui sont l'élément constitutif essentiel de la roche. Elles sont englobées par des paillettes de biotite et une masse grainue de feldspath. De nombreux cristaux allongés de feldspath disposés dans tous les sens rappellent la structure diabasique. Par la prédominance des feldspaths sur la biotite la roche devient évidemment leucocrate.

L'examen microscopique prouve que les éléments constitutifs essentiels sont les suivants: feldspaths, biotite, pseudomorphoses en chlorite et en calcaire. Les éléments accessoires sont le quartz, l'apatite et le minerai de fer.

La biotite est présente en forme des paillettes parfaitement idiomorphes, en partie, mais aussi allotriomorphes, à contours lobés. L'idiomorphie augmente en raison de la diminution des dimensions des grains. Les grandes paillettes de biotite ont subi par places, une corrosion intense.

Les paillettes de biotite renferment des inclusions de minerai de fer disposées en zones parallèles au basipinacoïde; ces inclusions sont parfois idiomorphes, parfois allotriomorphes. On y a trouvé aussi quelques grains de sphène et de petits cristaux allongés d'apatite.

La biotite sur ses bords se transforme en un minéral chloriteux à minuscules écailles, gris-vert à la lumière naturelle; sous le polarisateur il est extrêmement pléochroïque dans des teintes qui oscillent entre le gris-vert bleuâtre suivant la section parallèle avec le basipinacoïde et entre le jaune-vert et le vert-rouille suivant la section perpendiculaire au basipinacoïde.

On a pu distinguer dans les pseudomorphoses en chlorite de petits grains du sphène s'étant formés du Ti contenu dans la biotite.

La réfringence des pseudomorphoses de la biotite en chlorite est supérieure à 1.5830; cette valeur ainsi qu'une valeur moyenne de la biréfringence, égale à celle du quartz, nous font le déterminer comme clinohlore.

La pseudomorphose de la biotite en chlorite est aussi accompagnée par la formation de la limonite qui colore les éléments environnants de la roche.



L'altération de la roche est aussi accompagné dans l'intérieur des paillettes de la biotite, par la formation de lamettes d'un mica transparent présentant une forte biréfringence.

Les pseudomorphoses de la biotite en chlorite deviennent presque opaques par l'altération et en même temps leur pléochroïsme disparaît.

Les paillettes de la biotite peuvent atteindre une grandeur de 3 *mm* et même de 8-9 *mm* dans quelques parties de la roche où les éléments sont extrêmement gros; la grandeur moyenne est de 0.4 *mm* est elle peut s'abaisser jusqu'à 0.06 *mm*.

On peut aussi distinguer par places, outre les pseudomorphoses de la biotite en chlorite, des pseudomorphoses formées pour la plupart par du carbonate et de la chlorite. Leurs contours automorphes nous permettent de supposer que l'augite a été le minéral primitif de ces pseudomorphoses. Le carbonate de chaux prévaut dans quelques lames minces et la chlorite dans les autres. Les pseudomorphoses en chlorite et en carbonate de chaux peuvent même atteindre une grandeur de 1.2 *mm*; la grandeur moyenne peut être évalué à 0.4 *mm*.

Les feldspaths appartiennent à plusieurs générations qui diffèrent par le moment de leur formation, par leur apparence et par leur caractère chimique et physique.

Les grands cristaux de feldspath ont par places, dans les lames minces, la forme de lames larges presque isodimensionales, mais en général une forme allongée. Ces feldspaths sont aplatis selon (010) et leur orientation dans la roche est diverse; la grandeur des cristaux peut atteindre 5.5 *mm*, leur grandeur moyenne est de 1-2 *mm*. Les contours sont presque parfaitement idiomorphes ou hypidiomorphes. Ces phénocrysts sont composés de feldspaths de deux caractères différents: le centre allotriomorphe, toujours plus trouble que la périphérie plus pure, qui dans les lames minces est tout à fait pure. Les contours des centres prouvent que ceux-ci ont subi une corrosion intense avant que la périphérie à contours idiomorphe ait été développée ou au moment de sa formation. — La corrosion des centres a atteint par places une telle intensité qu'il n'en reste que des particules peu liées entre elles ou bien disjointes dans des lames minces, dont seule l'extinction simultanée nous prouve la provenance d'un même cristal. Dans les sections plus étroites les centres sont toujours maclés suivant la loi de Carlsbad; les macles polysynthétiques n'ont été constatés que très rarement. Les périphéries ne présentent de même que rarement et peu de macles polysynthétiques, dans ce cas les bandes y sont assez larges. Assez souvent on a pu constater que l'extinction n'était pas simultanée mais qu'elle s'étendait graduellement du centre vers les bords, rappelant ainsi l'extinction onduleuse. Une des particularités de notre roche consiste en ce que les centres des feldspaths sont plus acides que leurs périphéries. La réfringence des centres  $\geq 1.5403$ ; ceci, ainsi que le caractère positif des sections perpendiculaires à l'axe ou à la bisectrice aiguë, nous prouvent



que ce sont des oligoclases-albites. La périphérie est toujours négative, sa réfringence est supérieure à 1.5403 et inférieure à 1.5492 (plus proche de cette dernière valeur) de sorte que c'est un oligoclase plus basique. Dans toute la lame mince on peut se persuader par la méthode de Becke que la réfringence des centres est sensiblement inférieure à celle des périphéries. — L'aspect trouble des centres des grains de feldspaths est produit par la présence de lamettes de muscovite. Il est évident que la différenciation des centres s'est manifestée avant la corrosion ou simultanément à celle-ci et qu'elle n'est pas l'effet de l'altération de la roche déjà consolidée; ceci ressort du caractère des périphéries qui sont restées intactes quoique étant plus basique. Les centres des phénocrysts de feldspath englobent, outre des baguettes d'apatite, des pseudomorphoses de la biotite en chlorite. Ces pseudomorphoses sont allotriomorphes.

La masse fondamentale à grains fins dans laquelle sont noyés les cristaux allongés de feldspath est composée outre de petites paillettes (reliées par d'insensibles transitions à d'autres grandes), d'un peu de chlorite, d'éléments accessoires et surtout de deux espèces de feldspath. Ce sont pour la plupart des cristaux idiomorphes, tous purs d'anorthose et un plagioclase acide interstitiel et trouble au passage de la lumière. —

Les sections de l'anorthose, toujours pures, sont généralement de forme rectangulaire ou rhomboïdale atteignant une grandeur moyenne de 0.1 mm. Nous y trouvons même des grains 0.45 mm de grandeur. Elles se sont formées dans la roche en refroidissement en même temps que les périphéries des phénocrysts porphyriques de feldspaths. Les cristaux de l'anorthose ne présentent que très rarement des macles suivant la loi de Carlsbad; les macles polysynthétiques n'y ont jamais été constatés. La réfringence  $\geq 1.5313$ . Les sections perpendiculaires à l'axe et à la bissectrice aiguë présentent le caractère négatif.<sup>7)</sup>

On a isolé de la lame mince la partie riche en cristaux d'anorthose sans feldspaths porphyriques et éléments foncés pour l'analyser par la méthode de Bořický. On a trouvé une grande quantité de Na et un peu de K et Ca. Ce dernier élément ainsi qu'une partie de Na proviennent du plagioclase interstitiel, le reste de Na ainsi qu'une petite partie de K de l'anorthose.

Le feldspath interstitiel est un oligoclase acide; sa réfringence est supérieure à celle de l'anorthose et inférieure à celle des périphéries pures des grands phénocrysts de plagioclase. Il est toujours allotriomorphe et remplit (étant l'élément le plus récent de la masse fondamentale) les vides laissés par les autres éléments.

Parmi les éléments accessoires il faut citer le quartz qui en forme de petits grains allotriomorphes (grandeur moyenne 0.2, le plus 0.5 mm) remplit les derniers vides laissés par la roche en refroidissement.

<sup>7)</sup> C'est ce caractère indiscutablement constaté qui m'a fait désigner ce feldspath comme anorthose quoique sa réfringence soit un peu supérieure à la réfringence moyenne des anorthoses.



L'apatite en forme de minces baguettes, englobé par les autres éléments, atteint une grandeur moyenne de  $0.15\text{ mm}$ , parfois même aussi  $0.44\text{ mm}$ . C'est l'élément le plus antérieur de la roche.

Le minerai de fer — l'ilménite — s'y trouve en forme de grains idiomorphes, de baguettes à contours carrés, oblongs ou rhombiques et en partie en forme de grains allotriomorphes, lobés. La grandeur des grains oscille entre  $0.5\text{ mm}$  et  $0.015\text{ mm}$ , la grandeur moyenne étant de  $0.2\text{ mm}$ .

On a aussi trouvé dans quelques lames minces de grands grains de pyrite.

\* \* \*

A l'aide de l'oculaire de Hirschwald on a pu constater les proportions relatives des éléments minéralogiques de la roche suivantes: éléments foncés (biotite + pseudomorphoses) 27 %, le reste 73 %. Dans ces derniers il y a 11 % d'anorthose, 3.7 % de quartz (après la coloration au bleu de méthylène). Il en ressort que la roche est considérablement leucocrate.

Les éléments de la roche ont cristallisé pendant son refroidissement dans l'ordre suivant: après l'apatite et une partie de minerai de fer se formèrent la biotite, les centres des phenocrysts de feldspaths et le minéral transformé aujourd'hui en chlorite et en carbonate de chaux (diopside?). Mais alors les conditions physiques du magma en refroidissement ont été changées et eut lieu la corrosion des centres du feldspath. La transformation de la biotite déjà développée en chlorite eut lieu en même temps et fut vraisemblablement causée par l'action des gaz et des vapeurs renfermés dans le magma. Le reste de la formation de la biotite n'eut lieu qu'après. Pendant la cristallisation la masse feldspathique s'est différenciée. La partie basique cristalisa autour des centres corrodés en forme de périphéries idiomorphes de phenocrysts, la partie acide en anorthoses. L'oligoclase acide allotriomorphe et le quartz remplirent les dernières cavités laissées libres par les éléments de la roche.

Le caractère lithologique est uniforme dans toute la roche. Seules les parties proches du contact (des bords du filon) sont un peu plus acides, ce que prouve le quartz en plus grande quantité et de grains un peu plus fins. Les grands phenocrysts de feldspath surtout n'y atteignent pas les dimensions qu'ils ont au centre du filon.

\* \* \*

L'aplite diabasique de Housina a été analysé par M. J. Šplíchal. Je donne le résultat de l'analyse dans la colonne I.<sup>8)</sup> Dans la colonne II je donne la même analyse réduite à cent après élimination des éléments accessoires les moins importants ainsi que de  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{CO}_2$ . Dans la colonne III je donne les volumes moléculaires d'après la colonne II, réduites à cent.<sup>9)</sup> Dans la colonne IV je donne (devant servir à la comparaison) les

<sup>8)</sup>  $\text{FeO}$  n'a pas été déterminé à part.

<sup>9)</sup>  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  calculé pour  $\text{FeO}$ . De même dans la colonne IV.



mêmes volumes moléculaires de la minette près de Strašnice à l'Est de Prague, calculé d'après l'analyse de M. K. Preis.<sup>10)</sup> Cette minette ressemble parfaitement par les relations géologiques à l'aplite diabasique de Housina et je lui attribue la même valeur géologique.<sup>11)</sup>

	I.	II.	III.	IV.
SiO <sub>2</sub>	56.42	60.28	63.06	59.28
TiO <sub>2</sub>	0.83	0.89	0.70	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	11.72	12.51	7.70	6.12
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4.59	4.90	3.84*	7.35*
MnO	1.62	1.73	1.53	0.64
CaO	9.30	9.94	11.14	9.92
MgO	4.26	4.55	7.14	8.02
Na <sub>2</sub> O	3.86	4.13	4.18	3.22
K <sub>2</sub> O	1.00	1.07	0.71	5.45
S	0.37	100.00	100.00	100.00
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0.46			
CO <sub>2</sub>	2.68			
H <sub>2</sub> O jusqu'à 105°	0.39		*) Calculé pour FeO.	
H <sub>2</sub> O chim. lié	2.52			
Cl	0.09			
	100.11			

Cette analyse donne les valeurs d'Osann que je donne pour l'aplite diabasique de Housina dans la I<sup>ère</sup> colonne et pour la minette de Strašnice dans la II<sup>e</sup> colonne. Il a été impossible de calculer les valeurs *A*, *C*, *F* et *a*, *c*, *f* pour la minette de Strašnice, les alcalis y dominant sur l'alumine.

	I.	
s = Si + Ti	63.76	59.28
A = (KNa) <sub>2</sub> Al <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	9.78	—
C = CaAl <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	5.66	—
F = (MFeCa)O	20.82	—
SALF = (SiO <sub>2</sub> + TiO <sub>2</sub> ) : (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) : (RO)	20 : 2.5 : 7.5	19.5 : 2 : 8.5
AlCAlc = (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) : (CaO) : (Na <sub>2</sub> O + K <sub>2</sub> O)	10 : 14 : 6	7.5 : 12 : 10.5
m = (Mg) : (Ca + Mg)	4	4.5
n = Na : (K + Na)	8.5	3.8
a =	5.4	—
e =	3.1	—
f =	11.5	—

<sup>10)</sup> K. Preis, Über die Minette aus der Umgebung von Prag. Sitzb. d. k. b. Gesell. der Wissensch. in Prag 1871.

<sup>11)</sup> Voir: O. Kodym, Zpráva o geologickém mapování na listu Praha mezi Prahou, Modřany a Kunraticemi. Sborník Stát. geolog. úst. Č. S. R. 1920.



En comparant les deux analyses on voit qu'il existe une grande ressemblance entre ces deux roches. Dans les deux le calcium prédomine de beaucoup sur les alcalis et sur l'alumine, en outre elles sont riches en magnésie, pauvres en alumine et contiennent, assez d'alcalis. Les différences entre ces deux roches résident d'abord dans la plus grande basicité de la minette, dans les proportions diverses de *K* et *Na* des deux roches et encore dans la plus haute teneur en Fe de la minette.

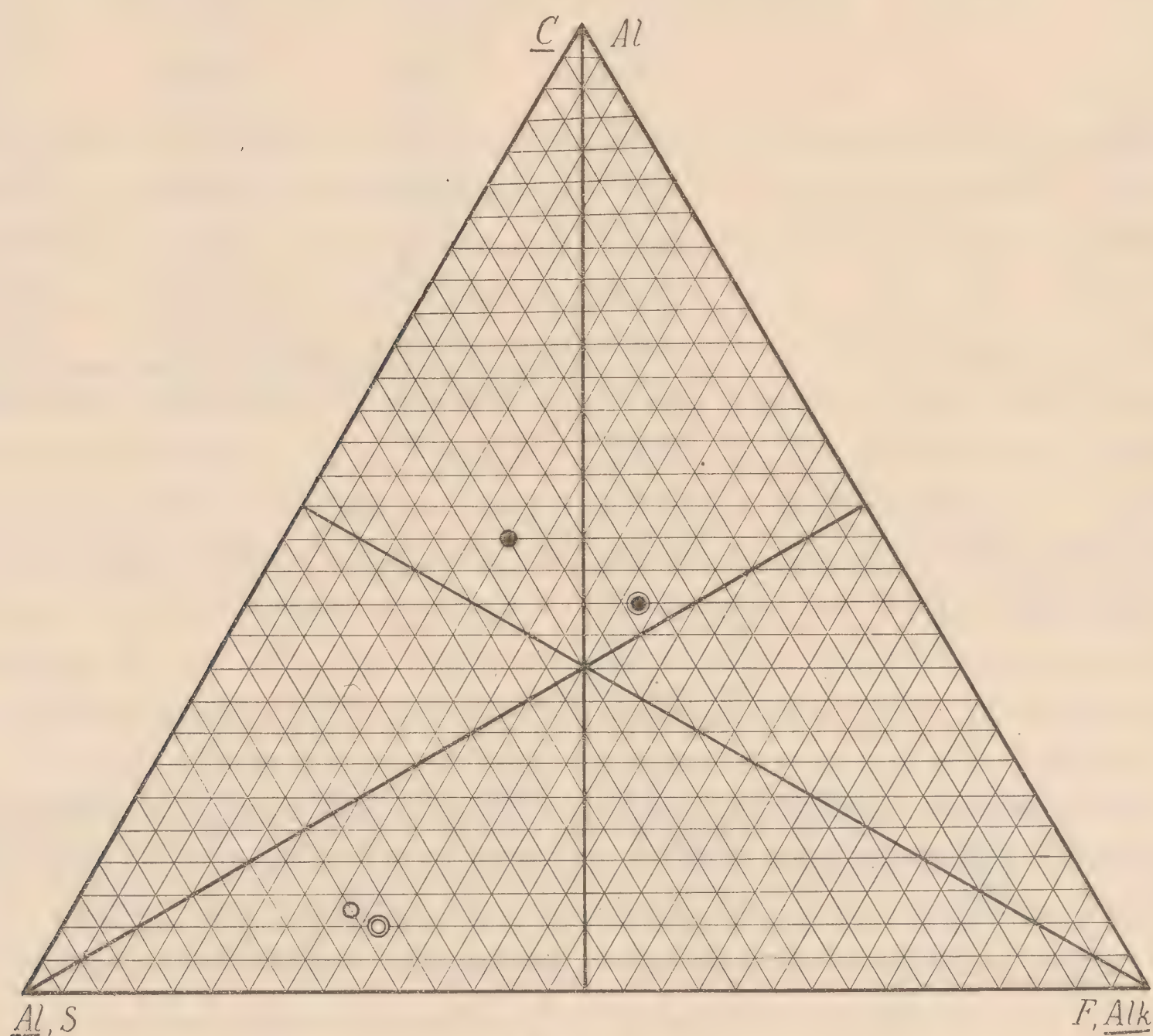


Fig. 2.

L'analyse de l'aplite diabasique de Housina est remarquable par des valeurs extrêmement hautes pour  $\text{CO}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$ , qui permettent d'admettre, que l'échantillon analysé contenait beaucoup de pseudomorphoses en calcaire et en chlorite ce qui expliquerait la grande teneur en  $\text{CO}_2$  et en  $\text{H}_2\text{O}$ . Le calcium du  $\text{CO}_2$  n'a cependant pas été déduit de l'analyse parce qu'on peut prétendre, avec certitude, que le calcium provient d'un minéral primitif de la roche, métamorphisé plus tard, et non de l'infiltration par le calcaire des roches environantes.

L'analyse prouve aussi que la roche est relativement très acide et que Na prédomine notablement sur le *K*. Les valeurs d'Osann résultant du calcul de la IIème colonne sont très intéressantes et elles ont motivé le choix du nom d'aplite diabasique au lieu de l'ancienne dénomination de „minette“, car le *s* ( $= 63.76$ ) de notre roche a relativement aux minettes une beaucoup plus grande valeur [*s* des minettes oscille entre 53



et 59<sup>12)</sup>]. En outre les minettes sont souvent plus riches en éléments bivalants que ne l'est notre roche et quant aux alcalis le kalium y prédomine sur le natrium ou bien le natrium ne domine que très peu sur le kalium.

Les valeurs d'Osann *SAIF*, *AlCAlc* témoignent aussi d'un caractère spécial de notre aplite relativement aux lamprophyres et leur donne une place toute spéciale. Les valeurs *AlCAlc* = 16, 14, 6 y étant remarquables puisque le calcium y prédomine de beaucoup. Les roches où le calcium est si prédominant sont presque toujours très basiques et phéniques. Le même fait ressort de la planche V de l'ouvrage d'Osann<sup>13)</sup> qui démontre la relation mutuelle des valeurs *SAIF* et *AlCAlc*. Dans le triangle *AlCAlc* le point de projection de notre roche appartient à l'endroit où se trouvent les roches dont les valeurs *SAIF* = 15.5, 2.5, 12.

Si nous transportons les valeurs de la roche de Housina dans le triangle *SAIF* d'Osann (voir fig. 2) son point de projection sera près de la limite inférieure du champ de projection dans le voisinage des roches typiques alcalines. De même sur le champ de projection du triangle *AlCAlc* le point d'aplite diabasique de Housina se trouvera dans la partie où se trouvent les roches absolument alcalines, c'est-à-dire là où se trouvent les basaltes leucitiques. D'accord avec les valeurs des projections d'Osann la teneur en anorthose constatée dans la roche fait aussi classer l'aplite de Housina parmi les roches alcalines même au point de vue minéralogique. De sorte qu'est fondée l'opinion, qui s'appuie aussi sur la position géologique de la roche, prouvant que l'aplite diabasique de Housina est en parenté génétique avec le magma du diabase dont il est un acide et un alcalin produit de différenciation. Voilà pourquoi j'en conclus que la dénomination d'aplite diabasique, quoique non habituelle, est la mieux appropriée, parce qu'elle exprime en même temps avec le caractère minéralogique de la roche, sa texture, son caractère alcalin et sa parenté génétique avec les diabases.

En fin je rends attentif à ce fait que la cornéenne du contact d'aplite de Housina ainsi que les schistes argileux non métamorphique ont été analysés et étudiés par M. V. Veselý et je renvoie le lecteur à son ouvrage.<sup>14)</sup>

*Institut minéralogique de  
l'Université Charles à Prague.*

<sup>12)</sup> Voir: A. Osann: Versuch einer chem. Classification der Eruptivgesteine. III. Tscherm. Min. u. petr. Mit. XXI. 1902.

<sup>13)</sup> Petrochemische Untersuchungen I. 1913, p. 112—114, Abhandlungen der Heidelberger Ak. d. Wissensch. 2.

<sup>14)</sup> V. Veselý, O kontaktech diabasu se sedimenty středočeského siluru. Čas. Musea 1921. Praha.



# Note cristallographique sur l'amphibole de Shimasaki au Japon.

Par

MART. J. MAREK à Příbram.

(Avec une gravure dans le texte.)

Présenté le 24 juin 1921.

La collection minéralogique de l'école des hautes études des mines à Příbram a été enrichie au mois de mars 1921 par un échantillon de tridymite japonais avec l'étiquette originale: *Tridymite, Higo Hotakugori, Shimasaki mura*. La tridymite, représentée par des cristaux imparfaits, des plaques très minces, incolores ou blanches, mais très brillantes, est assise dans un creux presque plan de dimension  $7 \times 5$  *cm* d'andesite grise claire. Jimbo<sup>1)</sup> signale la tridymite dans l'andesite de Shimazaki à l'ouest de la ville de Kumamoto en Higo; Wada<sup>2)</sup> signale aussi les macles de la tridymite, jusqu'à 15 *mm* de longueur et 0.5 *mm* d'épaisseur dans l'andesite grise de Ishigamiyama près de Kumamoto. Sur l'échantillon possédé par la collection de l'école des hautes études des mines à Příbram se trouvent de petits cristaux très brillants d'amphibole, dont j'ai mesuré le plus grand au moyen d'un goniomètre à deux cercles en ajoutant plus loin des résultats obtenus.

Les petits cristaux d'amphibole sont prismatiques et généralement 1 *mm* longs, le plus souvent leur grandeur n'atteint pas 1 *mm*. Ces cristaux, comme c'est déjà dit, sont assis sur des cristaux imparfaits de tridymite. Ils sont d'une couleur rose foncé qui dans quelquesuns est presque noir, dans d'autres au contraire la couleur est plus claire, quelque fois comme celle de la colophane. En général, la coloration des cristaux n'est pas la même; les parties plus claires sont très transparentes. L'éclat intensif des faces est frappant. Les faces de la zone verticale ont assez souvent la couleur de métaux, généralement la bleue.

---

<sup>1)</sup> K. Jimbo, Journ. Sc. Coll. Univ. Tokio, 1899, 11, 230.

<sup>2)</sup> Wada, Beitr. Min. Jap. 1905, No. 1. 17.



Le plus grand cristal d'amphibole ayant 1.6 mm de longueur qui a été mesurée est terminé seulement à un bout de son axe vertical.

Pour le calcul j'ai pris les éléments de A. Nordenskiöld<sup>3)</sup> acceptés aussi par Goldschmidt dans „Winkeltabellen“:

$$a : b : c = 0.5482 : 1 : 0.2937,$$

$$\beta = 75^{\circ} 02'.$$

La figure ajoutée représente la projection horizontale partiellement idéalisée, mais le nombre des faces et leur grandeur répondent approximativement à la réalité. Le plan normal à la zone verticale a été choisi comme le plan horizontal de la projection.

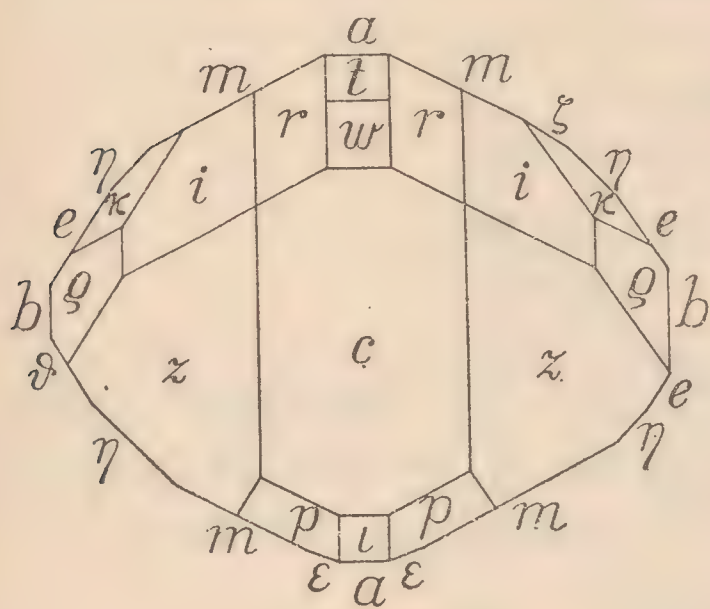


Fig. 1.

Dans le cristal, dont quelques faces, par exemple  $c$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $*\eta$ ,  $z$ ,  $r$ ,  $i$ ,  $*\kappa$ , reflétaient le signal si bien qu'on a pu employer l'agrandissement maximal et on a constaté les 18 formes suivantes:

$c = 0 (001)$ ,  $b = 0 \infty (010)$ ,  $a = \infty 0 (100)$ ,  $*\varepsilon = \frac{6}{5} \infty (650)$ ,  $m = \infty (110)$ ,  $*\xi = \infty \frac{6}{5} (560)$ ,  $*\eta = \infty 2 (120)$ ,  $e = \infty 3 (130)$ ,  $*\vartheta = \infty \frac{7}{2} (270)$ ,  $z = 02 (021)$ ,  $*\iota = + \frac{1}{2} 0 (102)$ ,  $w = - 10 (\bar{1}01)$ ,  $t = - 20 (\bar{2}01)$ ,  $p = + \frac{1}{2} (112)$ ,  $r = - 11 (\bar{1}11)$ ,  $i = - 13 (\bar{1}31)$ ,  $q = - 15 (\bar{1}51)$ ,  $*\kappa = - 26 (\bar{2}61)$ .

Les formes nouvelles sont marquées d'un \* astérisque.

La zone verticale a 19 faces. Les quatres prismes sont nouveaux. Le nouveau prisme  $*\varepsilon = \frac{6}{5} \infty (650)$  est représenté par deux faces étroites et assez brillantes. La position de (650) est garantie par l'angle  $\varphi$ :

	$\varphi$	
	mesuré:	calculé:
$\varepsilon (650)$	$66^{\circ} 12'$	$66^{\circ} 11'$
	$66^{\circ} 20'$	

C' est une forme sûre, mais très rare.

Le prisme  $*\eta = \infty 2 (120)$  était développé par toutes les quatres faces et deux faces reflètent le signal très bien.

	$\varphi$
	mesuré:
$\eta (120)$	$43^{\circ} 25'$
	$43^{\circ} 48'$
	$43^{\circ} 36'$
	$43^{\circ} 14'$

mesuré:  $43^{\circ} 30'$ , calculé  $43^{\circ} 21'$

C'est une forme parfaitement sûre.

<sup>3)</sup> Beskr. Finl. Min., Helsingf. 1855, 56.



Les deux prismes  $*\xi = \infty \frac{6}{5}$  (560) et  $*\vartheta = \infty \frac{7}{2}$  (270) étaient développés chacun seulement par une face. Les angles mesurés et les valeurs calculées coïncident bien. Ces nouvelles formes sont très rares et incertaines.

	$\varphi$	
	mesuré:	calculé:
$\xi$ (560)	$57^{\circ} 12'$	$57^{\circ} 34'$
$\vartheta$ (270)	$28^{\circ} 46'$	$28^{\circ} 21'$

Le nouveau orthodoma négatif  $*\iota = + \frac{1}{2} 0$  (102) est représenté seulement par une face très petite, mais bien limitée. Il est par la position déterminé dans deux zones développées sur le cristal par des faces:

$$[100 : 102 : 001 : \bar{1}01 : \bar{2}01 : \bar{1}00]$$

et  $[010 : 112 : 102 : 1\bar{1}2 : 0\bar{1}0]$ , et avec l'angle  $\varrho$

	$\varrho$	
	mesuré:	calculé:
$\iota$ (102)	$28^{\circ} 30'$	$28^{\circ} 34\frac{1}{2}'$

Quoique la présence de cette forme ne soit prouvée que par une face, je l'ai pour une forme certaine, parce que l'angle mesuré et la valeur calculée coïncident. Le symbole de cette forme est très simple et la forme correspond bien avec les zones très importantes d'amphibole.

La nouvelle pyramide positive  $*\kappa = - 26$  ( $\bar{2}61$ ) est représentée par toutes les deux faces très bien développées et brillantes. Cette pyramide est placée à la percée des quatre zones développées sur le cristal par des faces:

$$[\bar{1}30 : \bar{2}61 : \bar{1}31 : 001 : 1\bar{3}0],$$

$$[010 : \bar{2}61 : \bar{2}01 : \bar{2}\bar{6}1 : 0\bar{1}0],$$

$$[\bar{1}10 : \bar{2}61 : \bar{1}51 : 110]$$

et  $[\bar{1}20 : \bar{2}61 : 021 : 1\bar{2}0]$ .

Cette pyramide est parfaitement sûre, mais rare.

	$\varphi$		$\varrho$	
	mesuré:	calculé:	mesuré:	calculé:
( $\bar{2}61$ )	$25^{\circ} 30'$	$25^{\circ} 32'$	$63^{\circ} 7'$	$62^{\circ} 53'$
( $\bar{2}\bar{6}1$ )	$25^{\circ} 19'$		$63^{\circ} 4'$	



Tableau des mesures :

No.	Sign	Gdt	Miller	$\varphi$		$\varrho$		Nombre des faces
				mesuré	calculé	mesuré	calculé	
1	$c$	0	001	90° 00	90° 00	15° 05'	14° 58	1
2	$b$	0∞	010	0 00	0 00	90 00	90 00	2
3	$a$	∞ 0	100	90 00	90 00	90 00	90 00	2
4	$*\varepsilon$	$\frac{6}{5}\infty$	650	66 16	66 11	90 00	90 00	2
5	$m$	∞	110	62 07	62 05	90 00	90 00	4
6	$*\zeta$	$\infty \frac{6}{5}$	560	57 12	57 34	90 00	90 00	1
7	$*\eta$	∞ 2	120	43 30	43 21	90 00	90 00	4
8	$e$	∞ 3	130	32 36	32 11	90 00	90 00	3
9	$*\vartheta$	$\infty \frac{7}{2}$	270	28 46	28 21	90 00	90 00	1
10	$z$	02	021	24 29	24 28	32 48	32 50	2
11	$*l$	$+\frac{1}{2}0$	102	90 00	90 00	28 30	28 34	1
12	$w$	— 10	$\bar{1}01$	90 00	$\bar{9}0$ 00	16 05	16 01	1
13	$t$	— 20	$\bar{2}01$	90 00	$\bar{9}0$ 00	40 04	40 05	1
14	$p$	$+\frac{1}{2}$	112	74 35	74 54	29 28	29 25	2
15	$r$	— 11	$\bar{1}11$	$\bar{4}4$ 28	$\bar{4}4$ 21	22 18	22 20	2
16	$i$	— 13	$\bar{1}31$	$\bar{1}8$ 13	$\bar{1}8$ 03	42 48	42 49	2
17	$q$	— 15	$\bar{1}51$	$\bar{1}1$ 07	$\bar{1}1$ 04	56 20	56 14	2
18	$*x$	— 26	$\bar{2}61$	$\bar{2}5$ 30	$\bar{2}5$ 32	63 07	62 53	2

Tableau des valeurs calculées.

$a : b : c = 0.5482 : 1 : 0.2937$

$\beta = 75^{\circ}02'$

No.	Sign.	Gdt	Miller	$\varphi$	$\varrho$	$\xi_0$	$\eta_0$	$\xi$	$\eta$	$x'$ Les prismes ( $x', y'$ )	$y'$	$d'$ $=tg\varrho$
1	$\varepsilon$	$\frac{6}{5}\infty$	650	66° 11'	90° 00'	90° 00'	90° 00'	66° 11'	23° 49'	2.2655	∞	∞
2	$\zeta$	$\infty \frac{6}{5}$	560	57 34	90 00	90 00	90 00	57 34	32 26	1.5737	∞	∞
3	$\eta$	∞ 2	120	43 21	90 00	90 00	90 00	43 21	46 39	0.9440	∞	∞
4	$\vartheta$	$\infty \frac{7}{2}$	270	28 21	90 00	90 00	90 00	28 21	61 39	0.5396	∞	∞
5	$l$	$+\frac{1}{2}0$	102	90 00	28 34	28 34	0 00	28 34	0 00	0.5447	0	0.5447
6	$x$	— 26	$\bar{2}61$	$\bar{2}5$ 32	62 53	$\bar{4}0$ 05	60 25	22 33	53 26	$\bar{0}.8417$	1.7620	1.9528



# Vrilles bractéaires de l'Antigonum et de la Brunichia (Polygonacées).

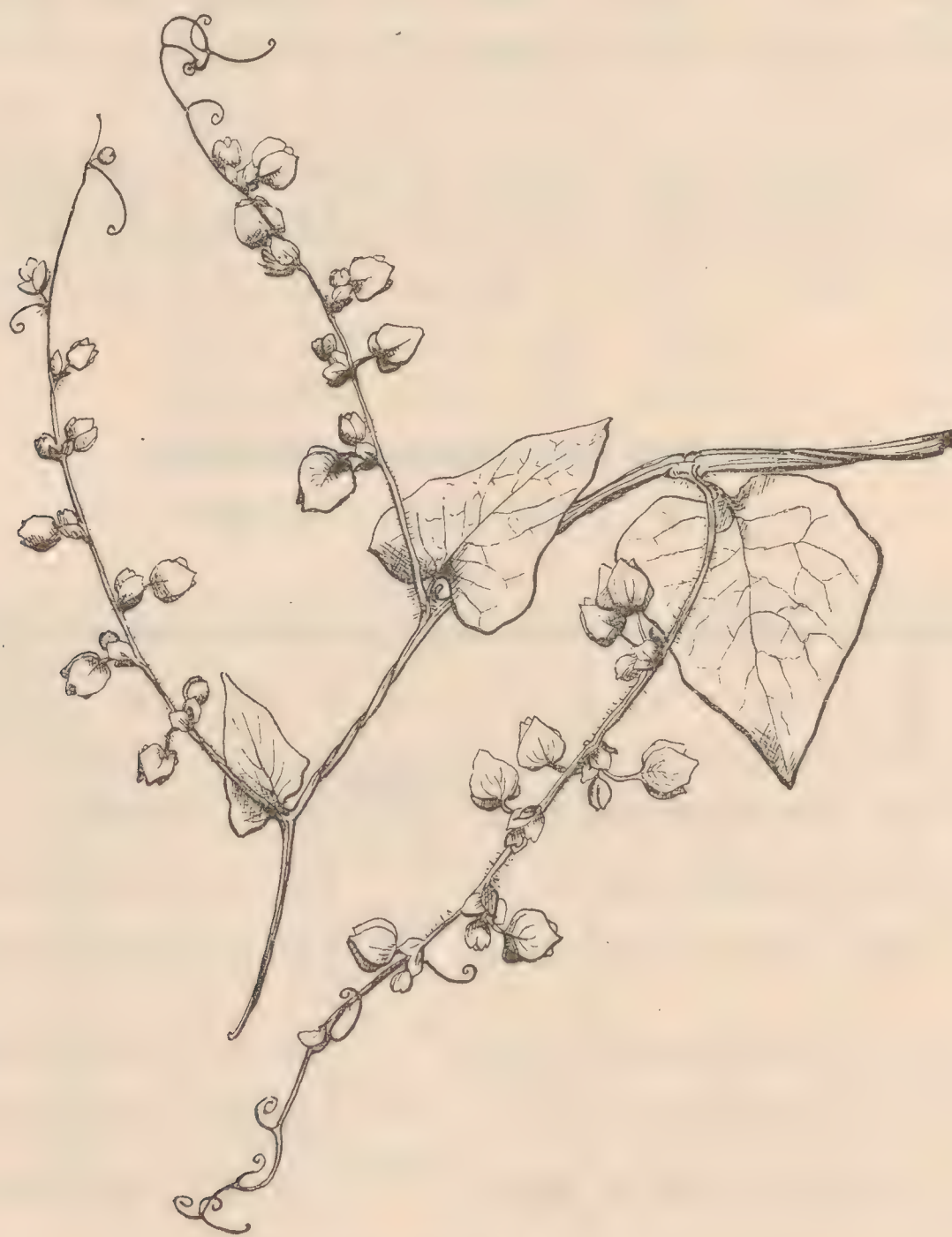
Par

Dr. FRANTIŠEK SCHUSTLER.

(Avec une figure dans le texte.)

(Présenté le 26 Mai 1922.)

Chez quelques Polygonacées tropiques grimpantes, j'ai observé une formation de vrilles très intéressante. L'*Antigonum cordatum* Mart. et Gal., l'*A. leptopus* Hook et Arn. et la *Brunichia cirrhosa* Banks possèdent



*Antigonum cordatum* Mart. et Gal.

Voir la transformation graduelle des bractées en „ramilles“ en tortillées. Les petites écailles aux bases des fleurs sont les „prophylla“.



des inflorescences, dont la partie terminale se charge de la fonction de s'en tortiller perd la capacité de produire des fleurs. Les fleurs des extrémités de tels rameaux naissent à l'aiselle des bractées qui vers le haut se prolongent et deviennent spiralées; à l'extrémité stérile du rameau-vrille on trouve des bractées en forme des „ramilles“ en tortillées (sans fleurs à l'aiselle). La vrille est donc représentée par l'extrémité simple et en tortillée d'un rameau de l'inflorescence, tandis que les ramilles y sont formées par des bractées stériles (partie pétiolaire).

Chez la *Brunichia africana*, je n'ai observé que des vrilles du type tige, sans relations avec les inflorescences et, par suite, sans „ramilles“-bractées.







# Le mésonéphros des embryons des mammifères a-t-il une fonction excrétoire?

Par le

prof. Dr. Z. FRANKENBERGER, Ljubljana.

Avec une planche.

Travail de l'institut d'histologie et d'embryologie à l'université Charles  
à Prague. Chef: Prof. Dr. O. S r d í n k o.

La question posée dans le titre de ce travail a été peu examinée jusqu'à présent, quoique le nombre des travaux morphologiques sur le mésonéphros soit très grand. Quelques remarques sur cette chose que nous trouvons dans la littérature ont à peine la valeur d'une notion réellement scientifique, car elles sont basées non sur des faits exactement établis, event. sur des preuves expérimentales, mais plutôt sur des considérations théoriques, sortant de l'apparence morphologique des épithéliums mésonéphriques et du rapport entre le mésonéphros et le métanéphros. Il est surtout plus frappant comme nous avons déjà une quantité de travaux sur l'examen microscopique de la fonction du rein, fait seulement chez les organismes adultes; je renvoie en ce rapport à la révision détaillée du dernier temps chez Arnold ou chez Turchini, auxquels nous reviendrons plusieurs fois dans nos considérations suivantes.

Il faut dire en résumé que l'opinion des auteurs qui ont jusqu'ici touché cette question est quant à la réponse affirmative bien infavorable. Ainsi parvient Weber dans son travail sortant de la comparaison du temps de la régression du mésonéphros et du développement des premiers corpuscules de Malpighi du métanéphros à la conclusion que le mésonéphros des embryons des mammifères ne parvient pas à la fonction sécrétrice. Chez l'homme, le cobaye, la taupe et la souris les modifications régressives se manifestent avant que le rein se développe suffisamment; c'est pourquoi une sécrétion paraît impossible. Chez le porc la sécrétion serait certainement acceptable, car ici un mésonéphros bien développé



persiste assez longtemps (puisque les changements régressifs apparaissent depuis le stade d'environ 5 *cm* de longueur) pour que le métonéphros puisse reprendre sa fonction. „Ob man aber, nachdem die Verhältnisse bei allen anderen bis dahin untersuchten Säugern durchaus gegen eine Funktion der Urniere sprechen, ohne positive Beweise beim Schwein eine solche wird annehmen dürfen, das ist eine Frage, welche ich glaube mit Nein beantworten zu müssen.“

Cette opinion est acceptée aussi par Felix et Broman, dont le premier mentionne comme un argument contre la fonction sécrétrice du mésonéphros aussi la circonstance que le mésonéphros des mammifères ne se compose que d'une rangée de canalicules, tandis que tous les mésonéphros fonctionnants incontestablement, ont les canalicules en plusieurs couches, les unes sur les autres. Ces auteurs attribuent la sécrétion de l'urée qui a réellement lieu chez le fœtus aux processus de diffusion dans les vaisseaux ombilicaux.

Chez plus anciens auteurs il n'y avait naturellement point de doutes que le mésonéphros ne fonctionnât comme un organe excréteur. Mihal-kovics, Nagel, Janošík, quoiqu'ils ne se soient pas occupés en détail de cette question, admettent une telle fonction comme évidente. Selenka a trouvé la fonction excrétoire du mésonéphros même dans la vie extrautérine chez les Marsupiaux qui sont nés dans un état très imparfait. Kalla y juge de même que le mésonéphros fonctionne et il met en rapport avec le commencement de la fonction l'ouverture des canaux de Wolff dans la cloaque et le développement énorme de l'allantois (chez les embryons du porc).

C'est Mlle. Bakounine qui a tenté d'établir une épreuve directe de l'aptitude sécrétoire du mésonéphros. Elle a injecté aux embryons de poulets dès le 5<sup>ème</sup> jour d'incubation une solution de l'indigcarmin dans la circulation sanguine et elle a constaté que le principe colorant passe dans la lumière des canalicules du mésonéphros. Elle en conclut que l'aptitude d'une sécrétion est peut-être moindre dans les épithéliums de corps de Wolff que dans les propres épithéliums du rein, mais elle existe sans doute dès le commencement du développement de l'embryon. Il est étonnant que cette découverte si importante de Bakounine ait excité si peu d'attention.

Ce manque de clarté et ces doutes m'ont engagé à essayer une constatation précise, expérimentale, si le mésonéphros des embryons des mammifères fonctionne comme un organe excréteur ou non. Il me semblait déjà a priori invraisemblable qu'un organe si volumineux, bien développé comme p. ex. le mésonéphros des embryons du porc n'eût aucune fonction spécifique. Dans ce but j'ai choisi les méthodes qui nous ont jusqu'à présent donné des résultats si précieux dans l'investigation des procédés excrétoires dans le rein: l'injection vitale des colorants. Après des ex-



périences avec quelques autres couleurs je me suis enfin borné seulement au bleu de méthylène.

Voici le procédé de mon travail. On retira l'embryon, évidemment encore complètement vivant, d'un utérus pris d'une pleine coche par une petite ouverture. On injecte dans la veine du cordon ombilical à l'aide d'une seringue, tout lentement, par une toute petite pression 0.5—0.7 *ccm* environ d'une solution d'1% de bleu de méthylène dans le sérum physiologique. Une coloration bleue totale de l'embryon s'est manifesté rapidement. L'embryon fut ensuite remplacé avec son sac d'amnios intact dans l'utérus, qui conserve bien longtemps la température. Après peu de temps — disons après quelques minutes — l'embryon fut repris de l'utérus; on constata d'abord si l'embryon vivait encore, ce qu'on peut considérer pour sûr selon la pulsation conservée du cœur. Tous les deux mésonéphros furent préparés rapidement et fixés dans le liquide de Turchini (acide picrique, sol. aqueuse sat. 60 *ccm*, formol de commerce 20 *ccm*, molybdate d'ammoniaque, sol. aq. sat. 20 *ccm*). Cette solution-ci m'a fourni de meilleurs résultats que le liquide de même auteur consistant de 200 *ccm* de solution aqueuse saturée d'acide picrique et 25 *ccm* d'acide osmique à 2%. Après quelques heures les mésonéphros furent lavés dans de l'eau et on les fait passer vite par plusieurs bains d'alcool de concentration montante, puis ils furent inclus dans la paraffine à l'aide de benzole. Les coupes de 3—10  $\mu$  d'épaisseur furent montées ensuite ou sans aucune coloration, ou après une coloration par la safranine ou par la vésuvine. Outre ce procédé j'ai fixé les mésonéphros sans injection dans le liquide de Zenker pour des buts cytologiques et pour l'investigation des éléments du chondriome dans les liquides de Regaud et de Benda.

Il serait inutile de m'occuper dans ce travail plus à fond de la morphologie des canalicules du mésonéphros, c'est pourquoi je renvoie pour l'orientation à la description que l'on trouve dans le manuel de Hertwig par Felix. On sait que le canalicule se compose après son considérable accroissement en longueur et le pliage multiple consécutif de trois parties. Plus tard la première et la deuxième parties deviennent bien larges et forment ainsi le tubulus secretorius, tandis que la troisième partie du canalicule primaire du mésonéphros reste étroite et nous représente le tubulus collectivus. Comme on verra dans la suite, ces noms répondent complètement à la signification fonctionnelle des parties particulières.

Le tubulus secretorius est formé par un épithélium simple, consistant de cellules cylindriques, parfois plus hautes, parfois plus basses; dans quelques parties les cellules prennent presque une forme cuboïde. Leur noyau est rond ou ovalaire, clair, il renferme généralement un nucléole assez grand, quelques caryosomes d'une grandeur peu considérable et un réseau de linine. Ça et là on trouve aussi des noyaux plus petits, plus allongés, plus chromatiques, dont la chromatine est développée en forme



de nombreux petits granules de sorte que le noyau entier paraît plus sombre. Le protoplasma de ces cellules est clair, il montre une distincte structure filaire, surtout dans la partie basale, où les fibres protoplasmiques sont orientées perpendiculairement vers la base. Après la fixation par une des méthodes spécifiques pour le chondriome et la coloration par l'hématoxyline de fer, on trouve dans le protoplasma un chondriome abondant. A la base des cellules ce sont des chondriocontes épais, courts ou plus longs, qui rappellent les bâtonnets de Heidenhain dans la forme que nous connaissons du rein des grenouilles. Dans quelques cellules il n'y a que cette forme du chondriome, au dessus du noyau il n'y a aucun élément coloré dans le plasma (fig. 1), ou tout au plus des grains mitochondriaux isolés. Autrement la cellule entière est remplie d'éléments du chondriome; au dessous du noyau nous trouvons les bâtonnets que nous venons de décrire et des grains, audessus du noyau surtout des grains mitochondriaux (fig. 2). Si l'on différencie un temps plus court dans l'alun de fer, toute la cellule reste colorée en noire, ce n'est que le noyau qui se décolore plus tôt. La couche supérieure du protoplasma ne contient jamais du chondriome, elle paraît toujours complètement claire ou homogènement grisâtre.

Sur les préparations des mésonéphros injectés on trouve — sans aucune coloration complémentaire — les noyaux complètement incolores, visibles seulement par leur réfringence plus forte (fig. 9). L'épithélium des canalicules est formé de nouveau par ces cellules cylindriques ou cuboïdes, dont les limites sont très indistinctes là, où il n'y a aucune coloration bleue. Dans le protoplasma la structure fibrillaire est de nouveau bien visible, surtout dans la partie basale. Si on colore les préparations par la safranine, le protoplasma est coloré en rouge pâle ou en rose, et la structure fibrillaire des parties basales est de même bien visible. Ça et là les marques de la bordure en brosse sont conservées. Les noyaux sont de nouveau de ce double type que nous avons déjà reconnus sur les préparations colorées par l'hématoxyline a fer: tantôt des grands noyaux arrondis ou transversalement ovalaires, peu chromatiques, donc pâles, avec un nucléole distinct et vivement rouge, quelques petits caryosomes et un réseau lininien en rose pâle, tantôt des noyaux plus petits, plus allongés, bien chromatiques, avec la chromatine en forme de petits granules; le nucléole est petit ou il manque. De ces noyaux-ci il y en a bien peu. Les cellules se fixent sur une membrane basale, souvent très indistincte; audessous d'elle on voit des capillaires sanguins qui se rattachent dans une très petite quantité directement à la paroi des canalicules, ou du tissu conjonctif lâche fin. Les mitoses sont assez fréquentes dans l'épithélium.

Mais dans quelques canalicules on voit une coloration d'un bleu intense, d'un air différent. Dans les cas les plus simples, qui nous indiquent vraisemblablement le commencement de la sécrétion, resp. seule-



ment l'acception de la matière colorante par les cellules mésonéphrales des vaisseaux sanguins, ce n'est que la membrane basale qui est colorée en bleu (fig. 3), dont la coloration est très intense. Parfois, comme on le voit justement dans notre figure, de petits prolongements dentiformes sortent de cette bordure bleue et pénètrent entre les cellules isolées. Autrepart dans les cas d'une sécrétion probablement plus avancée, on trouve à côté de cette coloration intense de la membrane basale dans la partie basale du protoplasma des formations fibrillaires colorées en bleu, qui répondent par leur aspect et par leur orientation complètement d'une part aux formations fibrillaires que nous connaissons déjà des cellules où il n'y avait aucune coloration bleue et où la structure fibrillaire du protoplasma avait une tinction rougeâtre, d'autre part aux éléments du chondriome que nous avons décrits ci-dessus. La coloration des limites intercellulaires est des plus intensives, ainsi que celles-ci sont mieux visibles que partout ailleurs dans les canalicules, où le bleu deméthylène est pénétré.

Dans des cas moins avancés ces filaments basaux se trouvent de la base jusqu'au noyau, plus haut on n'en trouve plus. Ce ne sont que les limites intercellulaires colorées en bleu qui montent plus haut entre les noyaux vers la surface, parfois elles atteignent la surface même de l'épithélium (fig. 4, 5), où elles finissent. Après ce stade on peut ranger les cellules où il y a un grand nombre de fibrilles colorées en bleu; elles sont présentes ou comme des filaments longs à la base au dessous du noyau ou comme de filaments plus courts, contourants les noyaux, et enfin on trouve même des éléments colorés en bleu au dessus du noyau dans la couche superficielle du protoplasma, ou bien en forme de filaments tout à fait courts ou de petits granules arrondis ou irréguliers. C'est une telle cellule que nous représente la fig. 6.

Peu à peu on trouve des cellules où la membrane basale n'est plus colorée en bleu; on peut trouver dans la partie basale de la cellule encore des formations filamenteuses colorées en bleu, mais la masse principale du colorant bleu se trouve sur la surface même de la cellule sous la forme d'une bordure large et intensivement colorée en bleu, de contours irréguliers. On ne trouve pas d'éléments formés dans cette bordure, sa coloration est tout à fait diffuse. La fig. 8 nous représente enfin le stade final de la sécrétion. Ni la membrane basale, ni les éléments dans le corps cellulaire sont plus colorés en bleu, ce n'est que la bordure supérieure qui montre une coloration bleue intense. Sur notre image la couleur est assez pâle à cause de l'épaisseur très faible de la préparation ( $3\ \mu$ ). Dans la partie basale de la cellule la structure fibrillaire est bien visible, mais colorée en rougeâtre.

Je fais observer encore que je n'ai jamais trouvé de vestiges de coloration bleue dans les noyaux, ce qui prouve réellement la coloration vitale des éléments plasmatiques décrits.



Si l'on compare nos descriptions et figures de nos préparations avec la description et les figures de T u r c h i n i, faites du rein de la grenouille, on y voit un accord complet. Lui aussi, il a vu que la masse colorante forme d'abord les contours des canalicules, avant de pénétrer dans les cellules mêmes. Il a observé que le colorant pénètre ensuite dans les espaces intercellulaires, ce qui aide à augmenter la surface par laquelle le colorant peut pénétrer dans la cellule. Plus tard les filaments basaux (bâtonnets de Heidenhain) et les granules dans les cellules se colorent, ce que T u r c h i n i tient à juste titre pour les éléments du chondriome, mitochondries, resp. pour de petites granulations de la sécrétion sorties de ces organites cellulaires. Les mitochondries granulaires prennent alors leur origine selon son avis de la désagrégation des formations fibrillaires. Comme dans notre cas, T u r c h i n i peut aussi identifier, par la comparaison avec les préparations colorées par une des méthodes pour les mitochondries, ces particules colorées vitalement avec les éléments du chondriome: „Nous croyons que la disposition des chondriocontes en bâtonnets parallèles est une disposition du chondriome en rapport avec le rôle de la cellule rénale.“ La question de l'identité des bâtonnets de Heidenhain (ainsi que l'ergastoplasma d'autres cellules glandulaires) avec le chondriome peut être considérée aujourd'hui comme définitivement résolue en sens positif.

T u r c h i n i pense donc que le bleu de méthylène passe par la cellule rénale en colorant le chondriome. Voilà ce qui s'accorde encore au point de vue des principaux savants qui se sont occupés des mitochondries et qui les tiennent pour des électosomes capables de tirer certaines matières du milieu intérieur et de les employer ou pour la formation de sécrétion, ou bien pour des formations spécifiques dans divers processus histogénétiques. La phase dernière du processus sécrétoire dans le rein, l'élimination du colorant dans la lumière des canalicules s'exécute d'après T u r c h i n i par la dialyse à travers la bordure en brosse ou par la surface cuticulaire. Cette observation est aussi complètement en accord avec l'observation que nous avons pue constater dans nos préparations.

Les faits trouvés par nous dans le mésonéphros des embryons des mammifères sont donc non seulement semblables, mais directement superposables aux faits trouvés par T u r c h i n i dans le rein des grenouilles, dont le fonctionnement est incontestable, après l'emploi des mêmes méthodes.

Si l'on peut ensuite accepter les découvertes de T u r c h i n i comme une manifestation morphologique de la fonction rénale — et je ne vois point de raison pourquoi ne pas l'accepter —, il faut sûrement faire la même conclusion aussi pour notre cas quant au mésonéphros des embryons des mammifères, resp. dans le cas spécial du porc. Si l'on peut déjà juger de la présence et de l'aspect varié des éléments du chondriome dans les cellules des canalicules du mésonéphros comme nous les avons décrite ci-dessus, sur une activité sécrétoire de ces cellules — car la ressemblance



aux images connues des différentes cellules glandulaires est évidente —, alors cette activité devient absolument certaine par leur coloration vitale et par la rangée continue des stades de l'élimination du colorant, comme nous les avons décrits plus haut; du moins au temps où on peut faire de telles investigations des conclusions sur l'existence et le mécanisme des processus excrétoires dans les épithéliums rénaux aussi chez le rein des organismes adultes.

---



## Bibliographie.

- Arnold, J.: Über Plasmastrukturen und ihre funktionelle Bedeutung. Jena 1914.
- Bakounine, S.: Sur l'activité sécrétrice des épithéliums de Wolff et des épithéliums rénaux dans les premiers jours de développement embryonnaire. Arch. ital. de biol., T. XXIII. 1895.
- Broman, I.: Normale und abnorme Entwicklung des Menschen. Wiesbaden 1911.
- Felix, W.: Die Entwicklung des Harnapparates. Hertwigs Handb. d. vergl. u. exp. Entw. d. Wirbelt. 3. Bd. I. Teil, Jena 1906.
- Janošík, J.: Histologisch-embryologische Untersuchungen über das Urogenitalsystem. Sitzungsber. d. k. k. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. XCI. 1885.
- Kallay: Die Niere im frühen Stadium des Embryonallebens. Mitt. embr. Inst. d. Univ. Wien, 1885.
- Mihalkovics: Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte des Harn- und Geschlechtsapparates der Amnioten. Int. Monatsschr. f. Anat. u. Hist. 1885.
- Nagel, W.: Zur Entwicklung des Urogenitalsystems beim Menschen. Arch. Anat. u. Entw. 1896.
- Selenka, E.: Studien zur Entwicklungsgeschichte der Tiere. H. 4. Wiesbaden 1887.
- Turchini, J.: Contribution à l'étude des processus cytologiques de l'élimination des matières colorantes par le rein. Thèse, Paris 1919.
- Weber, S.: Zur Entwicklungsgeschichte des uropoetischen Apparates bei Säugern, mit besonderer Berücksichtigung der Urniere zur Zeit des Auftretens der bleibenden Niere. Morph. Arb., herausg. v. G. Schwalbe. Bd. VII. H. 3. 1897.

---

## Explication des figures.

- Toutes les figures sont dessinées au grossissement: Merker, homog. imm. 1/12, oc. 4 la table a dessiner au niveau de la préparation, longueur du tubus 160 mm.
- Fig. 1 et 2. Les cellules du mésonéphros d'un embryon de porc de 25 mm de longueur, avec le chondriome. Fix. Regaud, hém. a fer.
- Fig. 3—8. Les cellules du mésonéphros d'un embryon de porc de 32 mm de longueur, injecté vitalement par le bleu de méthylène. Fix. Turchini, safranine. Divers stades de la sécrétion (voir le texte).
- Fig. 9. Les cellules du mésonéphros du même embryon, sans coloration complémentaire.
-

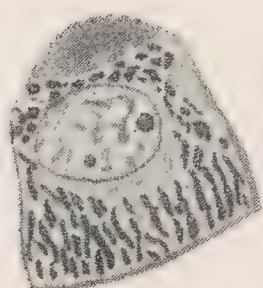


Prof. Dr. Z. FRANKENBERGER :

Le mésonéphros des embryons des mammifères a-t-il une fonction  
excrétoire ?



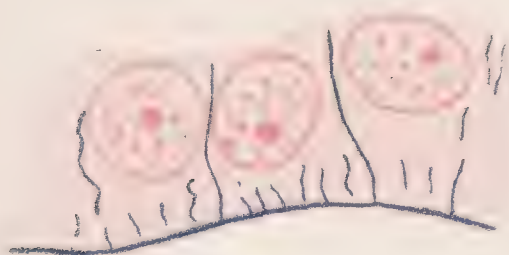
1.



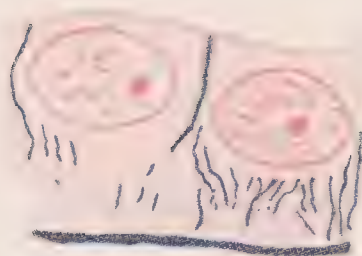
2.



3.



4.



5.



6.



7.



8.



9.







# Rotation et symétrie de l'espace à quatre dimensions.

Par le

Dr. JAN VOJTĚCH à Brno.

1. Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à quatre dimensions (dans la variété linéaire à quatre dimensions). Au point  $P(x_h)$  soit symétrique le point  $P'(x'_h)$  par rapport à l'espace à trois dimensions (ou tout simplement par rapport à l'espace), qui a pour l'équation  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 = 0$ . Les coordonnées du point  $P'(x'_h)$  satisfont à l'équation

$$s^2 x'_h = (s^2 - 2 a_h^2) x_h - 2 \sum a_h a_k x_k - 2 a_h a_5$$

pour  $h = 1, 2, 3, 4$ , où  $k$  (dans la somme) est égale à trois des valeurs 1, 2, 3, 4 sauf la valeur de  $h$  et où on emploie la désignation  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = s^2$ .

Le produit de deux symétries par rapport à deux espaces, qui passent par l'origine du système des coordonnées  $\sum_1^4 a_k x_k = 0, \sum_1^4 a'_k x_k = 0$ , est un mouvement de l'espace à quatre dimensions, rotation autour du plan, suivant lequel ces espaces se coupent ; en employant deux fois les équations de symétrie citées plus haut nous obtiendrons les équations de cette rotation. Si on emploie la désignation

$$\frac{a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 + a_4 a'_4}{s s'} = T, \quad \frac{a_h a'_k - a_k a'_h}{s s'} = A_{hk},$$

où  $h, k = 1, 2, 3, 4$ , mais  $h \neq k$  (et évidemment  $A_{hk} = -A_{kh}$ ), on obtient pour la première coordonnée  $x'_1$  d'un point, s'étant formé du point  $P(x_h)$  par la rotation autour du plan, l'expression

$$\begin{aligned} x'_1 = & (T^2 - A_{12}^2 - A_{13}^2 - A_{14}^2 + A_{23}^2 + A_{34}^2 + A_{42}^2) x_1 + \\ & + 2 (A_{13} A_{32} + A_{14} A_{42} - T A_{12}) x_2 + 2 (A_{12} A_{23} + A_{14} A_{43} - T A_{13}) x_3 + \\ & + 2 (A_{12} A_{24} + A_{13} A_{34} - T A_{14}) x_4; \end{aligned}$$

on obtient des expressions analogues pour les autres coordonnées.



Ecrivons ensuite

$$A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{14}^2 + A_{23}^2 + A_{34}^2 + A_{42}^2 = S^2$$

et

$$\frac{A_{hk}}{S} = a_{hk} \text{ (où } h, k = 1, 2, 3, 4, \text{ mais } h \neq k);$$

les six coordonnées du plan passant par l'origine  $a_{hk}$  satisfont à deux relations

$$a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2 = 1, \quad a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0.$$

Si l'angle de deux espaces considérés est  $\frac{\varphi}{2}$ , il vient  $T = \cos \frac{\varphi}{2}$ ,  
 $S = \sin \frac{\varphi}{2}$ .

Les équations de la rotation du point  $P(x_h)$  en point  $P'(x'_h)$  d'angle  $\varphi$  autour du plan avec coordonnées  $a_{hk}$  sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x'_1 = & [(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) \cos \varphi + (a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2)] x_1 + \\ & + [(a_{13} a_{32} + a_{14} a_{42}) (1 - \cos \varphi) - a_{12} \sin \varphi] x_2 + [(a_{12} a_{23} + a_{14} a_{43}) (1 - \\ & - \cos \varphi) - a_{13} \sin \varphi] x_3 + [(a_{12} a_{24} + a_{13} a_{34}) (1 - \cos \varphi) - a_{14} \sin \varphi] x_4; \end{aligned}$$

il y a des équations analogues pour  $x'_2$ ,  $x'_3$  et  $x'_4$ .

2. Le produit de deux rotations autour des plans passant par l'origine est de nouveau le mouvement de l'espace à quatre dimensions, dont l'origine au moins est fixe. Supposons que la première rotation s'accomplit autour du plan  $\varrho(a_{hk})$  de l'angle  $\varphi$ , la seconde autour du plan  $\sigma(b_{hk})$  de l'angle  $\psi$ . Le mouvement résultant de l'espace à quatre dimensions est défini par l'équations

$$x'_h = c_{h1} x_1 + c_{h2} x_2 + c_{h3} x_3 + c_{h4} x_4, \quad \text{où } h = 1, 2, 3, 4.$$

Les coefficients  $c_{hk}$  sont naturellement composés de coefficients d'équations qui représentent les deux rotations partielles; par conséquent ils se composent des valeurs  $a_{hk}$ ,  $b_{hk}$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ; ils sont un peu plus longs.

Les coefficients des équations du mouvement résultant seront de beaucoup simplifiés dans le cas, où les plans des composantes  $\varrho$  et  $\sigma$  seront absolument perpendiculaires entre eux: de pareils plans ont un point commun (dans notre cas c'est l'origine) et le mouvement résultant est une rotation de l'espace à quatre dimensions autour du point (origine).

S'il vient

$$\sum a_k b_k = 0, \quad \sum a_k b'_k = 0, \quad \sum a'_k b_k = 0, \quad \sum a'_k b'_k = 0,$$

le plan  $\varrho(a_{hk})$ , intersection des espaces  $\sum a_k x_k = 0$  et  $\sum a'_k x_k = 0$ , et le plan  $\sigma(b_{hk})$ , intersection des espaces  $\sum b_k x_k = 0$  et  $\sum b'_k x_k = 0$ , sont absolument perpendiculaires entre eux.



Nous obtiendrons par conséquent pour les coordonnées  $b_{hk}$  du plan  $\sigma$ , absolument perpendiculaire au plan  $\varrho$  ( $a_{hk}$ ), les conditions suivantes

$$b_{12} = a_{34}, \quad b_{13} = a_{42}, \quad b_{14} = a_{23}, \quad b_{23} = a_{14}, \quad b_{34} = a_{12}, \quad b_{42} = a_{13}.$$

A base de ces relations, se conformant aux deux équations de  $a_{hk}$  citées plus haut, les équations du produit de deux rotations autour de plans passant par l'origine se réduisent en équations simples de la rotation de l'espace à quatre dimensions autour du point (origine); c'est-à-dire pour le produit de deux rotations autour de plans absolument perpendiculaires entre eux, autour du plan  $\varrho$  ( $a_{hk}$ ) de l'angle  $\varphi$  et autour du plan  $\sigma$  ( $b_{hk} = a_{ij}$ ) de l'angle  $\psi$ :

$$\begin{aligned} x'_1 = & [(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) \cos \varphi + (a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2) \cos \psi] x_1 + \\ & + [(a_{13} a_{32} + a_{14} a_{42}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{12} \sin \varphi - a_{34} \sin \psi] x_2 + \\ & + [(a_{12} a_{23} + a_{14} a_{43}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{13} \sin \varphi - a_{42} \sin \psi] x_3 + \\ & + [(a_{12} a_{24} + a_{13} a_{34}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{14} \sin \varphi - a_{23} \sin \psi] x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_2 = & [(a_{23} a_{31} + a_{24} a_{41}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{21} \sin \varphi - a_{43} \sin \psi] x_1 + \\ & + [(a_{21}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2) \cos \varphi + (a_{13}^2 + a_{34}^2 + a_{41}^2) \cos \psi] x_2 + \\ & + [(a_{21} a_{13} + a_{24} a_{43}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{23} \sin \varphi - a_{14} \sin \psi] x_3 + \\ & + [(a_{21} a_{14} + a_{23} a_{34}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{24} \sin \varphi - a_{31} \sin \psi] x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_3 = & [(a_{32} a_{21} + a_{34} a_{41}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{31} \sin \varphi - a_{24} \sin \psi] x_1 + \\ & + [(a_{31} a_{12} + a_{34} a_{42}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{32} \sin \varphi - a_{41} \sin \psi] x_2 + \\ & + [(a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{34}^2) \cos \varphi + (a_{12}^2 + a_{24}^2 + a_{41}^2) \cos \psi] x_3 + \\ & + [(a_{31} a_{14} + a_{32} a_{24}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{34} \sin \varphi - a_{12} \sin \psi] x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_4 = & [(a_{42} a_{21} + a_{43} a_{31}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{41} \sin \varphi - a_{32} \sin \psi] x_1 + \\ & + [(a_{41} a_{12} + a_{43} a_{32}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{42} \sin \varphi - a_{13} \sin \psi] x_2 + \\ & + [(a_{41} a_{13} + a_{42} a_{23}) (\cos \psi - \cos \varphi) - a_{43} \sin \varphi - a_{21} \sin \psi] x_3 + \\ & + [(a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2) \cos \varphi + (a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2) \cos \psi] x_4. \end{aligned}$$

3. Le mouvement arbitraire de l'espace à quatre dimensions avec un point fixe (origine) est défini, comme il a été dit, par des équations, qui contiennent 16 constantes  $c_{hk}$ ; elles satisfont cependant à 10 relations indépendantes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} c_{1k}^2 + c_{2k}^2 + c_{3k}^2 + c_{4k}^2 &= 1 \quad (\text{pour } k = 1, 2, 3, 4) \text{ et} \\ c_{1h} c_{1k} + c_{2h} c_{2k} + c_{3h} c_{3k} + c_{4h} c_{4k} &= 0 \quad (\text{pour } h, k = 1, 2, 3, 4, h \neq k). \end{aligned}$$

Le mouvement arbitraire de l'espace à quatre dimensions avec un point fixe est par conséquent déterminé par six constantes indépendantes et tous ces mouvements constituent un groupe continu de transformations avec  $\infty^6$  membres.

Un tel mouvement arbitraire de l'espace à quatre dimensions est une rotation autour du point, dont les équations se trouvent dans le paragraphe précédent. Comme constantes (indépendantes) de la rotation autour



du point on y trouve quatre coordonnées  $a_{hk}$  parmi les six du plan  $\varrho$  (ou quatre coordonnées du plan  $\sigma$  absolument perpendiculaire à  $\varrho$ ) et deux angles de rotation  $\varphi, \psi$  (angles de la rotation autour du plan  $\varrho$  ou  $\sigma$ ).

Si la rotation autour du point est exprimée par quatre équations, où  $x'_h$  ont les constantes  $c_{hk}$ , nous pouvons déterminer les coordonnées  $a_{hk}$  du plan  $\varrho$  (et les coordonnées  $b_{hk}$  du plan  $\sigma$  absolument perpendiculaire à  $\varrho$ ) ainsi que les angles de rotation  $\varphi$  et  $\psi$ . Nous aurons en premier lieu

$$\cos \varphi + \cos \psi = \frac{1}{2} (c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44});$$

nous trouverons ensuite

$$a_{hk} = \frac{(c_{hk} - c_{kh}) \sin \varphi - (c_{ij} - c_{ji}) \sin \psi}{2 (\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi)},$$

où aux couples des indices 12, 13, 14 pour  $h k$  appartiennent les couples 34, 42, 23 pour  $i j$ ; nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi}{\sin \varphi \sin \psi} = \\ & = \frac{(c_{12} - c_{21})^2 + (c_{13} - c_{31})^2 + (c_{14} - c_{41})^2 + (c_{23} - c_{32})^2 + (c_{34} - c_{43})^2 + (c_{42} - c_{24})^2}{(c_{12} - c_{21})(c_{34} - c_{43}) + (c_{13} - c_{31})(c_{24} - c_{42}) + (c_{14} - c_{41})(c_{23} - c_{32})}. \end{aligned}$$

et on peut ramener cette équation à la forme

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} \right)^2 = \\ & = \frac{(c_{12} + c_{34} - c_{21} - c_{43})^2 + (c_{13} + c_{42} - c_{31} - c_{24})^2 + (c_{14} + c_{23} - c_{41} - c_{32})^2}{(c_{12} - c_{34} - c_{21} + c_{43})^2 + (c_{13} - c_{42} - c_{31} + c_{24})^2 + (c_{14} - c_{23} - c_{41} + c_{32})^2}. \end{aligned}$$

4. Il existe naturellement dans l'espace à quatre dimensions quatre symétries: symétrie par rapport à l'espace, par rapport au plan, par rapport à la droite et par rapport au point.

Par des équations de transformation de ces symétries nous trouverons: Les symétries de l'espace à quatre dimensions forment deux groupes de transformations à trois membres: l'un d'eux est formé par les symétries par rapport à l'espace, par rapport à la droite, qui lui est perpendiculaire, et par rapport au point, qui leur est commun; le second groupe comprend deux symétries par rapport aux plans perpendiculaires entre eux et la symétrie par rapport au point qui leur est commun.

Les symétries par rapport au plan et au point ne changent pas le sens des figures (le déterminant des coefficients = +1), tandis que les symétries par rapport au plan et à la droite changent le sens des figures (le déterminant des coefficients = -1).



# Hornblendite de Kojetín et roches qui l'accompagnent.

Par

V. ROSICKÝ (Praha).

Présenté le 14 janvier 1921.

Le massif granitique de la Bohême centrale présente près du village de Milín, dans les environs de Příbram, une différenciation très considérable. Nous y trouvons réunies des roches acides (granitite) et des roches de type gabbrodioritique. La granitite y passe graduellement jusqu'au type aplitique, les roches gabbrodioritiques, riches en hornblende, sont différenciées en série de types proches des diorites quarzifères et même des gabbros; le terme le plus caractéristique du magma gabbrodioritique différencié est la hornblendite pyroxénique et péridotique qui affleure près de Kojetín et est exploitée dans deux carrières.

**La hornblendite** de Kojetín est une roche à grain fin ou de grandeur moyenne composée essentiellement de hornblende, de pyroxène diopsidique, de hypersthène, d'olivine et de magnétite; elle renferme, en petite quantité, la biotite et le feldspath (plagioclase basique de la série bytownite-anorthite). La séricite, la serpentine, la chromite, la calcite et, semble-t-il, même le talc s'y forment comme minéraux secondaires. La texture de la roche est grenue, sa structure hypidiomorphe; les grands grains de la hornblende, noyés dans la masse microcristalline des minéraux cités indiquent une transition à la structure porphyrique. A l'oeil nu, la couleur de la hornblende est d'un vert noirâtre, au microscope jaune vert, bleu vert, brun vert;  $c : \gamma = 14^{\circ} - 18^{\circ}$ , le pléochroïsme des hornblendes de diverses teintes brunes est assez considérable: le rayon  $\alpha$  est d'un brun jaune clair, le rayon  $\beta$  est jaune brun avec une teinte rougeâtre, le rayon  $\gamma$  est rouge-brun. Le rayon  $\alpha$  des hornblendes qui sont de diverses teintes vertes



est jaune clair ou presque incolore, le rayon  $\beta$  est vert jaunâtre et le rayon  $\gamma$  est bleu vert. Il existe une transformation de la hornblende, due probablement à l'influence du magma, qui est intéressante; elle consiste en la décoloration de la hornblende surtout sur les bords, où les cristaux prennent une teinte vert clair ou sont presque incolores; la réfringence de la hornblende décolorée est considérablement inférieure à celle de la hornblende initiale; sa biréfringence au contraire est supérieure. Les propriétés de la hornblende foncée indiquent qu'elle est riche en sesquioxydes, celles de la hornblende décolorée sont au contraire propres à la trémolite. La transformation de la hornblende s'est donc produite par la perte du fer et de l'aluminium.

Une zone de kelyphite, formée de paillettes de hornblende bleu vert et même, semble-t-il, en partie de grains d'augite et de trémolite s'est développée sur les bords des grains d'olivine, là où ceux-ci touchent aux grains de feldspath.

Comme densité de la hornblendite on a trouvé par la méthode hydrostatique 3.15.

L'analyse chimique de la hornblendite a été faite par M. J. Hanuš, professeur à l'Ecole Polytechnique tchèque de Prague. Le résultat de cette analyse se trouve dans la I<sup>ère</sup> colonne du tableau suivant. Dans la II<sup>e</sup> colonne de ce tableau se trouvent les valeurs de cette analyse calculées à 100 pour 100 après élimination de l'eau. La III<sup>e</sup> colonne contient les quotients moléculaires. Ils se trouvent aussi dans la colonne IV où ils sont multipliés par 100 et calculés à 100 pour 100 ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$  est calculé à part de FeO). Dans la V<sup>e</sup> colonne se trouvent les mêmes quotients calculés à 100 pour 100 avec tout le fer indiqué en FeO. Colonne VI: nombre d'atomes de métaux calculé à 100 pour 100.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$\text{SO}_2$	44.16	45.37	0.7562	43.81	43.14	Si 40.06
$\text{TiO}_2$	0.08	0.08	0.0010			
$\text{Al}_2\text{O}_3$	9.52	9.78	0.0959			
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	4.05	4.16	0.0260	1.56	—	Al 10.15
$\text{Cr}_2\text{O}_3$	0.13	0.13	0.0009			
FeO	5.03	5.17	0.0718	4.15	7.16	Fe 6.64
MnO	traces	—	—	—		
CaO	9.12	9.37	0.1673	9.68	9.53	Ca 8.85
MgO	22.02	22.81	0.5702	32.99	32.49	Mg 30.16
$\text{K}_2\text{O}$	2.02	2.07	0.0220	1.27	1.25	K 2.33
$\text{Na}_2\text{O}$	1.03	1.06	0.0171	0.99	0.97	Na 1.81
$\text{H}_2\text{O}$ hydr.	0.18	—	—	—	—	
$\text{H}_2\text{O}$ chem.	2.33	—	—	—	—	
	99.85	100.00	1.7284	100.00	100.00	100.00



Il ressort de toutes les valeurs calculées que la hornblendite de Kojetín appartient à la catégorie des types les plus basiques de roches éruptives; les valeurs suivantes sont relatives aux noyaux de H. Rosenbusch:

NaKAlSi <sub>2</sub> .....	16.6 %
CaAl <sub>2</sub> Si <sub>4</sub> .....	21.0 %
R'' <sub>2</sub> Si .....	59.3 %
R'' .....	3.1 %
	<hr/> 100.0 %

Le pourcentage considérable du noyau orthosilicatique résultant du calcul fait d'après Rosenbusch est bien élevé quoique d'après la composition minéralogique on aurait plutôt supposé une prédominance du noyau métasilicatique. Le noyau alcalin de Rosenbusch ne se trouve certes pas non plus dans la roche, tout à fait comme l'indique le schéma du calcul.

La formule de Loewinson-Lessing est la suivante:

$$6.9 \overline{RO} . 1 R_2O_3 . 6.2 SiO_2 ;$$

$$R'_2O : R''O = 1 : 20.7 ;$$

$$\beta = 127.4, \alpha = 1.2.$$

La hornblendite de Kojetín appartient par conséquent au „ultrabasites“ de Loewinson-Lessing.

La formule d'Osann est la suivante:

$$s_{43.14} A_{2.22} C_{3.24} F_{45.94} ; a_1 c_1 f_{18} ; n_{4.4}, k_{0.66}.$$

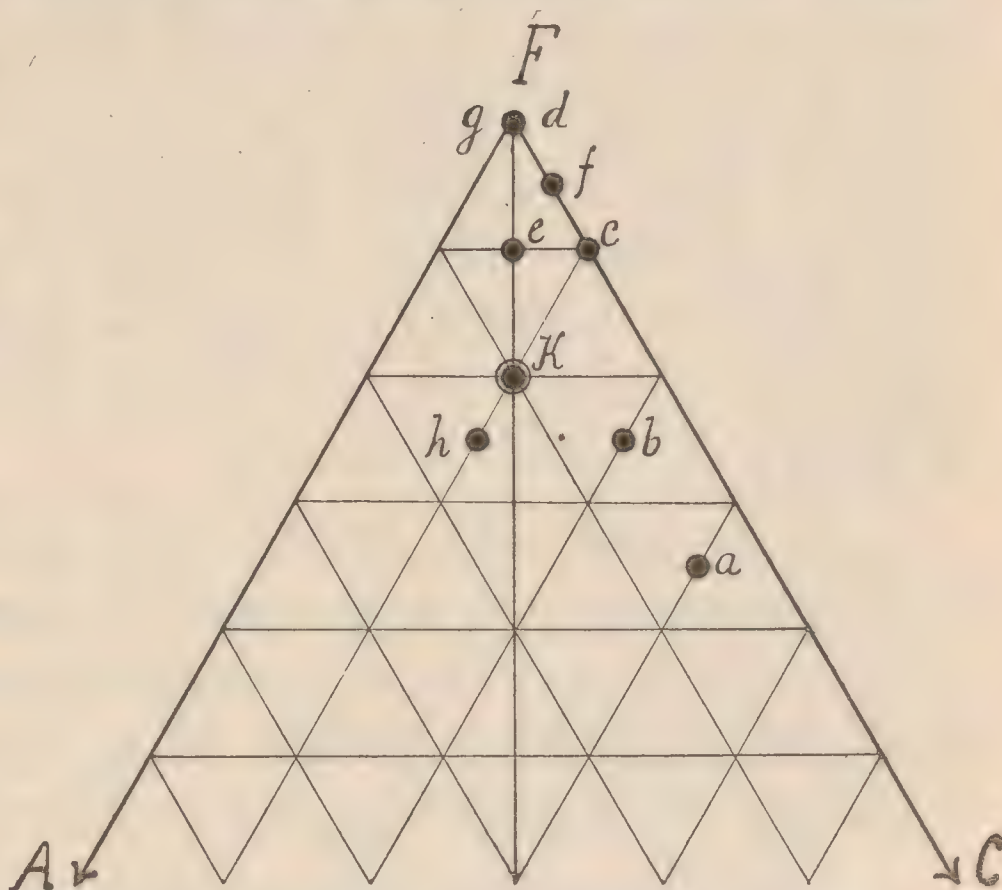
Les valeurs d'Osann sont:

$$SAIF = 13.2, 1.7, 15.1 ; AlCalk = 9.5, 16.6, 3.9 ; NK = 4.4, MC = 7.7$$

La figure représentée ici indique la position de la hornblendite de Kojetín dans la projection d'Osann  $a c f (K)$ ; les points  $a-h$  représentent les projections des roches suivantes, qui ne contiennent pas de feldspaths et sont parentes à la nôtre:<sup>1)</sup>

K=hornblendite de Kojetín	( $s_{43.14}, a_1 c_1 f_{18}$ )
a=hornblendite de Žilošice	( $s_{46.55}, a_{0.5}, c_{2.5}, f_{16.5}$ )
b=gabbro périoditique, Big Timber Creek, Mont.	( $s_{44.32}, a_{0.5}, c_2, f_{17.5}$ )
c=périodotite à hornblende, North Meadow Creek, Mont.	( $s_{43.73}, a_0 c_1 f_{19}$ )
=dunite, Dun Mts, N. Zeel.	( $s_{35.17}, a_0 c_0 f_{20}$ )

<sup>1)</sup> Osann, Tsch. M. p. M. 19, anal. 153, 204, 202, 206, 200, 197, 205.





e = wehrlite, Red Bluff, Mont.	( $s_{46.25}$ , $a_{0.5}$ $c_{0.5}$ $f_{19}$ )
f = websterite, Hebbville, Md.	( $s_{48.91}$ , $a_0$ $c_{0.5}$ $f_{19.5}$ )
g = websterite, Webster N. C.	( $s_{49.39}$ , $a_0$ , $c_0$ , $f_{20}$ )
h = périodite à mica, Kaltes Tal, Harz	( $s_{40.03}$ , $a_{1.5}$ $c_1$ $f_{17.5}$ )

Tous les faits cités plus haut prouvent que la hornblendite de Kojetín appartient aux magmas péridotiques et qu'elle est plus basique que la hornblendite de Žilošice, près de Brno, décrite par E. Suess et C. Jahn.<sup>1)</sup>

La hornblendite de Kojetín est accompagnée de produits de différenciation magmatique dont le grain est plus gros et qui sont assez riches en feldspaths; ils y forment des enclaves de la grandeur d'un poing et passent insensiblement en hornblendite. Un autre type de produits de différenciation du magma est une diorite quarzifère à grain fin qui affleure dans le voisinage le plus proche de la hornblendite. Sur ses bords, la hornblendite passe aux types dioritiques ou gabbriques, mais on n'y trouve plus de pyroxène intact; en certains cas le pyroxène semble avoir été transformé en hornblende, dont les agrégats ont nettement conservé, en partie, les contours de cristaux de pyroxène. Dans ces roches le quartz se trouve en quantités diverses.

La hornblendite est traversée par des filons de granitite, d'aplite et de pegmatite. On peut observer dans les intrusions de granitite, des enclaves foncées, riches en hornblende; nous pouvons les considérer comme étant des fragments assimilés de la hornblendite, ayant été arrachés par le magma de la granitite et transformés par lui.

Outre les roches citées, les filons décrits dans les lignes suivantes traversent les roches gabbro-dioritiques des environs de Milín.

Sur la crête s'étendant entre Milín et Rtišovice (côte 583 près de Milín) affleure une **porphyrite dioritique quarzifère**. Elle contient des phénocristaux idiomorphes de plagioclase avec une belle structure zonaire. Les centres basiques de ces plagioclases sont formés d'andésine, les zones extérieures, plus acides sont proches de l'oligoclase. Il s'y trouve, à côté du feldspath, en outre des phénocristaux de biotite. La pâte contient un plagioclase acide, de la biotite et un peu de quartz; l'apatite et un peu de minerai sont accessoires. Dans une porphyrite semblable, près du moulin „na Luhu“, se trouvent des pseudomorphoses en quartz et chlorite probablement du pyroxène.

Dans une carrière située près du village Kojetín, la granitite est traversée par une **kersantite pyroxénique**. Sa structure est porphyrique; la biotite et le diopside y forment des phénocristaux; dans la pâte se trouvent le feldspath (oligoclase-albite, aussi de l'orthose), le diopside, la biotite, puis outre ceux-ci un peu d'apatite, de minerai et des minéraux secondaires. Les phénocristaux de biotite sont intéressants par leurs zones

<sup>1)</sup> Jhb. G. R-A. 1908, 58, 247-266.



extérieures foncées, qui se détachent nettement des parties internes plus claires. Il est probable que ces bords foncés ont été causés par le magma car son influence corrosive est prouvée par les contours irréguliers des phénocristaux. Les vides miarolitiques de la roche sont principalement remplis de calcite, de chlorite et de quartz.

Près du moulin „na Luhu“, dans le voisinage de Milín, on a trouvé de la **spessartite** mais représentée seulement par des pierres éparses jetées hors des champs. Cette roche est remarquable par sa rugosité, causée par d'abondants vides miarolitiques, dont beaucoup sont comblés. Sur leurs parois on a constaté la présence de tout petits cristaux d'orthose. Cette spessartite est de grain fin et est constituée par des lames étroites de plagioclase (oligoclase — albite jusqu'oligoclase) et de menus prismes de hornblende châtaine. L'apatite, le quartz (ce dernier évidemment terme le plus récent) et le minéral ne s'y trouvent qu'en minime quantité. Par-ci par-là il y a aussi de petits grains de pyroxène. Quand les vides miarolitiques sont remplis, c'est avec de la chlorite, ayant les propriétés du clinocllore. Les propriétés physiques des prismes de la hornblende faisant saillie dans les vides miarolitiques, remplis de la chlorite sont intéressantes. L'extrémité de ces baguettes fixée dans la roche est châtaine et de pléochroïsme bien visible (rayon  $\alpha$  est jaune brunâtre  $\beta = \gamma$  est châtain), au contraire la partie qui pénètre dans la masse de chlorite est décolorée, devenue tout à fait incolore. Les parties décolorées des prismes de hornblende ont le même angle d'extinction que les parties de couleur normale, quoique la réfringence des premières soit nettement inférieure, leur biréfringence au contraire est supérieure à celle des parties brunes. Tout cela prouve que la chlorite, remplissant les vides miarolitiques de notre spessartite s'est développée, au moins en partie, aux dépens de sesquioxydes de la hornblende.

Tout ce que nous savons jusqu'à présent sur le massif granitique du centre de la Bohême ne nous permet pas encore de nous faire une idée juste sur la différenciation qui s'est manifestée dans le magma. Mais on peut dire, se basant surtout sur des recherches récentes, que la différenciation du magma dans le massif de la Bohême centrale a donné naissance à des types de roches très différentes soit plutoniques soit filoniennes. L'opinion de Suess, qui prétend que, dans le massif du centre de la Bohême n'existe pas de différenciation magmatique considérable n'est aucunement motivée et ne peut être expliquée que parce que Suess a jugé le massif granitique du centre de la Bohême d'après les données de la littérature ancienne dont la nomenclature primitive n'a pas su rendre la variabilité de ce massif.

P r a g u e, septembre 1920.

*Institut minéralogique et pétrographique  
de l'Université Charles IV à Prague.*



# L'histogénèse des cellules interstitielles du testicule humain.

Par

MUDr. ZDENKO FRANKENBERGER.

Le problème de l'histogénèse des cellules interstitielles du testicule, discuté depuis longtemps, mérite toujours l'attention des histologistes. Dans ce travail je présenterai sous une forme condensée, les résultats de mes études sur cette question. D'un examen détaillé des testicules d'embryons humains de différents âges et traités par différentes méthodes histologiques, je parviens aux résultats formulés sous les sept points suivants:

1. La substance mère des c. i. du testicule ce sont les cellules mésenchymateuses éparses entre les canalicules jeunes du testicule. Mes résultats se trouvent donc d'accord avec ce qui a été constaté par la plupart des autres observateurs. (*Plato, Regaud, Bouin et Ancel, Sainmont.*) D'abord, on observe dans les stades les plus jeunes que j'ai examinés (embryons 20 et 31 *mm* de longueur), que les c. i. y sont très rares, elles sont toutes contenues dans le tissu mesenchymateux non différencié et sont tout à fait éloignées des tubules. Puis on trouve que ces cellules par leurs prolongements protoplasmiques se trouvent soudées sans solution de continuité avec les prolongements des cellules mésenchymateuses. L'existence de ces prolongements a été constatée par plusieurs auteurs par ex. par *Plato, Sainmont, Regaud*. Leur existence est contestée par *Ganfini*; il est vrai qu'il dispose d'un matériel tout à fait différent du mien, mais *Plato* p. ex., qui, comme *Ganfini*, a étudié leur développement chez le chat, décrit et dessine ces prolongements avec une certitude absolue. *Ganfini* fait dériver les c. i. de cellules germinatives, qui n'ont pas été comprises dans les tubules; mais il ne peut pas y avoir beaucoup de cellules de cette sorte et il faudrait avoir observé les signes d'une forte prolifération, pour pou-



voir expliquer leur développement immense dans les stades suivants. G. décrit aussi des mitoses mais moi — quoique ayant en plusieurs fois à ma disposition un matériel tout à fait frais et bien fixé — je n'ai vu aucune figure certaine de division caryocinétique (ainsi que *Bardleben*, *Regaud*, qui pensent trouver une division amitotique dont je n'ai pu personnellement m'assurer, et une telle division est bien invraisemblable, ou comme *Popoff*, qui parle du moins d'une grande rareté des mitoses dans les c. i.). Un autre argument pour faire dériver les c. i. des cellules mésenchymateuses c'est la grande quantité des différents stades transitoires, fréquents chez les embryons le plus jeunes. Si *Lenhossék* dit qu'il n'a jamais trouvé de formes intermédiaires entre les c. i. et les éléments du tissu conjonctif, „Exemplare, bei denen die Entscheidung, ob sie zur einen oder anderen Gattung gehören, Schwierigkeiten bereiten würde“, je ne puis le comprendre; je me contenterai d'attirer l'attention sur quelques-unes des figures que je donne, dans une autre publication qui montrent clairement de pareils éléments, ainsi que sur celles tout à fait semblables de *Plato* et de *Sainmont*.

2. Les changements que les cellules mésenchymateuses subissent pour devenir cellules int. peuvent être divisés en changement du noyau et changements du corps protoplasmique. Naturellement tous les deux se produisent en même temps. Le noyau allongé à l'origine prend une forme plus ovale, en même temps que la chromatine au commencement très dense et riche, devient plus rare, de sorte qu'elle se trouve alors dans le noyau sous la forme des granules très fines. En suite le noyau s'arrondit complètement, il s'y développe un ou plusieurs nucléoles, et enfin on observe, qu'il se forme sur le noyau une dépression en forme d'entonnoir, qui le cas échéant peut donner au noyau une forme lobuleuse. A ce stade, qui nous offre la forme la plus développée, la chromatine est très rare, le réseau de linine est bien visible. Les changements du corps sont caractérisés par l'accroissement de la bordure protoplasmique originellement étroite, tandis que ses prolongements restent conservés de sorte que toute la cellule prend une forme largement fusiforme (s'il n'y a que deux prolongements au pôles opposés), ou en étoile (s'il y en a davantage). Le corps s'aggrandit de plus en plus, jusqu'à ce qu'il acquière sa grandeur définitive, 16—20  $\mu$  de diamètre environ chez les éléments polyédriques ou arrondis, 27—36  $\mu$  de longueur chez les éléments allongés. En même temps le protoplasme se différencie en deux zones, l'endoplasma plus granuleux et l'ectoplasma plus homogène. L'ectoplasma enfin peut produire sur sa surface une membrane exoplasmique par condensation; avec cela les prolongements protoplasmiques disparaissent souvent, mais non moins souvent ils restent bien développés.

3. La question du moment de l'apparition des c. i. ne peut pas être résolue avec une certitude absolue d'après le matériel que j'ai en main. Nous avons vu que les premières c. i., bien qu'en nombre tout à fait



restraint, ont déjà apparu dans les stades les plus jeunes; elles n'ont pas encore la forme caractéristique décrite plus haut, que nous leur voyons au sommet de leur développement, mais par leur noyau plus grand, arrondi, pauvre en chromatine et leur corps protoplasmique plus grand, elles manifestent déjà leur nature de cellules int. Leur première différenciation des cell. mésench. se ferait alors antérieurement encore à mes stades les plus jeunes, après 5—6 semaines environ. Si la différenciation des c. i. aux dépens des cell. més. n'était pas trop fréquente jusqu'à cette époque, il commence ensuite une période où ce développement continue avec une intensité et une extensité extraordinaire. Les stades intermédiaires entre les deux sortes de cellules, que nous avons déjà vus — à côté de cell. interst. presque adultes et isolées — dans les stades les plus jeunes, deviennent toujours plus nombreux dans un temps très court de sorte qu'après quelques semaines (chez l'embryon de 7 cm) tous les espaces sont remplis de cell. int. tandis que le mésenchyme non différencié ou le tissu conjonctif jeune, en voie de développement n'est développé que très peu, excepté l'albuginée assez forte. En même temps on ne voit pas de mitoses dans les c. i. ou bien elles sont extrêmement rares.

Après les stades de 7 cm qui répond à l'âge de la seconde moitié du 3ème mois, les c. i. augmentent encore, ce que démontre une quantité toujours considérable de formes intermédiaires, ainsi que la quantité de c. i. adultes, de sorte que chez les embryons de 9—10 cm (moitié du 4ème mois) elles approchent leur plus grand développement. Mais en même temps on voit un autre phénomène, savoir la désagrégation des c. i. dont la description plus détaillée se trouve sous les points 5—7.

4. Les premières c. i. apparaissent dans le tissu mésenchymateux remplissant les espaces entre les canalicules du testicule. C'est ce que nous montraient des stades les plus jeunes que nous ayons pu étudier; là on trouve, dans le mésenchyme abondant entre les tubules, des cellules i. jeunes et isolées, qui n'ont pas encore la forme des cellules définitives, mais qui par les caractères de leur noyau et de leur corps, montrent déjà évidemment qu'elles sont en train de se développer en c. i. On ne peut pas trouver de différences entre les parties différentes de ce stroma mésenchymateux; les c. i. y sont uniformément dispersées, comme on peut le vérifier par une étude attentive des coupes en séries transversales et longitudinales. Au dessous de l'albuginée jeune, on n'en trouve pas encore à ce stade. Le mésenchyme dans le hilus de testicule en est complètement dépourvu là où il y a plus tard le rete testis; cette région reste pendant toute la durée du développement des c. i. sans ces cellules. Plus tard il se développe des c. i. aussi au dessous de l'albuginée, d'une part entre cette dernière et les canalicules les plus superficielles, d'autre part, là où les septa se détachent de l'albuginée pour pénétrer dans le testicule, de façon que nous avons même vu dans les stades de 9—10 cm plusieurs couches de c. i. au dessous de l'albuginée. Ces c. i. prennent leurs



naissance des cellules conjonctives des couches de l'albuginée les plus profondes; on y trouve souvent des formes transitoires. Dans la plupart de mes préparations on n'en trouve pas directement dans l'albuginée, cependant dans quelques-unes (p. ex. chez un embryon de 23 *cm*) elles y étaient pourtant présentes quoique tout à fait rares et pas du tout en forme de cordons ou groupes entiers comme G a n f i n i le décrit et le dessine chez le chat. Il nous semble donc que si elles se développent dans l'albuginée, ce n'est que très tard.

5. La disparation c. i. a été encore moins étudié que leur développement. La plupart des auteurs se contentent simplement de constater, qu'elles diminuent en nombre dans la deuxième moitié de la vie intra-utérine, mais il ne s'occupent guère de la façon dont cette diminution se produit. H a n s e m a n n les décrit chez la marmotte, et pense qu'elles se transforment pendant le sommeil d'hiver en cellules conjonctives et qu'au printemps le processus inverse se produit. D'une façon semblable, Lécaillon décrit leur cycle évolutif chez la taupe, Champy chez les Batraciens. Branca et Bassetta décrivent leur désagrégation chez l'homme: le noyau perd sa chromatine, sa membrane disparaît, le protoplasma se divise en débris granulaires et toute la cellule finit par disparaître. B a r d e l e b e n pense, que le c. i. se transforment — en pénétrant dans les canalicules — en cellules de Sertoli, une manière de voir tout à fait isolée et après les études de Winiwarter assurément peu soutenable. D'après nos résultats on voit que — sans parler de Bardeleben, avec lequel il n'est pas possible de s'accorder — chacun des observateurs cités n'a saisi qu'une part de l'état réel des choses. Dans le premier temps du développement on trouve que la désagrégation des c. i. se fait de la manière décrite par Branca et Bassetta. Nous avons vu chez les embryons de 7 *cm* déjà quelques c. i. dont le noyau devient toujours plus pauvre en chromatine et qui disparaît ensuite entièrement; il reste seulement le nucléole colorable à l'hématoxyline ferrique. Jusqu'alors les contours du noyau et sa membrane sont conservés. Mais ensuite la résorption du nucléole se produit aussi et le noyau perd en même temps sa forme distincte. Dans ces cellules condamnées à la disparition on peut distinguer encore pendant quelque temps des vestiges du noyau dans les restes du réseau lininien, mais enfin ceux-ci disparaissent aussi et il reste seulement un grumeau du protoplasma granulaire qui se désagrège ensuite en fins débris granulaires. Dans les stades de 10—15 *cm* il y a une grande quantité de ces cellules, de sorte que quelquefois des groupes entiers des c. i. sont formés par des tels éléments déjà partiellement désagrégés.

Cependant ce processus tout seul — du moins pendant la vie embryonnaire — ne causerait pas certainement une diminution bien considérable des c. i., car on observe à côté de lui toujours un remplacement des cellules disparues par le développement de cellules nouvelles aux dépens d'éléments du tissu conjonctif, comme le démontrent les formes transitoires



toujours nombreuses. La diminution en nombre des c. i. dans la deuxième partie de la grossesse est causée par un autre processus, qu'on peut caractériser comme suit: la chromatine des noyaux de quelques c. i. s'augmente d'une part par le développement de plus nombreux granules de chromatine, d'autre part par l'infiltration homogène du contenu du noyau (suc nucléaire). C'est ce qu'on voit sur les noyaux dont le contenu coloré en bleu diffus par l'hématoxyline ferrique contient des granulations chromatiques nombreuses. De tels noyaux conservent encore leur forme arrondie. La chromatine augmente toujours de sorte qu'enfin les noyaux sont colorés presque homogènement en noir; du même temps leur forme change, leur surface se bosselle, ils prennent une forme lobulaire, irrégulière et leur grosseur diminue. Simultanément le corps cellulaire diminue en dimension et le processus entier finit par le retour de la c. i. à la forme de cellule conjonctive. Ce processus prédomine dans la deuxième moitié de la vie intrautérine, de sorte que chez les nouveaux-nés les c. i. sont très rares, les interstices sont remplis d'un tissu conjonctif fibrillaire assez lâche, avec des cellules fixes nombreuses.

6. Les dernières questions sont déjà plus faciles à résoudre. Quant à l'époque où survient la disparition des c. i. nous voyons que le premier mode de disparition caractérisé par l'achromatie et la perte du noyau et par la désagrégation de la cellule se produit d'assez bonne heure, de sorte qu'on peut trouver des éléments de ce genre déjà chez les embryons de 7 *cm*, sans que le cas soit très fréquent. Il arrive à son point de culmination chez les stades de 10—15 *cm*, c'est-à-dire dans la période qui va du commencement du 4ème jusqu'à la moitié du 5ème mois. Plus tard ce mode passe au second plan sans cesser tout à fait et à sa place se produit la „dédifférenciation“ déjà décrite des c. i. en cellules conjonctives et qui atteint son maximum, c'est-à-dire l'époque où le plus grand nombre de c. i. se modifient en même temps, chez les embryons de 18—23 *cm*, soit dans la période qui va du commencement du 6ème jusqu'à la moitié du 7ème mois. Naturellement ce processus ne cesse pas non plus ensuite mais il se continue jusqu'à l'accouchement; mais comme la plupart des c. i. ont déjà repris la forme de cellules conjonctives les changements que subissent les c. i. restantes sautent beaucoup moins aux yeux qu'auparavant, quand elles étaient encore nombreuses.

7. En dernier lieu il reste à parler des rapports topographiques de la disparition des c. i. La désagrégation des éléments dépourvus de noyaux se fait, tant au-dessous de l'albuginée quant dans les interstices à l'intérieur du testicule avec une intensité à peu près égale; simultanément, moins au commencement du processus, les pertes sont remplacées par la formation de nouvelles c. i. aux dépens des cellules conjonctives. Tel est l'état des choses jusqu'à la fin du 4ème mois. A partir de cette époque nous remarquons que le développement des c. i. au dessous de l'albuginée n'est pas assez rapide pour remplacer les pertes causées par la désagrégation.



gation ; voilà pourquoi les c. i. diminuent en nombre plus vite au dessous de l'albuginée que dans les espaces interstitiels. Quand se produit le retour des c. i. à la forme de cellules conjonctives, cela se fait dans les deux endroits au dessous de l'albuginée et dans les interstices — à peu près avec la même rapidité ; mais lorsque par suite du procédé antérieur le nombre des c. i. au dessous de l'albuginée a proportionnellement plus diminué que celui des cellules des espaces interstitiels, la première région se trouve plus dégarnie des c. i. que les couches plus profondes.

---



# Sur les ovules rudimentaires dans les testicules de *Lacerta vivipara* Jacq.

Par

MUDr. ZDENKO FRANKENBERGER.

Avec deux figures dans le texte.

Ce n'est pas un phénomène excessivement rare que de trouver des oogonies et même des oocytes dans les canaux des testicules chez les amphibiens ; je renvoie à cet égard aux derniers travaux de Hooker et de Ognev, où la littérature sur le sujet est traitée en détail. Les cas de ce genre sont les plus fréquents chez les grenouilles, les moins nombreux chez les urodèles. En revanche, chez les vertébrés supérieurs, ils sont excessivement rares, quoiqu'ils ne manquent pas, même chez les Mammifères (p. ex. Babo r chez l'homme). Je n'ai rien trouvé de tel dans la littérature pour les Reptiles. En étudiant les testicules de *Lacerta vivipara*, j'ai eu l'occasion de constater des faits très intéressants que je me propose de faire connaître dans cette communication.

Les testicules d'un exemplaire adulte de l'espèce mentionnée que j'avais immédiatement fixés dans le liquide de Flemming au cours d'une excursion vers la fin de mai 1920, furent mis dans la paraffine, coupés, en séries (l'un longitudinalement en coupes de 10  $\mu$  d'épaisseur, l'autre transversalement en coupes des 5  $\mu$ ) et je les colorai à la safranine.

Les deux testicules sont de structure normale. Le diamètre des tubules est de 70 à 100  $\mu$ , leur lumière très étroite, parfois même complètement oblitérée, leur épithélium haut, stratifié, ses cellules pour la plupart en repos ; seulement çà et là on peut constater divers stades de la division caryocinétique. Entre les cellules se trouvent des spermatozoïdes, isolés ou en petits groupes, en majorité complètement mûrs, dans les espaces interstitiels un peu de tissu conjonctif, les vaisseaux et des cellules de Leydig sont assez rares.

Dans les canalicules on trouve de loin en loin entre les spermatogonies des cellules des plus grandes dimensions, qui se font remarquer



déjà sous un faible grossissement. Au total ces cellules sont rares, il s'en faut de beaucoup qu'elles soient aussi nombreuses que p. ex. dans le cas de K ř i ž e n e c k ý chez une *Molge cristata*; mais pourtant on en peut trouver du moins une en moyenne dans chaque coupe; quelquefois il y en a dans une même coupe deux, trois et davantage, ou même deux plus ou moins rapprochées l'une de l'autre dans le même tubule. Elles se distinguent des spermatogonies environnantes par quelques traits très caractéristiques. D'abord elles sont plus grandes; tandis que les spermatogonies normales — comme j'ai pu le constater — en comparant les éléments de ces testicules avec ceux d'autres — pris dans une autre période de l'année (juin 1919) mesurent environ 8—10  $\mu$  de diamètre, \*) ces cellules sont au moins deux fois plus grandes. Leur forme est tantôt ronde, tantôt ellipsoïdale ou ovale; dans le premier cas, on trouve des dimensions de 16—20  $\mu$  environ, dans le deuxième, jusqu'à  $22 \times 12 \mu$  dans les deux diamètres. Le noyau aussi est plus grand, il mesure 6  $\mu$  (s'il est rond), ou  $6 \times 4 \mu$  (dans les formes ovales). Le noyau, qui est tantôt central, tantôt excentrique, est clair, assez pauvre en chromatine; cette dernière se trouve en forme de petits granules quelquefois rangés distinctement sur des fibres de linine. La membrane nucléaire est peu marquée, le noyau n'a pas de contours nets, à l'inverse des noyaux des spermatogonies qui ont une membrane très distincte, nettement dessinée. Une autre différence consiste dans le nucléole, qui est très grand dans nos cellules (jusqu'à 4  $\mu$ ), rond, tandis que dans les spermatogonies tantôt il fait défaut, tantôt il est développé, mais bien plus petit (1.6  $\mu$  environ).

Le protoplasma de ces grandes cellules est fortement granulé, les granules sont tantôt tout petits, tantôt plus grands, arrondis; quelquesuns se colorent en noire par l'osmium (de la graisse?) d'autres en rouge foncé par la safranine.

Ces cellules, visibles — comme je l'ai déjà dit — déjà sous un faible grossissement sont placées dans un espace un peu plus grand que la cellule même, d'une forme généralement elliptique, et cela de telle sorte que la cellule s'attache moins d'un côté à la paroi de cet espace. Dans l'espace proprement dit — il n'y a pas la moindre trace d'un précipité quelconque, je pense donc qu'il s'est formé par la rétraction de la cellule de la paroi, à laquelle elle adhérerait originellement par sa surface entière, pendant la fixation et les manipulations microtechniques.

La paroi de l'espace est formée par du plasma qui dans certains cas est condensé à la surface interne et coloré en rouge brillant (à la manière d'une membrane exoplasmatique), dans d'autres cas il est sans contours bien marqués. Vers le bord même le plasma est fortement granulé, il renferme des granules plus petits et plus grands, colorés en noir par l'osmium, et des formations globulaires colorés en rouge foncé. Parfois

\*) On sait que les Reptiles ont en somme des éléments cellulaires très petits.



les granules noirs sont placés dans des petites vacuoles, un, deux ou trois dans chacun. Là où la grande cellule a la forme que j'ai décrite ci-dessus, on ne peut constater que les spermatogonies atteignent la paroi de l'espace, mais leurs noyaux en sont plus éloignés de sorte que la paroi de l'espace n'est pas formée directement par les cellules, mais par une masse plasmatique ininterrompue avec les inclusions diverses décrites plus haut. Seulement çà et là, on peut trouver un noyau dans le voisinage immédiat (fig. 1., à gauche au dessus de la grande cellule) mais de tels noyaux diffèrent considérablement des noyaux normaux, des spermatogonies: ils sont évidemment hyperchromatiques, leur chromatine est d'une part, en forme de granules denses, d'autre part, elle imbibé même le suc nucléaire, quelquefois ces noyaux contiennent même des gouttelettes colorées en noir; ils sont évidemment à l'état de dégénérescence.

Cette image semble autoriser à la conclusion qu'il s'agit d'ovules jeunes (oocytes) et cela d'autant plus que les petits ovules primordiaux dans l'ovaire de la même espèce (fixés au mois de juillet 1919) leur ressemblent complètement pour la forme et pour la grosseur. Il reste à savoir comment ces ovules ont pu se développer dans un testicule autrement tout à fait normal.

A la suite de constatations diverses, je pense, que leurs éléments—mère sont des spermatogonies ordinaires — au sens morphologique du moins — car on peut trouver, sur tout dans les parties centrales des tubules, quelques spermatogonies qui ne diffèrent de leurs voisines que par leur grosseur plus considérable (du corps et du noyau); évent. elles ont dans leur noyau déjà un nucléole beaucoup plus grand que les spermatogonies normales, de sorte qu'on peut constater une transition presque ininterrompue d'une spermatogonie ordinaire jusqu'à la forme définitive de l'ovule primordial que nous venons de décrire. A cet égard, j'incline plutôt à la façon de voir exprimée par la Valette St. George au sujet d'une écrevisse hermaphrodite et à celle de Kříženecký au sujet de son triton, qu'à l'opinion de Friedmann dans son cas de *Rana viridis*, lequel pense que ces ovules se sont ébauchés déjà pendant le développement de la gonade et qu'ils ont pénétré avec l'épithélium germinatif, entraînant de se reproduire rapidement dans les canalicules. Il faut ajouter d'ailleurs une différence essentielle entre mon cas et celui



Fig. 1. L'oeuf primordial dans le testicule de *Lacerta vivipara*.

Merker, Nomog. Imm  $\frac{1}{12}$ , oc. 4; longueur du tubus 160 mm; le papier au niveau de la préparation. Diminué à  $\frac{9}{10}$ .



de F r i e d m a n n: celui-ci décrit (et représente aussi pl. XV, fig. 1) autour de ses ovules un épithélium folliculaire très net tandis que les ovules de mon lézard sont placés tout à fait librement entre les spermatogonies, resp. dans la masse protoplasmique environnante.

Le processus par lequel la transformation de ces spermatogonies en ovules primordiaux s'exécute, consiste vraisemblablement en ce que la cellule s'acroît aux dépens de ses environs, comme le montre avec évidence la dégénérescence dans leur voisinage immédiat des noyaux qui se désagrègent tantôt en gouttelettes graisseuses (qui se colorent en noir par l'osmium), tantôt en masses d'une nature probablement protéinique (les formations rondes colorées en rouge foncé). J'ai décrit ci-dessus des inclusions complètement identiques dans le plasma de l'ovule même; et comme on peut penser que l'ovule s'attache pendant la vie par sa surface entière à la paroi de sa gaine il est assurément dans une excellente situation pour prendre la nourriture formée par la dégénérescence des cellules voisines et pour en faire usage pour l'agrandissement de son corps et son noyau. Je pense même que l'ovule même endommage par son activité les cellules environnantes encore vivantes et qu'il met en mouvement, du moins au début les processus dégénératifs décrits.

Nous aurions donc ici, à mon avis, un bel exemple de la concurrence de parties dans l'organisme dans le sens de R o u x, où la jeune cellule en croissance (spermatogonie) triompherait de ses environs. Quelles sont les influences qui donnent à cette cellule l'impulsion pour qu'elle prenne ces énormes proportions, ce serait difficile de le dire.

L'autre question qui se pose dans notre cas est celle du sort ultérieur de ces ovules. Est-ce qu'ils sont capables d'une évolution progressive, ou meurent-ils, et comment? Nos préparations nous donnent une réponse très claire et intéressante à ces questions.

J'ai déjà mentionné ci-dessus qu'on trouve dans les testicules décrits quelques spermatozoïdes mûrs, tantôt isolés, tantôt en petits groupes. Les canalicules de l'épididymis sont remplis d'une sécrétion fortement colorée en rouge avec une grande quantité de spermatozoïdes mûrs. Le testicule se trouve alors à l'état de repos, après la spermatogénèse, et les spermatozoïdes mûrs sont attendent dans l'épididymis le temps d'accouplement; les rares spermatozoïdes trouvés dans le testicule ne sont qu'un reste peu important dont la quantité infinitésimale disparaît à côté de la masse qui remplit l'épididymis.

En examinant avec soin nos préparations nous y trouvons assez grande proportion d'ovules primordiaux, dans le voisinage immédiat desquels se trouvent des spermatozoïdes mûrs. Quelquefois la paroi de la cavité, dans laquelle l'ovule est placé, est directement assiégée par les spermatozoïdes. Dans quelques cas, nous voyons aussi qu'une spermie a introduit la plus grande partie de son corps (ce sont surtout les têtes très allongées qui sont colorées; voir la description de B a l l o w i t z des sper-



mies de notre espèce) dans la paroi de la cavité, tandis que sa pointe pénètre dans la cavité même. Si cela arrive à la place où l'ovule s'attache à la paroi, cette pointe se trouve dans l'ovule même; là où il y a un espace libre entre l'ovule et la paroi de la cavité (par suite du ratatinement de l'ovule, voir plus haut), la pointe de la spermie fait une saillie dans cet espace, quelquefois elle produit une petite saillie du plasma environnant.

On trouvera un stade plus avancé dans le cas représenté dans la fig. 2. Nous y voyons un ovule primordial d'une forme un peu irrégulière; il n'a plus cette jolie forme arrondie ou ovale comme dans les formes les plus développées décrites plus haut, mais il présente diverses irrégularités de la surface. L'ovule représenté, s'attache en deux endroits à la paroi de sa cavité. Son noyau est clair, pourvu d'un grand nucléole et de petits grains de chromatine; sa membrane n'est pas nettement dessinée. Le plasma est encore fortement granulé; outre cela, on y



Fig. 2. Un oeuf primordial avec des spermatozoides, qui y ont pénétré. Le même aggrandissement comme fig. 1.

voit aussi des formations vacuolaires, entourées d'une paroi réfringente et remplies d'une substance amorphe, colorée en rouge ou (après la différenciation à l'aide de l'alcool avec du Vert lumière) en vert sale. Mais, en outre, nous voyons dans le plasma de l'ovule tout ceul, quantités de spermatoïdes, dont les têtes sont colorées très intensivement par la safranine. Ils sont tantôt droits, tantôt pliés, tantôt enroulés en spirale. Les uns se trouvent dans le plasma, les autres s'attachent au noyau même de l'ovule. Quelquesuns enfin ne se trouvent que partiellement dans l'ovule, le reste est placé encore dans le plasma environnant; et cela surtout à ces endroits où l'ovule adhère à la paroi.

Dans les environs de ces ovules, on trouve de nouveau tantôt de ces formations globulaires dérivées de la désagrégation des spermatogonies, tantôt des spermatogonies qui adhèrent directement au moins d'un côté à la paroi de la cavité. Comme on le voit sur la fig. 2, les noyaux normaux des spermatogonies se sont approchés de la paroi de la cavité du côté où l'ovule ne la touche pas, tandis que de l'autre côté ils sont plus éloignés de l'ovule; mais ce phénomène — quoique fréquent — n'est pas



tout à fait constant. On peut enfin trouver encore dans les environs, des spermies isolées (il y en a deux dans notre fig. 2).

Nous sommes donc en face d'ovules qui manifestent par certains symptômes (vacuoles, irrégularité de la surface) les débuts d'une dégénérescence toujours jointe à la pénétration des spermatozoïdes dans son plasma. Si l'on continue à étudier ce processus sur des stades plus avancés on trouve que la dégénérescence de l'ovule a fait des progrès; le noyau se perd, le plasma se désagrège en une masse granuleuse, dans laquelle on trouve aussi des gouttelettes colorées en noir par l'osmium (de la graisse?). On retrouve dans cette masse granuleuse des spermatozoïdes nombreux. Si nous n'avions pas découvert dans le testicule ce que nous avons décrit ci-dessus, nous n'aurions pas la moindre idée qu'il se soit trouvé là originairement une grande cellule unique; nous penserions plutôt avoir sous les yeux un amoncellement de spermatozoïdes mûrs, peut-être avec les débris restants de la spermatogénèse. Mais la suite entière des stades décrits nous montre avec évidence qu'il s'agit d'une résorption des ovules développés anormalement — dans le testicule — résorption à laquelle ont contribué au moins les spermatozoïdes, si elle n'est pas due toute fois exclusivement à leur activité qui, dans ce cas, serait phagocytaire.

Les cas de résorption des cellules sexuelles qui n'ont pas été employées à la fécondation, existent dans le règne animal. Ainsi K o v a - l e v s k y, B r u m p t ont décrit chez les sangsues des processus très intéressants, dans lesquels les spermatozoïdes, retenus dans la cavité du corps et non enfermés dans le spermatophore, parviennent dans les néphridies, qui s'accroissent considérablement dans le même temps, et y sont résorbés. A cause de cela ces organes sont nommés aussi des organes phagocytaires. C a u l l e r y et S i e d l e c k i ont trouvé chez un oursin *Echinocardium cordatum* que les spermatozoïdes et les oeufs restés après la ponte dans les glandes génitales, sont résorbés par l'activité d'éléments phagocytaires spéciaux dont ils n'ont pu constater la provenance.

Chez les grenouilles en captivité, B u r k a r d t a constaté la résorption des oeufs non fécondés. La zone pellucide disparaît, les cellules de la granulosa pénètrent dans l'oeuf, suivies de vaisseaux sanguins qui achèvent la résorption et disparaissent ensuite.

Voilà donc des cas qui, par leur résultat — disparition d'une jeune cellule sexuelle — sont, il est vrai, identiques au nôtre, mais la manière dont le processus s'est accompli est tout autre. Là on trouve pendant la résorption des cellules amoeboïdes ordinaires chez lesquelles la phagocytose ne peut pas surprendre, tandis que dans notre cas ce sont des spermatozoïdes mûrs qui se chargent de cette fonction, des spermatozoïdes restés dans le testicule et non employés à la fécondation, afin qu'ils détruisissent des éléments qui n'appartiennent pas en réalité au testicule et qui, à la fin, ont même attaqué par leur développement une quantité d'éléments maternels des spermies — les spermatogonies. C'est, je pense,



un fait jusqu'ici tout isolé dans la biologie, à moins d'expliquer d'une façon semblable quelques découvertes faites par K n a p p e dans l'organe de Bidder des crapauds.

K n a p p e décrit une sorte spéciale de dégénérescence que subissent les cellules ovulaires renfermées dans l'organe de Bidder des crapauds mâles ou même isolées à l'intérieur du testicule (mais en dehors des tubules), au cours de laquelle des cellules de l'épithélium folliculaire pénétreraient dans une grande oocyte de ce genre et une fois parvenues à l'intérieur, y donneraient naissance à des spermatozoïdes, tandis que l'oocyte dégénérerait. Il dit expressément (pag. 539) qu'il s'était d'abord figuré que les spermatozoïdes avaient pénétré dans l'oocyte, mais, lorsqu'il eut trouvé des images semblables même chez des exemplaires non encore arrivés à la maturité sexuelle, n'ayant point de spermatozoïdes dans les tubules des testicules, il ne peut s'expliquer le phénomène qu'en admettant le développement des spermatozoïdes dans les cellules de l'organe de Bidder.

Il est en fait difficile de tirer une conclusion des descriptions et des figures de K n a p p e ; O g n e w observe avec raison que ses reproductions éveillent le scepticisme. Personnellement je n'ai trouvé rien de semblable dans mes préparations de l'organe de Bidder de *Bufo vulgaris*; si cependant les découvertes de K n a p p e avaient un fond de réalité, ou pourrait peut-être les ranger à côté de notre lézard.

Je résume en terminant le résultat de mes observations:

Dans les testicules de notre exemplaire de *Lacerta vivipara*, en dehors de la période de la spermatogénèse, il se développe des spermatogonies isolées dans de grandes cellules tout à fait semblables aux ovules primordiaux; il y a donc un certain hermaphroditisme. Ces cellules s'accroissent aux dépens de leurs voisines, les spermatogonies, qui dégénèrent (c'est du moins partiellement une dégénérescence graisseuse), et leurs corps désagrégés servent de nourriture à l'ovule primordial. Voilà la première phase de cette concurrence des parties dans l'organisme, dans laquelle un élément étranger — sit venia verbo —, le jeune oocyte, reste vainqueur.

L'autre phase est défensive. La cellule ovulaire parvenue à des dimensions considérables, attire — vraisemblablement par une influence chemotactique — des spermatozoïdes adultes restés dans le testicule, la spermatogénèse terminée. Une chemotaxie positive poussant les spermatozoïdes vers l'oeuf est connue depuis longtemps entre autres la sécrétion par les archégones des fougères d'acide malique qui, à une certaine concentration, attire extraordinairement leurs spermies; il est vrai qu'elle sort dans les cas normaux à la fécondation, tandis qu'ici elle cause la destruction de l'ovule. Les spermatozoïdes affluent vers l'ovule, ils y pénètrent et le détruisent par leur activité vitale, de sorte qu'il se désagrège en débris granuleux et disparaît. Les spermies se chargent donc ici d'une fonction phagocytaire.



Mais notre cas est encore intéressant à un autre point de vue, à celui de la différenciation sexuelle. Comme partout, aussi chez les Reptiles les gonades s'ébauchent d'abord comme indifférentes en ce qui concerne le sexe; et ce n'est que plus tard que se fait la différenciation en testicule ou en ovaire. Malheureusement ces processus de développement sont justement peu connus chez les Reptiles et laissent persister des doutes; même sur des points importants qui sont déjà assez éclaircis chez d'autres groupes de vertébrés.

J'ai dit ci dessus qu'on peut suivre le développement des ovules primordiaux de cellules qui ne diffèrent en rien des autres spermatogonies. On peut naturellement penser que ces cellules ont déjà leur nature femelle et que c'est peut-être justement dans ce temps où l'activité de la partie mâle cesse (en dehors de la spermatogenèse) que ces cellules gagnent le dessus et s'accroissent aux dépens de leurs environs mâles. Plus tard seulement la partie mâle reprend le dessus, ce qui se manifeste dans la résorption de l'ovule par les spermatozoïdes. La sexualité de la gonade, dans notre cas, n'est donc pas complètement exprimée; la concurrence des deux composantes qui se termine dans le cas normal déjà dans la vie embryonnaire et dont résulte une glande purement monosexuelle, n'a pas mené ici à la victoire absolue de l'un des sexes, mais elle dure et donne, du moins pour un temps, aux éléments femelles l'occasion de dominer le champ.

Je mentionne, à la fin la plus récente communication de L e v y, d'après laquelle les ovules dans le testicule des grenouilles ne sont pas des oeufs, mais seulement des spermatogonies anormales, évent. accrues par les mitoses incomplètes des noyaux. Je ne sais pas de quelles formes il s'agissait dans les cas qu'il cite; mais je ne doute pas que dans celui de F r i e d m a n n il ne s'agît de vrais ovules primordiaux (les cellules en cause avaient un épithélium folliculaire distinct). Il en est même du Triton hermaphrodite de K ř í ž e n e c k ý; ce dernier ne fait pas, il est vrai, mention d'un épithélium folliculaire, mais j'ai pu m'assurer de son existence sur les préparations qu'il a bien voulu me communiquer.

Dans le cas présent non plus je ne puis partager l'opinion de L e v y, car dans aucun des deux testicules on ne trouve la moindre trace de mitoses atypiques.



## Bibliographie.

- B a b o r J. F.: Ein Beitrag zur Geschlechtsmetamorphose. Verh. d. k. k. zool.-bot. Ges. Wien. 1898.
- B a l l o w i t z E.: Untersuchungen über die Struktur der Spermatozoen. III. A. f. mikr. Anat. XXXVI. 1890.
- B r u m p t E.: Reproduction des Hirudinées. Mém. de la Soc. zool. de France. XIII. 1900.
- B u r k a r d t L.: Ueber die Rückbildung der Eier gefütterter, aber unbegatteter Weibchen von *Rana esculenta*. A. f. mikr. Anat. LXXIX. 1912.
- C a u l l e r y M. et S i e d l e c k i M.: Sur la résorption phagocytaire des produits génitaux inutilisés, chez l'*Echinocardium cordatum* Penn. C. R. de l'Acad. des Sciences, 1903.
- F r i e d m a n n F.: Rudimentäre Eier im Hoden von *Rana viridis*. A. f. mikr. Anat. LII. 1898.
- H o o k e r D.: Der Hermaphroditismus bei Fröschen. A. f. mikr. Anat. LXXIX. 1912.
- K n a p p e E.: Das Bidder'sche Organ. Morph. Jahrb. XI. 1886.
- K o v a l e v s k y A.: Phénomènes de la fécondation chez l'*Helobdella algira* (M.-T.). Mém. de la Soc. zool. de France. XIII. 1900.
- K ř í ž e n e c k ý J.: Ein Fall von Hermaphroditismus bei *Triton cristatus* und einige Bemerkungen zur Frage der sexuellen Differenzierung. A. f. Entw.-Mech. XLII. 1917.
- O g n e w S. J.: Ein Fall von Hermaphroditismus bei *Rana temporaria* L. Anat. Anz. XXIX. 1906.
- Materialien zu Histologie des Bidderschen Organs der Kröten. A. f. mikr. Anat. LXXI. 1908.
- v. l a V a l e t t e st. G e o r g e: Ueber eine Zwitterbildung beim Flusskrebs. A. f. mikr. Anat. XXXIX. 1892.
- L e v y F.: Ueber die sogenannten Ureier im Froschhoden. Biol. Zentralbl. Bd. 40, 1920.
-



# De la stabilité du noyau d'une comète tournant autour du Soleil suivant une conique d'excentricité arbitraire.

Dr. HENRI SVOBODA.

Dans un traité „Sur la désintégration des comètes“ (Bulletin Astronomique, XXIX, p. 94, 1912) Percival Lowell a considéré la question de la désintégration des comètes dans le cas de l'orbite circulaire, elliptique et parabolique. La méthode de Lowell consiste dans l'emploi des champs tournants autour du Soleil et autour du centre de la courbure dans le point considéré de l'orbite. Elle ne permet de déduire la condition de la stabilité qu'au moyen d'un calcul spécial au lieu considéré de l'orbite. Nous voulons dans le suivant donner une manière pour obtenir la formule générale.

Supposons que le noyau de la comète soit composé de petits corpuscules — météores, qui forment un essaim homogène sphérique. Cette supposition correspond très bien aux résultats de l'observation. En négligeant l'action perturbatrice des planètes, le corpuscule se meut sous l'influence de la force qui sort du Soleil et du centre de gravité de l'essaim.

Soit

$m_1$ ;  $\emptyset$ ,  $\emptyset$ ,  $\emptyset$  la masse et les coordonnées du centre de gravité de l'essaim,  
 $m_2$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  celles du corpuscule sur la surface de l'essaim,  
 $m_3$ ;  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $\emptyset$  celles du Soleil et  
 $r_{12}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{13}$  les distances mutuelles du centre de gravité de l'essaim, du corpuscule et du Soleil.

En négligeant dans les équations différentielles des mouvements relatifs la masse du corpuscule en comparaison de celle de l'essaim et la masse de l'essaim en comparaison de celle du Soleil et en introduisant les coordonnées polaires:

$$x_2 = r_{12} \cos \psi \cos \chi, \quad y_2 = r_{12} \cos \psi \sin \chi, \quad z_2 = r_{12} \sin \psi$$



on obtiendra pour la force exercée sur la particule suivant le rayon vecteur  $r_{12}$ , l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 r_{12}}{dt^2} - r_{12} \left[ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 \cos^2 \psi \right] \\ &= k^2 \frac{m_3}{r_{13}} \left\{ \frac{\cos \Theta - \frac{r_{12}}{r_{13}}}{\left[ 1 + \left( \frac{r_{12}}{r_{13}} \right)^2 - 2 \frac{r_{12}}{r_{13}} \cos \Theta \right]^{3/2}} - \cos \Theta \right\} - k^2 \frac{m_1}{r_{12}^2}, \end{aligned}$$

où  $\Theta$  est l'angle que fait le rayon vecteur  $r_{12}$  avec  $r_{13}$ ,

$\frac{d\chi}{dt} \cos \psi$  la vitesse angulaire autour de l'axe Z et

$\frac{d\psi}{dt}$  la vitesse angulaire autour de l'axe perpendiculaire au plan déterminé par l'axe Z et par le point  $m_2$ .

La vitesse angulaire de  $m_2$  autour de  $m_1$  est

$$\sqrt{\left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 \cos^2 \psi}.$$

Dans un système tournant avec cette vitesse autour de  $m_1$  la composante de la force dirigée suivant le rayon vecteur  $r_{12}$  est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} & r_{12} \left[ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 \cos^2 \psi \right] \\ &+ k^2 \frac{m_3}{r_{13}} \left\{ \frac{\cos \Theta - \frac{r_{12}}{r_{13}}}{\left[ 1 + \left( \frac{r_{12}}{r_{13}} \right)^2 - 2 \frac{r_{12}}{r_{13}} \cos \Theta \right]^{3/2}} - \cos \Theta \right\} - k^2 \frac{m_1}{r_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

La stabilité de l'essaim est assurée si cette expression est négative ou tout au plus égale à zéro.

Supposons que les angles  $\Theta$  et  $\psi$  restent invariables; la vitesse angulaire de l'essaim est égale à la vitesse de translation. Ensuite  $\frac{d\psi}{dt} = 0$

et  $\frac{d\chi}{dt}$  est la vitesse angulaire de  $m_3$  autour de  $m_1$ . Nous obtiendrons

cette vitesse que nous voulons désigner  $\frac{d\varphi}{dt}$ , par la solution des équations, qui nous donnent le mouvement relatif du Soleil autour du centre de gravité de l'essaim. Si nous prenons des coordonnées polaires, en posant  $x_3 = r_{13} \cos \varphi$ ,  $y_3 = r_{13} \sin \varphi$ , il vient

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{k^2 m_3 p}{r_{13}^4} = \frac{k^2 m_3}{r_{13}^3} (1 + e \cos \varphi),$$

où  $e$  est l'excentricité et  $\varphi$  l'anomalie vraie dans l'orbite de la comète autour du Soleil.



En substituant cette expression dans la formule (1) on obtiendra la condition de la stabilité

$$m_3 \varrho^3 (1 + e \cos \varphi) \cos^2 \psi + m_3 \varrho^2 \left[ \frac{\cos \Theta - \varrho}{(1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cos \Theta)^{3/2}} - \cos \Theta \right] - m_1 \leq 0, \quad (2)$$

$\varrho$  désignant le rapport  $\frac{r_{12}}{r_{13}}$ . Parce que  $\varrho < 1$  on peut simplifier considérablement l'expression en parenthèse anguleuse en développant en série des fonctions sphériques et en négligeant les secondes puissances de  $\varrho$ .

On trouve comme la condition de la stabilité

$$\frac{m_3 (3 \cos^2 \Theta + e \cos \varphi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi)}{r_{13}^3} \leq \frac{m_1}{r_{12}^3}. \quad (3)$$

Nous voyons que le premier membre,  $\varphi$  et  $r_{13}$  restant fixes — dans un point de l'orbite de la comète — sera maximum pour  $\Theta$  et  $\psi$  égale à 0 ou  $\pi$  et minimum pour  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Pour cette raison en explorant la stabilité nous nous bornerons aux valeurs  $\Theta$  et  $\psi$  égales à 0 ou  $\pi$ . Nous obtiendrons pour un point de l'orbite de la comète la condition de la stabilité

$$\frac{m_3 (3 + e \cos \varphi)}{r_{13}^3} \leq \frac{m_1}{r_{12}^3}. \quad (4)$$

Il est évident que la stabilité est le plus menacée quand l'essaim se trouve au périhélie,  $\varphi = 0$ , et le moins quand il se trouve à l'aphélie,  $\varphi = \pi$ .

De la formule générale (4) nous obtiendrons immédiatement toutes les formules déduites par Lowell une à une au moyen d'un calcul particulier. La comète passant au périhélie à la distance  $q$  du Soleil, nous avons la condition de la stabilité au cas de

l'orbite circulaire	( $e = 0$ )	$\frac{3 m_3}{q^3}$	$\leq$	$\frac{m_1}{r_{12}^3}$
l'orbite elliptique	( $e < 1$ )	$\frac{(3 + e) m_3}{q^3}$	$\leq$	$\frac{m_1}{r_{12}^3}$
l'orbite parabolique	( $e = 1$ )	$\frac{4 m_3}{q^3}$	$\leq$	$\frac{m_1}{r_{12}^3}$
l'orbite hyperbolique	( $e > 1$ )	$\frac{(3 + e) m_3}{q^3}$	$\leq$	$\frac{m_1}{r_{12}^3}$

Roché s'est rapproché beaucoup de la formule générale dans son traité „Recherches sur les atmosphères des comètes“.<sup>1)</sup> La formule de Schiaparelli<sup>2)</sup> est déduite pour le cas du mouvement direct vers le Soleil.

<sup>1)</sup> Annales de l'observatoire de Paris, V (1859), p. 353 et suiv. Voir aussi Tisserand IV, p. 245 et suiv.

<sup>2)</sup> Entwurf einer astronom. Theorie der Sternschnuppen, p. 165. Voir aussi Tisserand IV, p. 258 et suiv.



En écrivant l'inégalité (4) dans la forme

$$\frac{m_3 (3 + e \cos \varphi)}{\frac{4}{3} \pi r_{13}^3} \leq \frac{m_1}{\frac{4}{3} \pi r_{12}^3},$$

le deuxième membre nous donne la masse contenue dans l'unité de l'espace.

Désignons par  $\mu$  la masse renfermée dans l'unité de l'espace. L'inégalité deviendra

$$\frac{m_3 (3 + e \cos \varphi)}{\frac{4}{3} \pi r_{13}^3} \leq \mu. \quad (5)$$

Nous voyons de la formule, que l'influence de l'excentricité — en ne considérant que les orbites elliptiques et paraboliques — sur la stabilité du noyau n'est pas considérable. Pour la comète de Halley (durée des révolutions 76 a) et de Brorsen (5.5 a) nous obtiendrons au périhélie ( $\log q = 9.770$ )

$$\mu \geq 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/dm}^3.$$

Au contraire la distance de l'essaim du Soleil influence la stabilité très notablement. La densité du noyau de la comète, qui se trouve au périhélie très proche du Soleil, doit être considérable pour que le noyau soit à l'abri de désintégration. Si la densité est insuffisante le noyau prend, en se rapprochant du Soleil, la forme d'un ellipsoïde, dont le grand axe est dirigé suivant le rayon vecteur. Les particules tendent à se mouvoir dans les orbites qui correspondent à leur situation à l'égard du Soleil. Au cas où le noyau n'est pas complètement homogène, ce qui est plus que probable, des essaims se forment autour des centres d'une plus grande densité. Ces essaims se meuvent dans les orbites indépendantes mais troublées naturellement par l'action des noyaux voisins. De là s'ensuit la division du noyau de la comète. Un exemple typique nous présente la comète 1882 II, dont le noyau s'est partagé lors du périhélie en plusieurs parties. En outre on a trouvé un groupe de comètes 1843 I, 1880 I et 1882 II, dont les orbites manifestent une grande affinité. Ce problème fut détaillé par H. K r e u t z dans un traité „Untersuchungen über das Cometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II“.<sup>3)</sup> K r e u t z et de même Bredichin<sup>4)</sup> cherchaient l'explication de la désintégration d'une comète par le procès éruptif du noyau. Je veux prouver que la division de la comète en ce cas peut se faire sous l'influence de la force perturbatrice provenant seulement du Soleil.

<sup>3)</sup> Publication der Königl. Sternwarte in Kiel, III, (1888), VI. (1891); Astronomische Abhandlungen als Ergänzungshefte zu den Astronom. Nachr. Nr. 1. (1901).

<sup>4)</sup> Astronom. Nachr. 121 (1888) p. 331; Bulletin de la Société Imper. des Naturalistes de Moscou (1889), No 1, p. 13 et 59.



Sortons des éléments qu'a déduit Kreutz<sup>5)</sup> pour le noyau de la comète 1882 II des observations faites avant le périhélie. Nous obtenons la condition de la stabilité au périhélie

$$\mu \geq 1.25 \text{ kg/dm}^3.$$

La densité de l'essaim devrait être 450.000 fois majeure que dans le cas de la comète de Halley ou Brorsen. C'est la densité si considérable qu'il semble peu vraisemblable de satisfaire à la condition de la stabilité. Finlay a obtenu<sup>6)</sup> au Cap de Bonne-Espérance peu de temps avant le périhélie 4'' pour le diamètre du noyau, c'est  $1.924 \cdot 10^{-5}$  (le rayon de l'orbite terrestre étant 1).

Admettons que sur cette longueur, pendant le périhélie, se forment trois essaims également éloignés les uns des autres, qui, ayant eu au périhélie une vitesse égale, suivraient les orbites indépendantes. Calculons les changements de l'excentricité en comparaison avec l'excentricité avant le périhélie.

De la formule pour la vitesse au périhélie ( $v$ ) nous obtiendrons la relation

$$1 + e = \frac{v^2}{k^2} q.$$

En différentiant ( $v = \text{const.}$ ) on obtiendra la formule

$$\Delta e = \frac{v^2}{k^2} \Delta q = \frac{1 + e}{q} \Delta q = \frac{2}{q} \Delta q.$$

En substituant dans la formule les valeurs en question ( $\log q = 7.88899$ ,  $\Delta q = \pm 6.41 \cdot 10^{-6}$ ) on obtiendra pour les essaims de côté

$$\Delta e = \mp 0.0016564,$$

d'où il suit pour l'essaim plus

proche du Soleil	éloigné du Soleil
$e = 0.9982766$	$1.0015894$
$a = 4.49$	$4.88$
$U = 9.5 \text{ a}$	—

Kreutz a obtenu pour les différents noyaux observés après la division de la comète.<sup>7)</sup>

	1.	2.	3.	4.
$\log q =$	7.8895744	7.8894539	7.8896685	7.8897581
$e =$	0.9998982	0.9999080	0.9999158	0.9999206
$a =$	76.22	84.40	92.20	97.80
$U =$	665.6	775.3	885.2	967.2 a

<sup>5)</sup> Publ. Kiel, VI, p. 51.

<sup>6)</sup> Publ. Kiel, III, p. 39.

<sup>7)</sup> Publ. Kiel, VI, p. 48, 44, 45, 46.



et pour le système des comètes<sup>8)</sup>

	1843 I	1880 I	1882 II
$\log q =$	7.7425105	7.7439036	7.8889895
$e =$	0.9999137	0.9999357	0.9999330
$a =$	64.033	86.18	115.3
$U =$	512.39	800.0	124.5 a.

Les excentricités sont comprises dans un intervalle plus étroit que donne notre calcul ce qui est naturel, car sous l'influence de l'attraction des essaims les uns sur les autres encore un peu de temps après la division, les différences se sont amoindries. Le but de notre considération était de prouver que la force perturbatrice provenant seulement du Soleil suffit à diviser le noyau, ce qui nous a réussi complètement.

---

<sup>8)</sup> Astr. Abhandlungen, No 1, p. 29, 47, 51.



# Découverte de la faune *Euloma-Niobe* près de Ouvaly (Bohême)

par

C. KLOUČEK.

Présenté le 13 janvier 1922.

La première découverte de la vraie faune *Euloma-Niobe* (d'après W. C. Brogger) en Bohême a été faite par l'auteur en 1914 près d'*Olešná*, village qui se trouve à peu près à 50 kilomètres au sud-ouest de Prague. En 1920 il eut la chance de découvrir de nouveau cette même faune près d'*Ouvaly* (Úvaly), village situé à l'est de Prague. Elle s'y trouve dans deux couches, peu importantes, de tuffites intercalées dans des couches de la cornéenne.

Quoique ces deux localités ne soient éloignées l'une de l'autre que d'à peu près 55 kilomètres, leurs faunes sont assez différentes et n'ont que quelques espèces communes.

Jusqu'à ce jour 15 espèces de trilobites de la faune *Euloma-Niobe* ont été trouvées à Ouvaly par l'auteur et par M. J. Koliha, du Musée National à Prague (Barrandeum). Parmi elles six sont de caractère cambrien:

*Euloma* sp.

*Ceratopyge* sp.

*Apatcephalus* sp.

*Parabolinella* sp.?

*Harpides* cf. *rugosus* Sars et Boeck?

une nouvelle espèce de la famille *Olenidae*;

six autres de caractère silurien:

*Symphysurus* sp.

*Nileus* sp.

*Niobe* sp.?

*Asaphellus* sp.?

*Cheirurus* sp.

*Amphion* sp.

et enfin trois du genre *Agnostus*.



*Le caractère septentrional de cette faune prouve qu'alors la mer du Silurien inférieur de la Bohême était reliée à celle de la Scandinavie et aussi qu'en Bohême le nord de cette mer fut, pendant un certain temps, partiellement séparé de la partie sud où vivait une faune *Euloma-Niobe* assez différente, ainsi que le démontrent les empreintes d'Olešná.*

La faune des couches les plus inférieures de  $Dd_1\alpha$  au sud-ouest de la Bohême n'est pas non plus absolument identique à celle des couches les plus inférieures de  $Dd_1\alpha$  dans sa partie nord et nord-est (Libešov, Ouvaly).

Stratigraphie. La faune *Euloma-Niobe* se trouve à Olešná dans le  $Dd_1\alpha$  ( $d\alpha$  selon R. Kettner et O. Kodym), c'est-à-dire dans sa partie moyenne,  $d\alpha_2$ , où elle est renfermée dans une couche de cornéenne mesurant à peine 20 cm d'épaisseur. Cette faune se trouve aussi à Ouvaly dans le  $d\alpha_2$ . Là, à un mètre de distance à peu près, sous la couche inférieure contenant les empreintes de la faune *Euloma-Niobe*, s'étend, déposé *en concordance*, un gisement de minerai de fer. Jusqu'à maintenant ce gisement était considéré comme appartenant au  $Dd_1\beta-d\beta$  (L. et Fr. Slavík etc.) ou au Cambrien supérieur (O. Kodym).

Mais à environ 200 m de là, dans un puits de recherche, on a pu constater aussi l'existence de tuffites avec cornéennes et les termes les plus inférieurs du  $Dd_1\alpha-d\alpha$  avec *Obolus Feistmanteli* Barr. et avec quelques nouvelles espèces de Brachiopodes au-dessous du gisement de minerai de fer.

Le gisement de minerai de fer d'Ouvaly appartient par conséquent au  $d\alpha_1$  et non pas au  $d\beta$  ou au Cambrien supérieur.



# Contribution à la connaissance du Crétacé sur la feuille de Prague.

Par

ALOIS MATĚJKA (Prague).

Présenté le 13. janvier 1922.

Dans cette étude il est question du Crétacé de la contrée se trouvant entre *Kobylisy*, *Ďáblice*, *Čakovice*, *Myškovice*, *Brázdím*, *Brandýs n. L.*, *Radonice*, *Satalice* et *Hloubětín* au nord-est de *Prague*. Cette contrée est remarquable par les irrégularités dans le développement des couches crétaées, irrégularités causée par l'inégalité de la surface topographique à l'époque de la transgression crétaée. Les couches du Crétacé sont transgressives par rapport à celles de l'Algonkien ou du Silurien inférieur; les lydites résistant à la désagrégation, avec des bandes de grauwackes et de schistes plus fermes et aussi par endroits avec conglomérats du Silurien inférieur, formaient des collines basses ou des monadenocks abrupts, s'élevant au-dessus de la surface anté-crétacée légèrement ondulée. Les quarzites de Drabov du Silurien inférieur ont moins contribué à la morphologie et n'ont formé des surélévations que là, où, par suite de dislocations tectoniques, elles forment quelques bandes parallèles et rapprochées.

Le Crétacé y est représenté par la zone I (couches de Peruc de Krejčí et de Frič), la zone II. (couches de Korycany) et la zone III (couches de Bílá Hora). Ces trois zones sont visibles sur la pente qui s'étend de Kobylisy vers l'est jusque près de Hloubětín. Au-delà de cette pente vers le nord s'étend un plateau boisé formé de ces trois zones. Ce plateau incline vers le nord dans la direction de Čakovice et de Vínů. Les deux zones inférieures y affleurent en de belles coupes naturelles, tandis que la troisième y a été enlevée par la dénudation. La partie nord-est de la contrée, dont on parle dans cet essai, est une plaine légèrement ondulée, arrosée par le ruisseau Valcha, qui a coupé les couches crétaées jusqu'au substratum silurien. Au nord de ce ruisseau, au-dessus de la plaine, s'élèvent des collines formées par des couches algonkiennes avec des monadenocks



de lydite qui ont déjà été recouverts en partie par la zone II, ou seulement par la zone III. Les quartzites de Drabov, du Silurien inférieur qui, par endroits s'élevaient au-dessus de la surface anté-cretacée, ne forment plus aucun relief dans la contrée actuelle.

*La zone I.* se termine en biseau vers le nord et le nord-est, sur la ligne qui court entre Veleň et Myškovice, puis au nord de Přezletice et de Dřevčice et se continue vers Brandýs n. L. Près de Prosek, où la puissance totale est à peu près de 22 mètres on peut distinguer *trois bandes*. A la base se trouvent des *conglomérats* et des *grès ferrugineux* (puissance 0—4 m). Sur eux reposent des *schistes argileux* et des *argiles* d'une puissance considérable, surtout au nord de Hloubětín où cette série de couches atteint 9 m d'épaisseur. Elles contiennent une riche flore connue par les ouvrages de V e l e n o v s k ý. Lorsque les conglomérats et les grès ferrugineux ne sont pas développés, ces couches sont alors transgressives par rapport au Silurien inférieur. Des grès *parallélépipédiques*, *kaolineux* et *argileux* reposent sur ces schistes argileux et sur les argiles. La puissance des argiles et des schistes argileux va en diminuant vers le nord, de sorte que, près de l'aérodrome de Kbely elle n'a plus que 160 cm pour disparaître enfin tout à fait. Dans le voisinage de la ligne citée plus haut, se sont développés des couches correspondant aux parties supérieures des grès kaolineux de Prosek. Ce sont de même des grès kaolineux mais leur composition totale diffère du développement normal par suite du voisinage d'un ancien rivage et leur puissance oscille entre 13—0 m. Près de *Dřevčice*, où leur puissance totale atteint  $2\frac{3}{4}$  m, des *conglomérats* et des *grès ferrugineux* affleurent à leur base, quoique ailleurs, quand ces grès kaolineux sont transgressifs, par rapport aux formations antérieures, leur composition *ne change ordinairement* pas. Par places il ne contiennent que des débris anguleux des roches du Silurien inférieur qu'ils surmontent. Entre *Jenštejn* et *Čvrčovice* et au-delà vers Brandýs ils renferment *deux couches de conglomérats*, contenant, par places, des débris de *quartzites* provenant de monadenocks quartziteux. Au nord-est de *Popovice* et près de *Hrušov* ils contiennent en outre une couche de schistes *argilo-sableux* et d'*argiles* de l'épaisseur d'un mètre qui se trouve 1½—2 m au-dessous de la limite inférieure de la zone II.

*La zone II*, là où elle est transgressive par rapport à la zone I, est formée de *grès argileux*, *vert foncé* à *glauconie*, dont la puissance oscille entre 60—130 cm. Une couche de grès ou de conglomérat peu cohérents, d'une puissance de 10—20 cm, se trouve parfois développée à sa base. Dans le voisinage de la ligne où les couches de la zone I se terminent en biseau, la *puissance* de la zone II *augmente par places* et ses couches *perdent leur caractère argileux* (*Dřevčice*, „Skála“ près de Brandýs n. L.). En d'autres endroits, près de *Myškovice* et de *Veleň* par exemple, leur caractère lithologique *ne change pas*, même là où elles sont *transgressives* par rapport à l'Algonkien.



La zone II entre *Brázdím*, *Popovice* et *Brandýs* où elle est aussi transgressive par rapport à l'Algonkien, est formée soit de *grès roux à mica blanc* soit *degrès en dalles à glauconie* et par endroits contient à sa base, une couche de *grès ou de conglomérats ferrugineux*. Sur le versant sud-ouest du monadenock de lydite, dit „Kuchyňka“, près de Brázdím la zone II est développée en forme *de conglomérat littoral*. Celui-ci se compose de cailloux arrondis et de débris anguleux de lydite, noyés dans un ciment ferrugino-sableux ou marno-sableux. Des débris de coquilles d'huître sont les seuls représentants de la faune. Des cailloux roulés du quartzite de Drabov se trouvent à la base de la zone II au nord de Dřevčice, sur le versant sud de l'ancien îlot anté-crétacé, formé de quartzite de Drabov.

La zone III est formée, à sa base, par une série de couches *d'argiles*, de *marnes* et *d'argiles marneuses* d'une puissance de 3 à 4 m (bande IIIa). Par endroits elles sont *transgressives* par rapport à l'Algonkien (au nord de Myškovice et sur le Kuchyňka près de Brázdím). Là elles perdent leur stratification, contiennent des débris anguleux de lydite et sont un peu sableuses. L'existence de roches du même genre a été constatée dans le *faciès récifal* de la zone III sur le *Ládví*, colline de lydite près de Ďáblice; elles y comblent des dépressions en forme de poches et contiennent des cailloux arrondis de lydite. Au-dessus de la bande IIIa, là où elles n'ont pas été enlevées par la dénudation, se trouvent des *marnes sableuses* avec des spicules d'éponges et des *intercalations* ou des *concrétions* de *calcaire siliceux* (bande IIIb).

La tectonique des couches crétacées est très simple. Leur *inclinaison* totale est N. E. dans l'étendue du plateau crétacé, si on peut nommer plateau ce district où les dépôts crétacés sont interrompus par des surélévations anté-crétacées. L'angle d'inclinaison est si faible qu'il est impossible de l'évaluer directement par la boussole. Les *dislocations* qui coupent les couches crétacées sont des failles peu importantes de direction N. W.—S. E. Le déjettement dépasse rarement 2 m.

*Service géologique  
de la République Tchécoslovaque.*



# Document stratigraphique démontrant l'oscillation du niveau de la mer Adriatique à l'époque Holocène.

Par

JAROSLAV PETRBOK.

Présenté le 13 janvier 1922.

Près des bains de Baška sur l'île de Krk, dans le nord de l'Adriatique, se trouve une couche des cailloutis marins d'une épaisseur de 40 cm, entre deux couches de dépôts d'eau douce d'âge *Holocène*. La couche inférieure ne contient que des *Hydrobies* (*Pseudoamnicola conovula* Frfld.); il ne s'y trouve aucune autre espèce soit marine, terrestre, ou d'eau douce. Le bas de la couche supérieure comprend exclusivement une faune d'eau douce (*Limnaeus pereger* Müll., *Planorbis* sp., *Ancylus* sp.) et dans le haut de cette couche se trouvent aussi des espèces *hygrofiles* (*Succinea*). La couche moyenne renferme une faune exclusivement marine (*Cerithium vulgatum* Brug., *Trochus turbinatus* Born., *Pecten* sp. etc.); en quelques endroits on a constaté des traces du creusement des *Acephales* perforantes; les *Serpulites* fixés y ont aussi été trouvés. L'étude de ces faunes isolées, tout à fait indépendantes se trouvant dans des couches très nettement limitées nous prouve l'existence d'*oscillations relatives du niveau de la Mer Adriatique à l'époque Holocène*. L'épaisseur de la couche intercalée formée par des dépôts marins, ainsi que sa hauteur au-dessus du niveau de la mer excluent catégoriquement la possibilité que la tempête ait donné lieu à ces formations. La présence dans cette couche d'éléments exclusivement marins et le manque absolu de ceux n'étant pas d'origine marine, jetés sur le rivage par des tempêtes, sont une preuve indiscutable de submersion marine durable.

Tout l'ensemble des couches est recouvert d'une couche de 2 mètres d'épaisseur de „terra rossa“, avec une faune subrécente purement terrestre (*Helix conica* Drap., *carthusiana* Müll., *vermicullata* Müll., *Buliminus detritus* Müll., *tridens* Müll., sp., *Pupa frumentum* Drap., *Glandina Poiretti* Fér., *Stenogyra decollata* L., *Cyclostoma elegans* Müll.),

---



# Note à la surface remplie par des foyers des sections paraboliques d'un parabololoïde hyperbolique.

Par

Dr. VLAD. MAŠEK.

Présenté le 28 avril 1922.

1. Dans le travail sur cette surface<sup>1)</sup> nous avons considéré la surface  $P^4$  qui était remplie par des foyers de toutes les sections paraboliques d'un parabololoïde hyperbolique  $H$  donné par l'équation

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

L'équation de la surface  $P^4$  était de la forme

$$(1) \quad 4(x^2 b^2 - a^2 y^2)^2 - 4z a^2 b^2 (x^2 b^2 - y^2 a^2) - a^2 b^2 (y^2 a^4 + x^2 b^4) = 0.$$

Nous avons démontré que la surface en question est la surface de Steiner. La surface  $P^4$  se forme, si nous déplaçons toutes les paraboles qui passent par le sommet du parabololoïde donné, afin que leurs foyers coïncident avec le point  $F$ , qui se trouve sur l'axe  $z$  du parabololoïde à la distance  $z_F = \frac{a^2 - b^2}{4}$  de son sommet.

En voulant étudier les qualités de la surface  $P^4$ , introduisons dans l'équation de la surface des coordonnées klinogonales de la manière, que les génératrices principales  $h_1$  et  $h_1'$  du parabololoïde donné  $H$  se confondront avec des nouvelles axes  $x'$  et  $y'$  et l'axe  $z' \equiv z$ . Puis nous obtiendrons l'équation de la surface considérée en forme

$$(2) \quad 64 x^2 y^2 - 16 x y z (a^2 + b^2) - (x^2 + y^2) (a^2 + b^2)^2 + 2 x y (a^4 - b^4) = 0.$$

Nous avons démontré en haut que la surface comprend en tout trois droites doubles, c'est à dire l'axe  $z$  et les droites  $u_\infty$  et  $v_\infty$  qui sont

---

<sup>1)</sup> Rozpravy: Roč. XXX. Tř. II. Čís. 33; Bulletin international 1922.



données dans la direction des plans directeurs du paraboloïde  $H$ . Cela posé, étudions les propriétés des sections hyperboliques de la surface  $P^4$  avec des plans parallèles passant par la droite double  $u_\infty$ . On peut démontrer les théorèmes suivants:

„Le lieu des centres de ces sections hyperboliques est une droite menée parallèlement à l'axe  $y'$  à la distance  $z = \frac{a^2 - b^2}{8}$  au-dessus du plan  $(x' y')$ .“

„Les projections dans la direction de l'axe  $y'$  des sommets des sections hyperboliques qui se trouvent dans les plans passant par la droite double  $u_\infty$ , remplissent le cercle  $k_2'$  qui a pour radius  $\frac{a^2 + b^2}{8}$ .

Alors ces sommets se trouvent dans l'espace sur un cylindre passant par le cercle  $k_2'$  qui a pour l'axe une droite parallèle avec  $y'$ . Le cercle  $k_2'$  passe par des points cuspidaux  $V$  et  $V'$  de la surface  $P^4$ , qui sont identiques avec les sommets des paraboles se trouvant dans les plans principaux du paraboloïde donné  $H$ .

„Les foyers des sections hyperboliques de la surface  $P^4$  avec les plans passant par les droites doubles  $u_\infty$  et  $v_\infty$  se trouvent dans l'espace sur les tangents des paraboles aux points cuspidaux  $V$  et  $V'$  de la surface  $P^4$ .“

2. Considérons le cylindre circonscrit à la surface  $P^4$  d'un point arbitraire de la droite double  $u_\infty$ . L'angle des génératrices de ce cylindre avec le plan  $(x' y')$  étant  $\varphi$ , plaçons le commencement  $O$  des coordonnées klinogonales au point  $O'$  ( $z = \frac{a^2 - b^2}{8}$ ); nous obtiendrons l'équation du cylindre circonscrit dans la forme

$$64 y^2 - 16 y (a^2 + b^2) \operatorname{tg} \varphi + 64 ((z - x \operatorname{tg} \varphi)^2 - (a^2 + b^2)^2) = 0.$$

Pour  $x = 0$  nous obtiendrons l'équation de la courbe d'intersection du cylindre avec le plan  $(y' z)$ . Cette courbe a l'équation

$$(3) \quad \left[ y - \frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tg} \varphi}{8} \right]^2 + z^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{64}$$

L'équation montre que le plan  $(y' z)$  coupe le cylindre circonscrit dans un cercle. Désignons le  $l_3'$ . Pour  $y = 0$  on obtient de l'équation  $z = \pm \frac{a^2 + b^2}{8}$ , d'où résulte que le cercle  $l_3'$  passe par des points cuspidaux

$V$  et  $V'$ . En changeant l'angle  $\varphi$  nous obtiendrons tous les cylindres circonscrits à la surface  $P^4$  des points de la droite double  $u_\infty$ . Alors ces cylindres sont coupés par le plan  $(y' z)$  dans un faisceau des cercles passant par des points  $V$  et  $V'$ . Il en résulte que le plan  $(y' z)$  est la direction d'un système des plans cycliques de ces cylindres. D'après cela est aussi le plan  $(x' z)$  la direction d'un système des plans cycliques des cylindres circonscrits à la surface  $P^4$  des points de la droite double  $v_\infty$ .



Nous avons démontré que les plans passant par des droites doubles  $u_\infty$  et  $v_\infty$ , c'est à dire les directions des plans directeurs du paraboloid  $H$ , sont les directions des plans cycliques des cônes circonscrits à la surface des points de l'axe  $z$ . Nous avons donc le résultat suivant:

„Les cônes, resp. les cylindres circonscrits à la surface  $P^4$  des points des droites doubles  $z$ ,  $u_\infty$  et  $v_\infty$ , sont les surfaces de 2<sup>e</sup> degré et les plans passant par des droites doubles  $u_\infty$  et  $v_\infty$  sont les directions des plans cycliques de ces surfaces circonscrites.“

3. Menons par le centre  $S$  ( $y_0 = \frac{a^2 + b^2}{8} \operatorname{tg} \varphi$ ;  $z_0 = 0$ ) du cercle  $l_3'$  l'axe du cylindre considéré. Cette axe est donnée par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} y = \frac{a^2 + b^2}{8} \operatorname{tg} \varphi \\ z = x \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

Par élimination du paramètre  $\operatorname{tg} \varphi$  des équations (4) nous obtiendrons

$$(5) \quad x y = \frac{a^2 + b^2}{8} \cdot z.$$

On voit de l'équation (5) que le conoïde rempli par des axes des cylindres circonscrits à la surface  $P^4$  des points de la droite double  $u_\infty$  est un *paraboloïde hyperbolique*.

Si nous introduisons dans l'équation (5) du paraboloid  $H$  des coordonnées orthogonales  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nous obtiendrons l'équation

$$(6) \quad z = \frac{2 x^2}{a^2} - \frac{2 y^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{8}.$$

Si nous comparons l'équation (6) avec l'équation du lieu géométrique des centres de toutes les  $\infty^2$  coniques de la surface  $P^4$ , que nous avons trouvés dans le travail précédent, on voit, que ces deux équations sont identiques.

Nous arrivons donc à un résultat intéressant:

„Les axes des cylindres circonscrits à la surface  $P^4$  des points des droites doubles  $u_\infty$  et  $v_\infty$  remplissent les deux systèmes des génératrices d'un *paraboloïd hyperbolique*  $H$ , qui coïncide avec le lieu géométrique des centres des toutes les coniques de la surface  $P^4$ .“

On trouve facilement que le paraboloid hyperbolique  $H$  est identique avec le paraboloid hyperbolique rempli par des axes imaginaires des hyperboles de la surface  $P^4$  se trouvant dans les plans qui passent par des droites doubles  $u_\infty$  et  $v_\infty$ .



# Le Vysoká dans les Petits Carpathes. (L'étude phytogéographique.)

Par

PhDr. FRANT. A. NOVÁK,  
chargé de cours à l'Université Charles à Prague.

Présenté le 27 mai 1922.

Le plus haut sommet dans les Petits Carpathes, le Vysoká (754 *m*), s'élève dans le circuit calcaire du nord des Petits Carpathes, qui, quant à la phytogéographie et la floristique, représente une région formée et indépendante et qui a des rapports plus proches aux rochers de Podhradské Skály et aux pays montagneux qui accompagnent le Váh d'ouest, qu'au circuit méridional calcaire des Petits Carpathes (Děvínská Kobyla = Thebner Kobel, Děvín = Deveny, et coteaux de Hainburg).

Quand nous montons de Pezinek sur le Vysoká nous observons les zones de formations végétales suivantes: Sur la plaine on trouve la zone de culture, des champs, des prés, des pacages et rarement des vignes. Celle-ci est suivie par la zone des vignobles aux pieds des pentes qui ne s'étend souvent que jusqu'à 250 *m* s. m. et qui héberge une flore thermophile caractéristique sur les raies, le long des chemins, sur les murs des vignes, sur les murgiers et sur les petits coteaux qui sont restés incultivés. Au dessus de cette zone, nous voyons celle des arbustes xérophiles accompagnés de la formation des pentes fleuries. Plus haut passent les arbustes xérophiles dans un bois, formé surtout par des charmes et des chênes avec un sous-bois qui possède souvent un caractère hercynique. A la hauteur moyenne de 450 *m* s. m. ce sont les hêtraies qui relèvent la formation des bois.

Nous pouvons trouver ce changement des zones partout sur la déclivité orientale des Petits Carpathes — ça d'une manière bien distincte, là seulement après avoir examiné la formation morphologique du terrain. La limite inférieure des hêtraies est plus élevée souvent sur les pentes du sud et même elles y sont absentes plusieurs-fois; sur les déclivités du nord les hêtraies sont beaucoup plus étendues au préjudice des autres formations.

Les formations sont souvent liées par des transitions, parfois très donces, et dans les formations elles — mêmes on peut observer l'influence de l'homme et des animaux.



La zone des hêtraies est le mieux conservée. Des hêtraies magnifiques s'étendent sur le sommet du Baba (639 m) et plus loin sur les chaînes vers la coline de Starý Kopec (515 m) et celle de Čertův Kopec (747 m) et puis sur le Vysoká (754 m) — ça et là très vieilles, aux tiges très hautes et puissantes. Quelquefois elles sont bien fourrées, presque sans sous bois, une autre fois les arbres s'entrouvrent un peu, mais le sous-bois reste pauvre, enfin on rencontre aussi une riche formation des types des hêtraies, parmi lesquels prédominent les mésothermophytes européens (11 sp.). Plus rares sont les éléments circompolaires (5), les mésothermophytes eurasiatiques (5) et les mésothermophytes euro-sibériens (4) et d'une manière subordonnée on y voit des éléments euro-orientaux (2) et les types méridionaux (2). Aux types des hêtraies s'associent les espèces qui sont fréquentes dans tous les bois feuillus, mais qui par son abondance sont caractéristiques pour les hêtraies (16), parmi lesquelles prévalent les éléments circompolaires (5) et les mésothermophytes européens (4), tandis que les éléments euro-sibériens (3) et euro-alpins (2) sont plus rares; secondairement se présentent les mésothermophytes eurasiatiques (1) et les espèces euro-orientales. Ça et là on aperçoit des plantes rudérales (3) qui sont caractéristiques par la fréquence pour les hêtraies et enfin d'un alure accessoire les espèces des forêts et bois feuillus, où prédominent des éléments circompolaires (5), puis européens (3), eurasiatiques (3) et les mésothermophytes euro-sibériens. Seulement secondairement on retrouve des éléments euro-orientaux, méridionaux, les espèces pannoniques et les cosmopolites.

La localité la plus intéressante sur le Vysoká sont les rochers calcaires du sommet. Sur les parois du nord, dans les fissures abritées, on trouve *Cystopteris fragilis*, *Poa badensis*, *Moehringia muscosa*, *Geranium lucidum*, *Draba aizoides*, *Teucrium montanum*, puis *Dianthus Lumnitzeri*, *Arabis arenosa*, *A. petraea* et *A. alpina*.\*) Cette espèce, un type arcto-alpin, est la plus intéressante du Vysoká par sa station primaire (nous pouvons la trouver aussi dans une fissure du Bílá Skála) qui est extraordinairement peu élevée. Du sommet du Vysoká (754 m) nous pouvons la suivre vers la nord-est jusqu'à 580 m, vers le sud-ouest jusqu'à 500 m s. m.

Parce que cette localité est primaire et ainsi isolée, nous en concluons, que l'*Arabis alpina* est sur le Vysoká un relique glacial remarquable qui nous montre dans le circuit calcaire du nord des Petits Carpathes un élément déalpin le plus typique.

Sur la déclivité du nord du Vysoká nous trouvons dans les hêtraies beaucoup d'éléments intéressants qui documentent leurs caractère montagnards par lequel ils s'approchent plutôt des hêtraies du pays montagneux du Váh occidental que des hêtraies sur le Kobyla (Thebener Kobel).

---

\*) Ms. J. Černý a constaté l'existence de *Arabis procurrens* W. K. sur le Vysoká.



# La brookite de Bobrůvka (Moravie).

Par

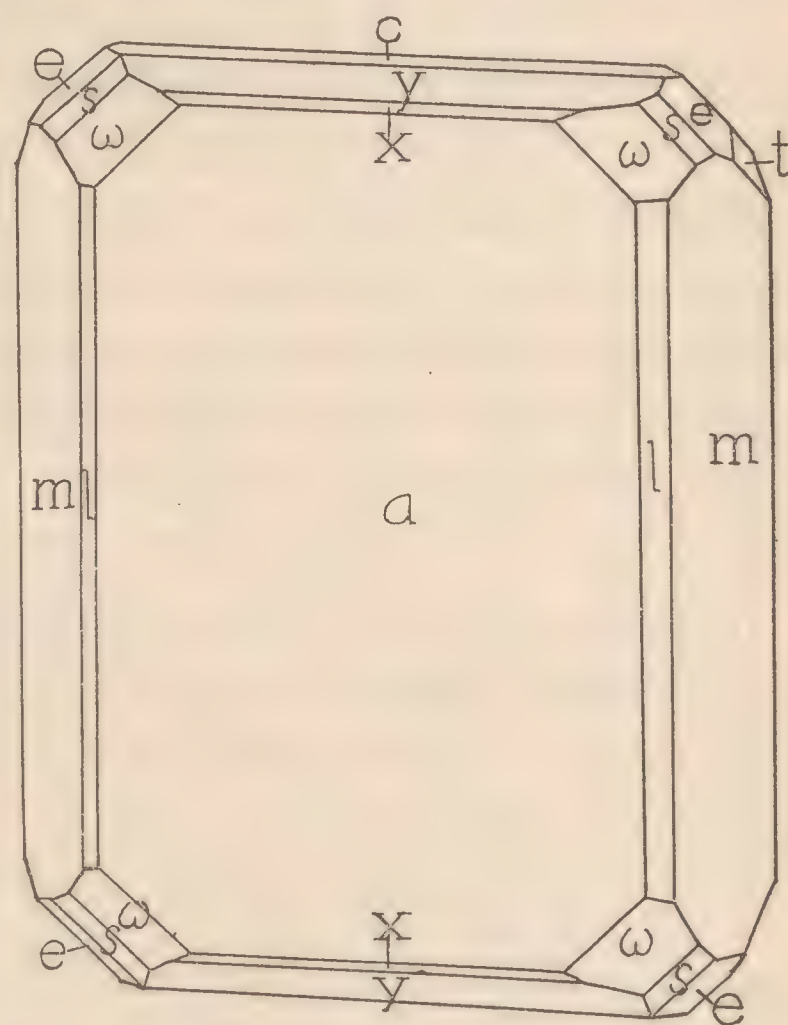
F. ULRICH à Prague.

Avec 1 figure.

Présenté le 13 janvier 1922.

La brookite de Bobrůvka, village situé à N.-E. de Velké Meziříčí (Moravie occidentale), est un minéral pneumatolytique dans une pegmatite constitué presque totalement par l'albite, qui passe de la roche même aux cavités des cristaux orientés parallèlement dans toute l'étendue de la cavité. Elle est accompagnée de cristaux de quartz enfumé, presque contemporains; ensuite viennent les cristaux prismatiques de tourmaline noire, de muscovite en cristaux aplatis pseudohéxagonaux, d'apatite en prismes courts d'une couleur vert grisâtre et, rarement, de cristaux très petits (n'ayant que 0.5—2 millimètres de longueur) de brookite.

Par l'examen goniométrique de six cristaux, les formes suivantes ont pu être constatées:



$a$  (100)  $c$  (001),  $m$  (110),  $l$  (210),  $x$  (102)  $y$  (104),  $t$  (021)  $e$  (122),  $s$  (322),  
\* $\omega$  (944).

La forme dernière est nouvelle pour la brookite. Les cristaux sont — comme d'habitude — aplatis suivant (100). Les angles mesurés sur un



goniomètre à deux cercles et ceux calculés des paramètres de Kokšarov:  $a : b : c = 0.8416 : 1 : 0.944$  sont les suivants:

Numéro		Symbol		Mesurés		Calculés		Notices
		Miller	Gold-schmidt	$\varphi$	$\varrho$	$\varphi$	$\varrho$	
1.	<i>c</i>	001	0	—	0° 00'	—	0° 00'	Le crist. n. 1, 2, 3, 5, 6
2.	<i>a</i>	100	$\infty 0$	90° 00'	90° 00'	90° 00'	90° 00'	Sur tous les cristaux
3.	<i>l</i>	210	$2\infty$	67° 08'	89° 58'	67° 10'	90° 00'	1, 4, 6
4.	<i>m</i>	110	$\infty$	49° 58'	90° 00'	49° 55'	90° 00'	Sur tous les cristaux.
5.	<i>t</i>	021	02	0° 00'	62° 05'	0° 00'	62° 06'	Le cr. n. 1, 6
6.	<i>y</i>	104	$1/4 0$	90° 00'	15° 32'	90° 00'	15° 40'	Le crist. 1, 2, 3, 4, 5, 6
7.	<i>x</i>	102	$1/2 0$	90° 00'	29° 23'	90° 00'	29° 18'	Sur tous les cristaux.
8.	<i>e</i>	122	$1/2 1$	30° 44'	47° 50'	30° 43'	47° 41'	Sur tous les cristaux.
9.	<i>s</i>	322	$3/2 1$	60° 52'	62° 56'	60° 42'	62° 36'	Le cr. 1, 3, 5, 6
10.	<i>w</i>	944	$1/4 1$	69° 27'	69° 46'	69° 29'	69° 39'	Le cr. 1, 6

Par l'analyse spectrale, exécutée avec l'aide bienveillante de M. Jan Štěrba - Böhm, professeur de chimie à l'Université Charles IV de Prague, les éléments suivants ont été constatés:

Ti, Fe, Sn, Pb, Si; Ge en traces; la présence de Nb, Ta, W est probable.

L'énumération de lignes caractéristiques des éléments trouvés voir dans le texte tchèque.

*L'Institut mineralogique de l'Université Charles IV.*



# Minerais de fer pisolithiques bauxitifères dans le crétacé de la Bohême.

Par

FR. SLAVÍK.

Résumé du texte tchèque.

Présenté le 13 janvier 1922.

Les minerais de fer pisolithiques se trouvent à deux endroits dans les couches les plus anciennes de la formation crétacée de la Bohême, c'est-à-dire dans les couches de Peruc (pron. Perouts). Un de ces endroits se trouve entre Ransko et Borová au sud-est de la chaîne des montagnes de Železné Hory (= Montagne de Fer). On y a exploité, à ciel ouvert et dans des mines peu profondes, des limonites crétacées reposant sur des péridotites et serpentines; de nos jours les mines sont abandonnées. Les minerais pisolithiques de Ransko, dont j'ai examiné les plaques minces, sont constitués par des pisolithes noires, dures ( $6\frac{1}{2}$ ), d'un éclat métallique, formées d'hématite ou peut être de *turjite*,\*) qui sont noyées dans la substance interstitielle ferrugineuse. Celle-ci contient des particules irrégulières — transparentes en couleur jaune verdâtre — d'une bauxite isotrope. L'hydrargillite ne se trouve dans les minerais qu'en traces.

L'analyse chimique du minerai de Ransko, (I.) faite par M. le Dr. Václav Veselý, a donné:

		I.	II.
Insoluble dans HCl	SiO <sub>2</sub>	7.38 %	5.23 %
	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	9.98	17.97
	Fe <sub>2</sub> O	1.20	4.38

---

\*) Étant impossible de séparer les pisolithes de la pâte fondamentale, on ne peut pas déterminer leur nature minéralogique.



Soluble	}	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	56.03	41.43
		Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	9.65	.... 14.63
		Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	3.50	.... traces
		CaO .....	—	.... 0.83
		SO <sub>3</sub>	0.93	0.11
H <sub>2</sub> O partant au dessus de 110°		8.92	14.52	
H <sub>2</sub> O hygroscopique		2.37	1.37	
		99.96	100.47	
Ti, P		traces	traces	
Mn, Cu		traces	—	
Vd		—	traces	

Le minéral analogue de l'autre localité, c'est-à-dire de Mezouň (pron. Mesouougne) (au sud de village et des mines de Nučice, à l'ouest de Prague) a la composition chimique indiquée dans la colonne II. Les pisolithes noires y sont plus rares, la couleur de la substance interstitielle est plus claire. L'index de refraction de la bauxite varie dans des limites proches de 1.59. La bauxite y est plus fréquente que dans le premier minéral et elle est d'un brun jaunâtre sans avoir la teinte verdâtre. Le mur discordant du crétacé en cette localité est formé par les schistes du silurien inférieur.

La composition globale des minerais examinés est semblable p. ex. à celle de la limonite pisolithique de Paradou (L a c r o i x, Minéralogie de la France III., 343) ou à celle de certaines latérites, dont les analyses se trouvent p. ex. dans le grand manuel de H i n t z e (tome I, p. 1959, 1964). La teneur en chrome du minéral de Ransko qui est la plus élevée de toutes, constatées jusqu'à présent dans les roches analogues, s'explique par la présence des péridotites se trouvant sous le minéral qui fournissent la majeure partie de la substance du minéral. Un calcul précis des quantités relatives des minéraux se trouvant dans nos roches (hématite, turjite?, limonite, bauxite et peut-être d'un silicate colloïde d'alumine) et de leur degré d'hydratation, n'est pas praticable.

Quant à la genèse des minerais décrits, il est certain qu'ils doivent leur origine à l'altération superficielle latéritique des roches à l'époque du crétacé inférieur, dont le climat était sans doute tropical. Ils correspondent aux produits pisolithiques de la „zone de concrétion“ constatée récemment par M. L a c r o i x dans les parties supérieures des latérites tropicales, surtout en Guinée française.

*Institut minéralogique de l'Université Charles IV,  
janvier 1922.*



# La signification morphologique du calice, de la corolle et de la paracorolle dans les fleurs de *Mimulus*.

Contribution à la morphologie des fleurs.

Par

Dr. JAN VILHELM,  
aggrégé de l'Université Charles à Prague.

Avec 4 figures dans le texte.

Présenté le 24 novembre 1922.

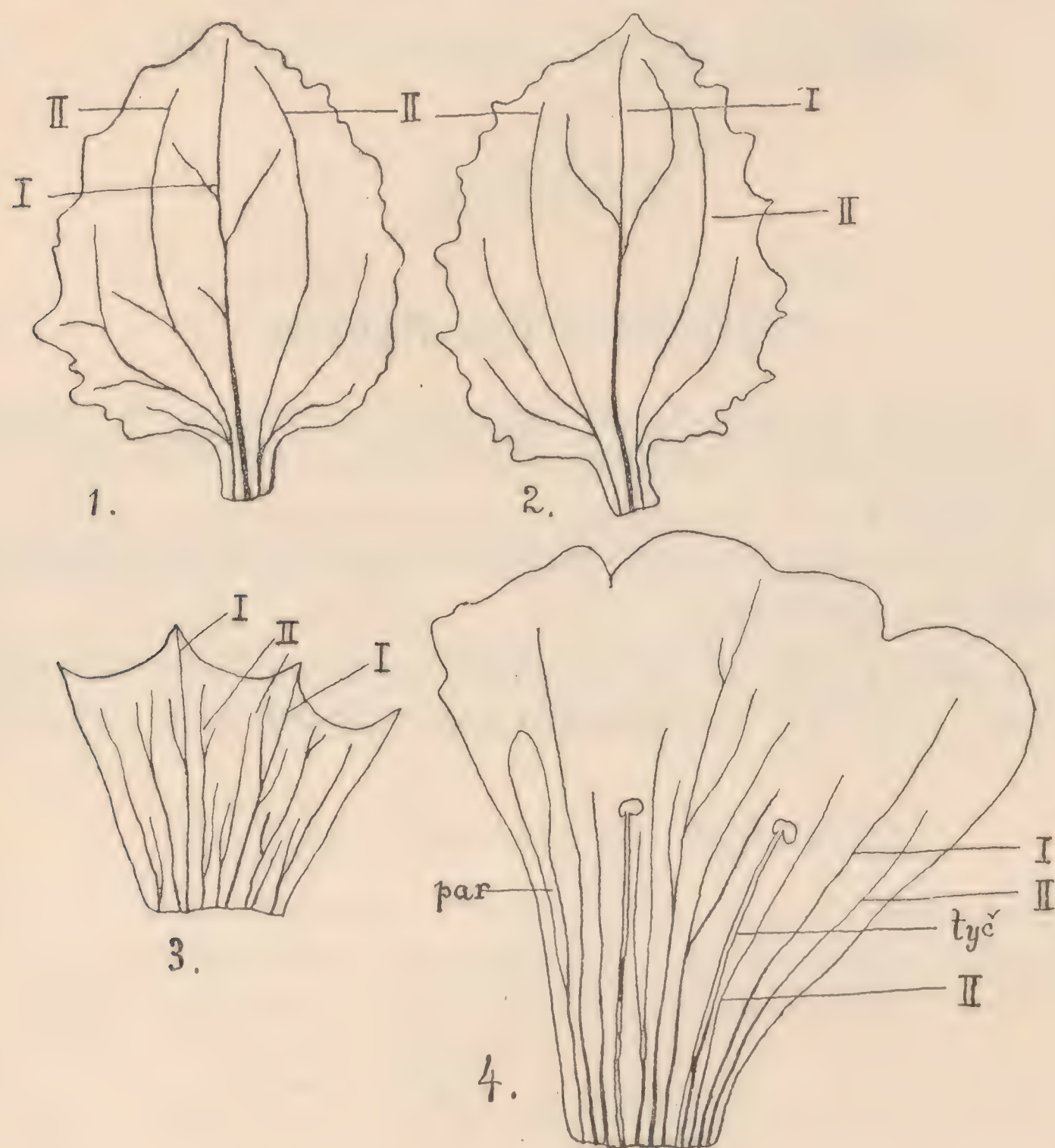
J'ai étudié au mois de septembre la formation de la paracorolle dans l'intérieur des fleurs de *Mimulus tigrinoides-luteus* (var. flore pleno) cultivées par mon collègue M. le docteur Artur Brožek aggrégé à l'université de Prague, au jardin botanique de l'Institut pour la physiologie des plantes, de M. le professeur et docteur Boh. Němec. J'avais l'intention d'observer dans ces fleurs la nervation de la feuille, du calice et de la corolle et d'établir la véritable signification de la paracorolle. Sur celle-ci voir mon article: „*La paracorolle des fleurs de Mimulus*“ (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1922).

Cette année j'ai étudié particulièrement les fleurs dans lesquelles deux formations paracorollaires s'étaient développées à l'endroit où dans la fleur zygomorphe manque la cinquième étamine. Cela prouve que ces formations paracorollaires n'appartiennent pas aux étamines et qu'elles s'étaient développées dans la corolle où se trouve la plus grande place libre. Les filets des étamines sont entregreffés au bas du tube de la corolle (2—3 mm), la paracorolle se confond avec le tube de la corolle et s'en détache à la hauteur de 10 mm.



La nervation du calice de *Mimulus* est complètement conforme à la nervation du limbe végétatif d'une feuille de tige. La feuille présente au milieu une nervure principale plus grande (I.) et des deux côtés une nervure plus courte et plus faible.

La même disposition se trouve dans la corolle. C'est pourquoi le pétale peut être comparé à bon droit, quant à sa nervation, au limbe de la feuille avec lequell elle est homologue.



Pour ces raisons les formations paracorollaires ne peuvent avoir le caractère des stipules comme l'a prouvé G l ü c k \*) dans d'autres plantes. Les nervures secondaires (II.) de chaque pétale se séparent dans le tube de la corolle, la branche plus forte parcourt dans le tube de la corolle, la plus faible se détache pour aboutir dans la paracorolle. C'est un cas particulier de la formation d'une feuille à limbe double dont la partie nouvelle est divisée en deux lobes.

Puisque la corolle est homologue avec le limbe de la feuille, la paracorolle ne peut être expliquée par une homologie stipulaire ou ligulaire. Au point de vue anatomique, la paracorolle n'a rien de commun avec les étamines et d'après le parcours de la nervation elle appartient à la

\*) l. c. Blatt-und blütenmorphologische Studien. Jena, 1919.



corolle originale. D'après la nervation il faut considérer la corolle et le calice dans les fleurs de *Mimulus* comme étant morphologiquement homologues avec le limbe de la feuille.

Je remercie M. Dr. A. Brožek de m'avoir fourni le matériel nécessaire à ce travail.

### Explication des figures.

Fig. 1 et 2. Feuilles de tige du *Mimulus*; I. nervure principale, II. nervure secondaire.

Fig. 3. Une partie du calice déchiré, la nervation est indiquée comme dans les figures précédentes.

Fig. 4. Une partie du tube corollaire ouvert, la nervation indiquée comme dans les figures précédentes; par = paracorolle, tyč = étamine.



# La composition chimique des minéraux de Chvaletice et de Litošice.

Par

V. VESELÝ.

Présenté le 10 février 1922.

L'objet de l'étude présente font les phosphates ferriques, les hydroxydes ferriques et les carbonates de manganèse, trouvés dans la zone oxydée du gisement de minerais de fer et de manganèse de Chvaletice et de Litošice. Je donne ici les analyses chimiques de ces minéraux suivies de courtes remarques sur leurs propriétés. L'étude microscopique et paragenétique des phosphates analysés a été faite par M. F. Ulrich (voir sa communication dans le même volume du Bulletin).

## I. Delvauxite de Litošice.

Masses concrétionnaires d'une couleur brun châtain rougeâtre. La delvauxite se dissout dans les acides, le résidu insoluble contient  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  et un peu de  $\text{CaO}$ . Densité 1.815—1.999.

MgO	.....traces
CaO	..... 2.31 %
MnO	.....traces
$\text{Al}_2\text{O}_3$	..... 6.69
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	.....42.57
$\text{P}_2\text{O}_5$	.....20.85
$\text{SiO}_2$	..... 3.67
$\text{SO}_3$	..... 0.75
$\text{H}_2\text{O}$	.....23.19
	<hr/>
	100.03 %

Après soustraction de la destinézite, à laquelle appartient sans doute l'acide sulfurique trouvé par l'analyse, la relation moléculaire de la delvauxite apparaît comme suit:





## II. Destinézite de Chvaletice.

Grandes masses concrétionnaires avec surface réniforme d'une couleur jaune clair grisâtre jusqu'à blanchâtre. Soluble dans les acides laissant très peu de résidu insoluble. Densité 2.105.

Le résidu insoluble 0.04 %

MgO	.....	—
CaO	.....	0.19
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	.....	37.66
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	.....	16.50
SO <sub>3</sub>	.....	19.32
H <sub>2</sub> O	.....	26.47
		<hr/> 100.18 %

Après soustraction du reste insoluble et de le chaux, la relation moléculaire est la suivante:



Ces chiffres sont en excellent accord avec les données de M. G. Cesàro,\*) qui a étudié la destinézite de Visé en Belgique, très pure et développée en cristaux monocliniques; de même avec l'analyse de M. F. Kovář\*\*), faite sur la „diadochite“ de Vysočany.

Contrairement à ce que M. Cesàro a observé pour la destinézite de Visé, on ne peut extraire, par l'eau, de la destinézite de Chvaletice que 0.33—0.72 % SO<sub>3</sub> au maximum.

## III. Destinézite (supposée diadochite) de Litošice.

Masses compactes d'une couleur jaun clair grisâtre. Dans les acides le phosphate se dissout facilement laissant résidu composé de SiO<sub>2</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et CaO. Par l'eau j'n'ai extrait après six mois que 0.62 % SO<sub>3</sub>. Densité 1.982.

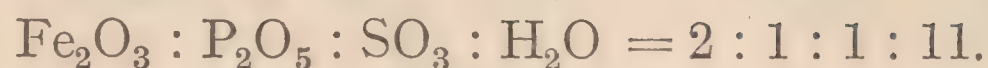
Résidu ins.	1.29 %
MgO	..... —
CaO	..... 0.18
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	..... 42.94
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	..... 19.85
SO <sub>3</sub>	..... 10.57
H <sub>2</sub> O	..... 25.28
	<hr/> 100.11 %

\*) Ref. N. J. Min. etc. 1887, I, pag. 412.

\*\*) Věstník kr. spol. nauk, 1889, pag. 343.



La relation moléculaire est donc:



D'après les recherches microscopiques de M. Ulrich, ce phosphate est un mélange de destinézite et delvauxite.

#### IV. Dialogite de Chvaletice.

Presque compacte, rosâtre, formant de petites veines et des nodules au minerai de fer brun. Densité 3.312.

Résidu ins.	0.06 %
MnO	.....57.31
FeO	..... 3.67
CaO	..... 3.91
CO <sub>2</sub>	.....35.12
	<hr/> 100.07 %

#### V. Dialogite de Litošice.

Masses filoniennes fine-grenues, d'une couleur rosâtre, dans lesquelles pénètrent petites veines de quartz et de pyrite. Dans les cavités on trouve parfois des rhomboèdres de dialogite très plats, arrondis en lentilles, groupés parallèlement comme les calcites de Příbram bien connues; par ci et par là des cristaux cubiques de pyrite sont implantés sur ces aggrégats. Densité 3.552.

Résidu ins.	2.91 %
MnO	.....56.75
FeO	..... 3.60
CaO	..... 2.13
CO <sub>2</sub>	.....34.83
	<hr/> 100.22 %

#### VI. Pyrrhosidérite de Chvaletice.

Stalactites d'une structure fibreuse, radiale et d'une couleur brun foncé.

SiO <sub>2</sub>	..... 0.90 %
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	.....86.95
Mn <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	..... 0.24
CaO	..... 0.50
MgO	..... —
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	..... 0.58
H <sub>2</sub> O	.....10.92
	<hr/> 100.09 %



Après soustraction de  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{CaO}$  et du phosphate delvauxitique ( $2\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{P}_2\text{O}_5 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ ) on obtient pour le résidu la relation

$$\text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{H}_2\text{O} = 1 : 1.$$

## VII. Stilpnosidérîte de Chvaletice.

Masses compactes d'une couleur brun noirâtre. Soluble dans l'acide chlorhydrique avec dégagement de chlore. D'après l'examen au microscope, la substance prévalente est formé par l'oxyde ferrique colloïde, dans lequel on aperçoit 1. des parties irrégulières plus foncées, appartenant selon toute vraisemblance à la psilomélane, 2. de petites veines remplies de pyrrhosidérîte et de carbonates de calcium, de magnésium et de manganèse.

$\text{SiO}_2$	.....	1.51 %
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	.....	52.32
$\text{MnO}$	.....	24.59
$\text{O}$	.....	4.02
$\text{CaO}$	.....	2.66
$\text{MgO}$	.....	2.10
$\text{P}_2\text{O}_5$	.....	2.09
$\text{CO}_2$	.....	3.22
$\text{H}_2\text{O}$	.....	7.80
		<hr/>
		100.31 %



# Discovery of cenozoic beds on the island Pervicchio in the Northern Adriatic Sea.

By

OTAKAR MATOUŠEK, Ph. D.,

Assistant of Geology at the Charles-University, Czechoslovakia.

Présenté le 23 juin 1922.

The island Pervicchio (Prvić) lies in the continuation of the western ridge of the island Veglia (Krk) in the northern part of the Adria.

Chiefly for its being of difficult access it was only perfunctorily studied. According to earlier works summed up in the geological map of Waagen with explanations (Geologische Reichsanstalt in Vienna, 1904—1911) it is formed in the west by a band of lower rudist limestone, which eastward dip under a layer of upper rudist limestone. According to these works other formations were not met with.

During my studies in 1921 and 1922 I came to different views especially with regard to the tectonic structure of the district which have been and will be discussed in other papers. Here only a small contribution to its regional geology is to be offered.

I have ascertained that the earlier views on the geology of the island Pervicchio are in many respects incorrect, as will be seen by the sketch map.

The spur of P<sup>ta</sup> Gnivica in the western part of the island is covered by reddish yellow stratified sand, sandstone and breccia which resemble the beds known from the island Veglia, which to my opinion belong to the very late pliocene or (according to Waagen) to the plistocene.

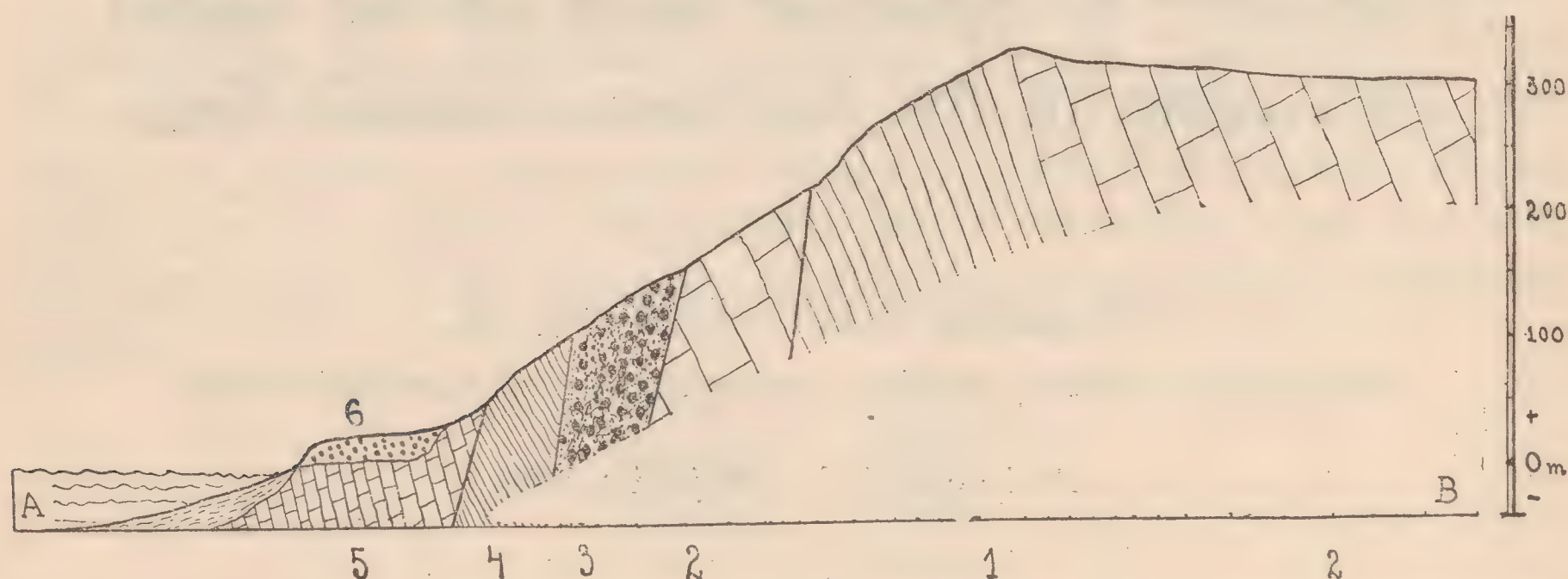
They rest on gray yellowish sandstones, alternating with layers of slate-clay. According to the new stratigraphic division, established by the authors studies in Veglia, they are of upper eocene age. The rest horizons met with in the centre of the anticline on Veglia in the Besca-valley are here missing for tectonical reasons.

A longitudinal fault (h  $9\frac{1}{2}$ , more frequently the trend is h  $10\frac{1}{2}$ ) cuts all these beds, more or less tilted and locally even overthrown. A pa-



parallel tectonic fracture formed the coast-line between P<sup>ta</sup> Samotorec and P<sup>ta</sup> Gnivica. Another fracture is very evident between the points 231 and 237 from the course of isohypses.

They are underlain by sandy limestone and Nummulites limestone with large species of Nummulites and further by karstic pink Alveolina limestone, which makes its appearance here for tectonic reasons. Contrary to the views of Waagen, both are well to be distinguished, pale-



Cross-section through the western ridge of the island Pervicchio. (Overtopped 5×.)  
The legenda is corresponding with the map one.

ontological as well as petrographical, though locally transition is so gradual, that the limit between them becomes rather arbitrary. To this stratigraphical boundary I shall refer in another paper.

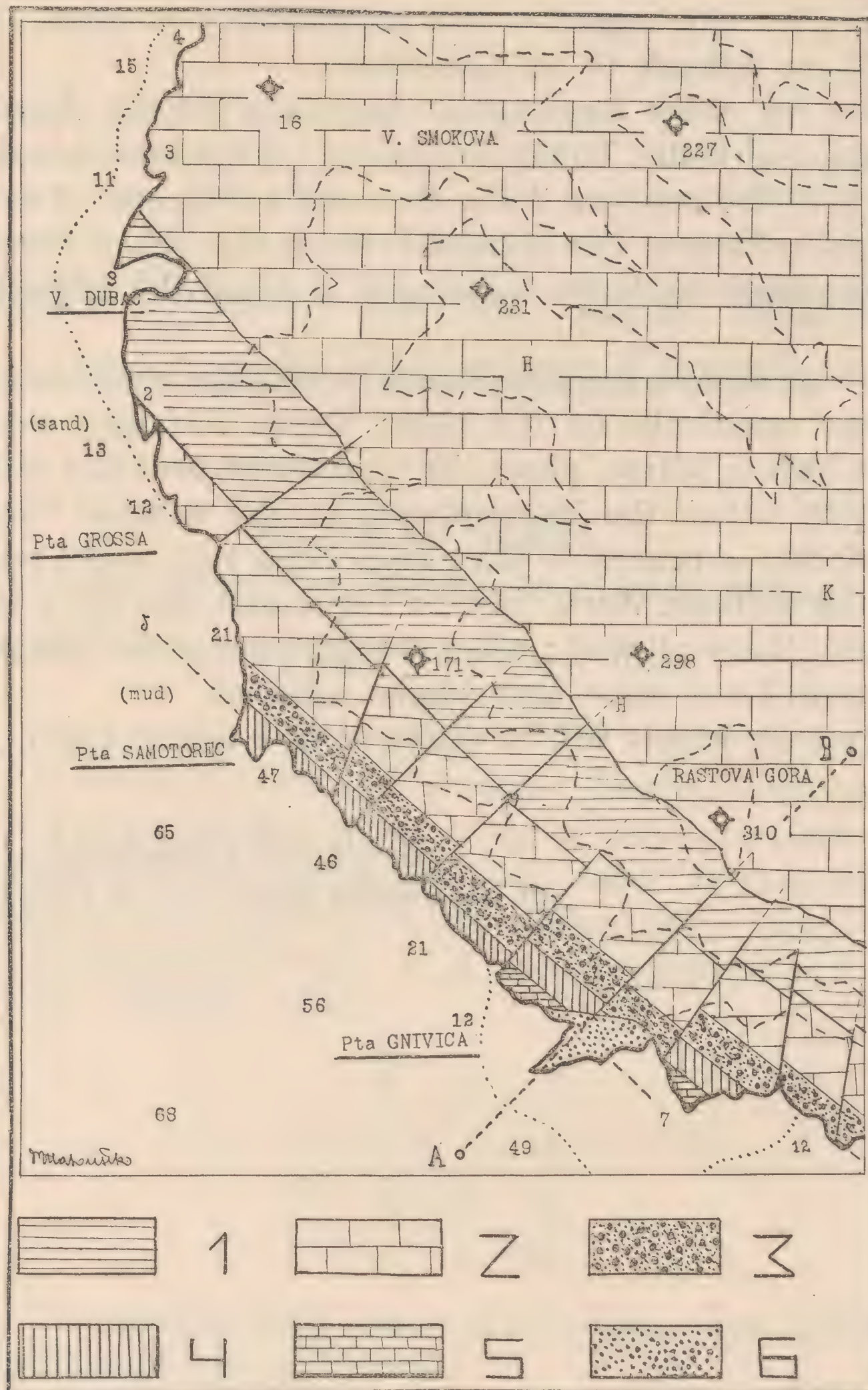
Petrographically all these eocene beds are quite like the beds known from Veglia and their correlation is paleontologically proved by many Nummulites and Alveolina. The earlier maps are therefore quite wrong, representing in these places cretaceous strata and even the lowest horizons.

On our map the cretaceous formation has been only represented to make clear the structure of the island; a final stratigraphical division of the cretaceous formation in this district wants still further studies. It proved sometimes very difficult to recognize the two bands distinguished by Waagen, especially where tectonic fractures cause isolated occurrences.

The boundary between the ascertained eocene beds and the cretaceous is a very marked one and again of tectonic origin. The eocene beds, tilted at a rule, overlies the upper rudist limestone, which too was hitherto unknown. An upper horizon (from the basis) is represented by breccia and only then follows the dark dolomitic limestone of the lower division, about which Waagen was right. In case that the upper division, overlain every where else by the eocene, really exists, then we must assume a huge fault, which here causes its occurrence. This would quite answer my notions on the faults, gathered in the southern part of the island Veglia.



The lower rudist limestone is overlain by a well developed breccia, which turns into the correctly mapped upper rudist limestone.



Sketch map of the western part of the island Pervicchio.

- Legenda 1) Lower rudist limestone with dark breccia.  
 2) Upper rudist limestone with checkered breccia (= montien?)  
 3) Alveolina karstig limestone.  
 4) Nummulites limestone.  
 5) Flysch: Sandstone and clay.  
 6) Young sands.

In the district within the western part of the island Pervicchio previously mapped as lower rudist limestone, both the lower and the upper cretaceous formations, Alveolina and Nummulites limestone, then



eocene sandstone and clay and at last young, cenozoic sands are to be met with. In representing the spread of these sands on our map we had to generalize, as with regard to the inaccessibility of some places their exact limits are difficult to be determined.

Besides the oldest longitudinal faults the district shows still two sets of transversal faults, hitherto unknown, of the same trend as on the other islands of the northern Adria (h 4 and h  $2\frac{1}{2}$ ) and of very marked morphological influence. The channel between the islands Pervicchio and Veglia results from the faults trending in h 4 and the original tilting of the beds.

As will be seen on the map eocene beds in the continuation of these on Pervicchio occurs also on the island Veglia. Naturally the discovery of so recent beds in places, where the very lowest beds had hitherto been supposed quite alters the interpretation of the tectonic fractures. The island Pervicchio is proved to have been tilted just as the neighbouring islands of the northern Adria, just as Veglia and that by a longitudinal pressure from the southwest; when the pressure ended disjunctive dislocations occurred and some fault blocks subsided.

The tectonic events will be discussed in a special paper.

*Geological Department  
of the Charles University at Prague, 1922.*



# Potier's Relation for the Total Reflexion on Double Refracting Crystals.

By

MILOSLAV HAMPL,

Assistant of the Czech Technical High School, Prague.

Presented June 24<sup>th</sup>. 1922.

Let  $Z'$  denote the normal of incidence (directed inside the crystal),  $X'$  the line of intersection of the plane of incidence with the limit of both mediums, the positive direction of  $X'$  and  $Z'$  be that which makes an acute angle with the normal of the incident plane wave. The direction cosines of the system  $S' \equiv X', Y', Z'$  and the optic system  $S \equiv X, Y, Z$  be given by the following scheme:

	$X$	$Y$	$Z$
$X'$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
$Y'$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$Z'$	$r_1$	$r_2$	$r_3$

(1)

$a, b, c$  being the principal optic speeds of light in the crystal, the equation of the index ellipsoid  $I$  is as follows:

$$I \equiv a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{12} x' y' + 2a_{23} y' z' + 2a_{31} z' x' = 1, \quad (2)$$

where

$$a_{11} = a^2 p_1^2 + b^2 p_2^2 + c^2 p_3^2, \quad a_{23} = a^2 q_1 r_1 + b^2 q_2 r_2 + c^2 q_3 r_3, \quad (3)$$

etc.

The diametral plane

$$v_1 x' + v_2 y' + v_3 z' = 0 \quad (4)$$

intersects the index-ellipsoid  $I$  in an ellipse, whose half-axes equal the indices of refraction of those waves which advance in the direction of the normal of that plane.



If we make these lengths (equal to the indices of refraction) on the direction of that wave-normal as radius vectors, we get as the geometric place of the end-points the index-surface  $I_p$ .

Let a point of this surface  $I_p$  be denoted by the coordinates  $X, Y, Z$ , a point of the index-ellipsoid  $I$ , corresponding to that one of the surface- $I_p$ , be denoted by  $\xi, \eta, \zeta$ ; then these coordinates comply with the following equations:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &\equiv \xi [1 - a_{11} (n^2 - X^2) + a_{12} XY + a_{13} XZ] - \\ &\quad - \eta [a_{12} (n^2 - X^2) - a_{22} XY - a_{23} XZ] - \\ &\quad - \zeta [a_{13} (n^2 - X^2) - a_{23} XY - a_{33} XZ] = 0, \end{aligned} \right\} (5)$$

and similarly

$$f_2 \equiv 0, \quad f_3 \equiv 0.$$

The equation of the index-surface  $I_p$  will then be:

$$I_p \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

The curve  $C$  of intersection of the surface  $I_p$  with the plane  $X' Z'$  has the following equation:

$$\begin{aligned} C &\equiv n^4 \{a_{22} [a_{11} \cos^2 \varphi - 2a_{13} \sin \varphi \cos \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi] - (a_{12} \cos \varphi - a_{23} \sin \varphi)^2\} \\ &\quad - n^2 \{a_{22} + a_{11} \cos^2 \varphi - 2a_{13} \sin \varphi \cos \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi\} + 1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $\varphi$  denotes the angle of the normal of the plane wave with the axis  $+Z'$  and  $n$  the respective index of refraction.

$x, y, z$  being a point of Fresnel's ellipsoid and  $\xi, \eta, \zeta$  the corresponding point of the index-ellipsoid, then, as is known, between these points we have these formulæ:

$$x = \frac{\partial I}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial I}{\partial \eta}, \quad z = \frac{\partial I}{\partial \zeta}.$$

Therefore there exists between two pairs of corresponding points of Fresnel's ell. and the index-ellipsoid the following Potier's relation:

$$x_1 \xi_2 + y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2 = x_2 \xi_1 + y_2 \eta_1 + z_2 \zeta_1. \quad (9)$$

Let us express the coordinates  $\xi, \eta, \zeta$  by the polar coordinates:

$$\xi = n \cos \varphi \sin \alpha, \quad \eta = -n \cos \alpha, \quad \zeta = -n \sin \varphi \sin \alpha. \quad (10)$$



$\xi, \eta, \zeta$  denoting the top of the ellipse of intersection of the surface  $I$  with the diametral plane, then  $\alpha$  is the azimuth of polarisation of the respective wave.

For the angle  $s$  of the wave-normal with the ray exists the following relation:

$$\pm \operatorname{tg} s = \frac{(a_{11} - q^2) \sin \alpha \cos \varphi - a_{12} \cos \alpha - a_{13} \sin \alpha \sin \varphi}{q^2 \sin \varphi}, \quad (11)$$

where  $q = \frac{1}{n}$ .

The equation (9) in the polar coordinates is:

$$\begin{aligned} (q_1^2 - q_2^2) [\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2] \pm \\ \pm [q_1^2 \operatorname{tg} s_1 \sin \alpha_2 + q_2^2 \operatorname{tg} s_2 \sin \alpha_1] \sin (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

where the indices 1 and 2 denote two arbitrary waves in the crystal.

$v$  being the speed and  $i$  the angle of a wave in an isotropic medium incident on the crystal, we have:

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin \varphi_1}{q_1} = \frac{\sin \varphi_2}{q_2}. \quad (13)$$

Then the Potier's relation (12) will assume a special form:

$$\begin{aligned} \sin (\varphi_1 + \varphi_2) [\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2] \pm \\ \pm \sin^2 \varphi_1 \operatorname{tg} s_1 \sin \alpha_2 \pm \sin^2 \varphi_2 \operatorname{tg} s_2 \sin \alpha_1 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

According to Mac Cullagh, those points of the curve  $C$  correspond to total reflexion, in which the tangents to this curve are parallel to the normal of incidence. These points comply with the following equation:

$$\frac{d n}{d \varphi} = - n \cotg \varphi. \quad (15)$$

If we employ the equation of the curve  $C$  and of the quantity  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $s$ , the latter will result into:

$$\pm \operatorname{tg} s = - \frac{\cotg \varphi}{\sin \alpha}, \quad (16)$$

which complies with all points of the curve  $C$  corresponding to the total reflexion excepting in the case when these points become double-points.

The latter is the case under the following condition:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$



In this case the curve  $C$  has generally four double-points and therefore degenerates into two curves of the second grade. The equation (16) is really only a special form of the Potier's relation in the case of the total reflexion as may be seen from the equation (14), if we let both waves coincide — or otherwise: if we put

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad s_1 = s_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2;$$

but this would be impossible without the preceding consideration.

---



# Régularité de la valeur osmotique des cellules de Cyanophycées.

SILVESTR PRÁT.

Présenté le 13. janvier 1922.

Comme dans la solution nourrissante de Knop de même dans NaCl et saccharose à peu près jusqu'à la concentration de  $1.8-2\frac{1}{2}$  d'atmosphères de la pression osmotique les fibres des Oscillatoria pendant dispersion se liaient en tlaireaux et en touffes, tandis que dans les solutions d'une concentration plus haute, elle se dispersaient séparément et ne formaient pas de faisceaux. Le mouvement indiquait très bien la vitalité des cultures. Si les fibres de l'Oscillaria dans les solutions plus concentrées n'étaient pas trop endomimagées, on pourrait toujours constater l'augmentation de la concentration plasmolytique limitée avec l'élévation de la concentration de la solution des cultures; dans une solution de NaCl d'une concentration fixée, le temps de la déplasmolyse brissait proportionnellement. Dans la solution de Knop, l'élévation de la valeur osmotique des cellules est assez régulière et en somme, longtemps assez constante; dans les solutions isosmotiques de NaCl, l'élévation ne se manifestait qu'après 11 jours et plus. Une trop grande pression (la pression osmotique de la concentration limitée, moins la pression osmotique du milieu) montait toujours et en somme de même dans la solution de Knop comme dans NaCl. Il est probable que l'anatonose u'était pas causée seulement par la diffusion des sels renfermeés dans un milieu, mais aussi par l'activité accommodatrice de la cellule.

---



# Deux roches éruptives anchi-monominérales dans le gabbro de la Bohême occidentale.

Par

F. SLAVÍK.

Présenté le 24 février 1922.

Le gabbro de l'Ouest de la Bohême s'étend des environs de Ronsperg et de Domažlice dans la direction S-E jusqu'au-de-là de Nová Kdýně et constitue le mont Silberberg près de Pocínovice; sur le versant N-O de ladite montagne, à proximité du village Lhota, on trouve dans le gabbro deux faciès anchi-monominéraux, c'est-à-dire composés presque entièrement d'un seul minéral.

La première roche, passant par des transitions lentes à un gabbro ordinaire décomposé, est formée par l'*ilménite*. L'analyse de M. Václav Veselý exécutée sur la substance isolé, a donné les chiffres suivants:

		Quot. moléc.
TiO <sub>2</sub>	50.29	0.615
FeO	38.16	0.531
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6.99	0.044
MnO	0.27	0.004
MgO	1.82	0.046
CaO	2.62	0.046
SiO <sub>2</sub>	0.06	0.001
Total	100.21	

$$\text{RO} : \text{R}_2\text{O}_3 : (\text{TiSi}) \text{O}_2 = 627 : 531 : 616.$$

L'autre roche, qui se rencontre dans le gabbro à quelques dizaines de mètres au SO de la précédente, est une *péridotite* presque pure. Dans les plaques minces, on observe seulement peu d'*ilménite* et des traces de magnétite comme éléments accessoires primaires, puis quelques lambeaux d'un minéral chloritique secondaire. Le reste est entièrement com-



posé d'une olivine. Le caractère négatif de la biréfringence et l'indice de réfraction, qui est dans toutes les sections et dans toutes les orientations supérieur à 1.74 (l'indice de l'iodure de méthylène), montrent avec une évidence suffisante que cette olivine appartient à la *hortonolithe*, c'est-à-dire à un des mélanges isomorphes des deux orthosilicates avec  $\text{Fe}_2\text{SiO}_4$  prévalent.

M. J. H. L. V o g t<sup>1)</sup> a démontré que l'olivine des roches basiques devient plus riche en orthosilicate de magnésium, à mesure que sa quantité dans la roche s'accroît. La cause de l'inversion dans notre cas doit sans doute être cherchée dans la présence de l'ilménite, qui se trouve dans la roche même et qui s'est enrichie dans son voisinage jusqu'à devenir une roche presque monominérale, dont il a été question plus haut.

On a peu examiné jusqu'ici de plus près les olivines des concentrations magmatiques de l'ilménite et de ce qu'on appelle titanomagnétite (Taberg en Suède, Adirondacks dans l'État de New York, etc.). M. V o g t, à qui j'avais communiqué mes observations, a eu la bienveillance de me faire savoir qu'il a pu les confirmer sur quelques concentrations anchimonominérales dans les roches éruptives, et de prouver par quelques exemples l'analogie de la péridotite hortonolithique de Lhota avec les concentrations éruptives métallifères du fer et du titane.<sup>2)</sup>

Les analyses globales de telles concentrations documentent une analogie très prochaine:

La roche de Lhota:

	1.	2.
$\text{SiO}_2$	27.10	29.08
$\text{TiO}_2$	7.80	3.16
$\text{Al}_2\text{O}_3$	4.15	3.28
$\text{Fe}_2\text{O}_3$	11.54	5.00
$\text{FeO}$	37.00	44.58
$\text{MnO}$	0.88	0.40
$\text{MgO}$	11.77	11.95
$\text{CaO}$	0.36	0.76
$\text{Na}_2\text{O}$	—	0.64
$\text{K}_2\text{O}$	—	0.18
$\text{H}_2\text{O}$	—	0.39
	100.60	99.42

<sup>1)</sup> V o g t, Über anchimonomineralische und anchieutektische Eruptivgesteine, Videnskab-Selskabet Skrifter I, Kristiania 1908, Nr. 10.

<sup>2)</sup> Les observations et idées sur ce sujet paraîtront prochainement dans le „Journal of Geology“.



Taberg, Suède		Caribou, Boulder Co., Colorado	Iron Mine Hill, Cumberland, Rhode Island		
			<i>a</i>	<i>b</i>	
SiO <sub>2</sub>	21.25	27.71	20.89	19.98	20 .
TiO <sub>2</sub>	6.30	2.69	10.00	9.76	9.
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5.55	2.92	6.93	6.75	5
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	43.45	21.80	17.81	19.25	45.62
FeO		19.70	26.04	21.42	
MnO	0.40	0.22	—	—	—
MgO	18.30	17.98	15.65	16.83	16.45
CaO	1.65	6.83	0.96	—	0.73
Na <sub>2</sub> O	—	0.19	—	—	—
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	0.13	traces	—	—	—
H <sub>2</sub> O	2.60	4.05	0.42	4.77	—
<hr/>		<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
99.66		100.40	99.26	99.32	99.69

(Dans la roche de Taberg, dont je dois à M. le professeur P. D. Quensel de Stockholm quelques échantillons, la componente olivinique montre aussi le signe négatif de la biréfringence.)



# Sur l'identité de l'agnolithe avec l'inésite.

Résumé du texte tchèque.

Par

F. ULRICH.

Présenté le 24 novembre 1922.

Lors de mon séjour à Báňská Štiavnica (Schemnitz en Allemand) pendant les dernières vacances, j'ai reçu un échantillon de gangue provenant de Hodruša, étiqueté par L. Cseh comme „Diallogite Schöpfertaró“. Cet échantillon avait, outre du calcaire blanc et du carbonate de manganèse, de fer et de chaux parsemé de grains de sulfurides, ( $\text{PbS}$ ,  $\text{CuFeS}_2$ ,  $\text{FeS}_2$ ,  $\text{ZnS}$ ) une petite veinette remplie d'un quartz postérieur et d'une agglomération fibreuse d'un minéral rose vif. J'ai pu, bien facilement, m'assurer que ce minéral rose était de l'agnolithe, minéral, dont les échantillons provenant de Báňská Štiavnica et se trouvant dans les collections de Freiberg et de Berlin ont été décrits d'une façon détaillée par Breusing,\*) à la fin du siècle passé. Tous mes efforts pour trouver des échantillons de ce minéral dans les collections de Prague sont restées sans résultat. Comme mon échantillon d'agnolithe ne pouvait pas me procurer une assez grande quantité de matière homogène, rendant possible l'analyse quantitative, je me mis à étudier surtout ses propriétés optiques, qui, pour les silicates sont de première importance puisqu'elles présentent des caractères diagnostiques les plus sûrs. Ces études m'ont prouvé une coïncidence complète entre les propriétés optiques de l'agnolithe et celles de l'inésite, dont E. S. Larsen a fait récemment une de-

\*) E. Breusing. Untersuchungen über Breithaupt's Manganokalcit (Agnolith Breusing.) N. Jb. B. Bd. XII. 1899, pag. 265 sq.



scription détaillée dans sa publication „The microscopic determination of the monopaques minerals“. Dans la suite, j'ai étudié l'inėsite sur deux échantillons du Musée National à Prague, dont l'un provient de Långban et l'autre de la mine Harstigen près de Pajsberg en Suède et grâce aux échantillons des collections de Berlin et de Freiberg qui m'ont été prêtés, l'examen des exemplaires de l'agnolithe qui ont servi aux études de Breusing, m'a été facilité.

L'agnolithe, le soi-disant „faseriger Braunspat“ de Werner, fut décrit en 1846 par Breithaupt sous le nom de manganocalcite. Breithaupt supposait que ce minéral provenant de Štiavnica en Slovaquie présentait avec la diallogite une relation semblable à celle qui existe entre l'aragonite et le calcite (dimorphisme). Son opinion parut être appuyée par l'analyse chimique de Rammelsberg. Krenner (1883) émit des doutes sur le caractère orthorhombique de ce minéral et il prétendit que ses cristaux sont rhomboédrique. Des Cloizeaux a prouvé par des méthodes optiques que le manganocalcite de Breithaupt est un minéral triclinique. Une analyse de Winkler démontra que le manganocalcite est un silicate de manganèse hydraté mélangé avec du carbonate. Une nouvelle analyse faite par Rammelsberg de l'échantillon type de Breithaupt a appuyé la découverte de Winkler. Mais il existait une grande différence entre les deux analyses et c'est sans doute pour cela que Weisbach, professeur à l'École de Mines à Freiberg proposa à E. Breusing d'étudier en détail ce minéral tant discuté.

Les méthodes employées par Breusing dans ses recherches chimiques et optiques faites sur l'agnolithe sont malheureusement fausses. Il a fait trois analyses chimiques, dont une seule complète. Cette analyse complète qui a servi de prémisses à toutes les conclusions ultérieures de l'auteur est cependant très peu précise et en outre absolument mal interprétée.

Dans les analyses de silicates, la détermination de  $\text{CO}_2$  et de  $\text{H}_2\text{O}$  est des plus délicates et selon Hillebrand et Washington, présente, dans les analyses citées dans la littérature, les plus grandes erreurs. Breusing n'a cependant déterminé qu'une seule fois ces deux éléments dans son analyse fondamentale se contentant du calcul pour les autres analyses ou tout au plus de la détermination de  $\text{CO}_2$ . Son erreur est compliquée par la fausse interprétation de l'analyse fondamentale car, en calculant l'analyse, il prétend tout simplement que toute la chaux et toute la magnésie se combinent avec  $\text{CO}_2$  et, négligeant les quotients moléculaires, il soustrait leurs oxydes de l'analyse et il calcule le reste à 100 pourcent. Le calcul lui donne ensuite, pour la formule, la relation suivante:  $\text{SiO}_2 : (\text{MnFe})\text{O} : \text{H}_2\text{O} = 4 : 3 : 2$ .

En calculant les quotients moléculaires et en conservant rigoureusement les proportions stoechiométriques nous obtenons un résultat tout différent, ainsi que le prouve l'aperçu suivant contenant l'analyse fonda-



mentale de Breusing (I), les quotients moléculaires (II) ainsi que des quotients moléculaires dans lesquels le quotient moléculaire de  $\text{CO}_2$  a été soustraite du quotient moléculaire de RO.

	I.	II.	III.
$\text{SiO}_2$	42.15 %	0.6990	0.6990
$\text{FeO}$	1.12 %	0.0156	0.6513
$\text{MnO}$	35.88 %	0.5059	
$\text{CaO}$	8.22 %	0.1467	
$\text{MgO}$	0.51 %	0.0126	
$\text{CO}_2$	6.14 %	0.1395	
$\text{H}_2\text{O}$	6.37 %	0.3536	0.3563
	<hr/> 100.39 %		

Le reste avec les autres parties donne une très bonne relation:  $\text{SiO}_2 : \text{RO} : \text{H}_2\text{O} = 70 : 65 : 35 = 14 : 13 : 7$ . La comparaison du quotient moléculaire de  $\text{CaO}$  avec le quotient moléculaire de  $\text{MgO}$  nous prouve que le carbonate de nos échantillons n'est pas de la dolomie, comme l'a supposé Breusing. La quantité de  $\text{CaO}$  indiquée dans la colonne II est supérieure à celle qui correspondrait à la quantité trouvée de  $\text{CO}_2$  et il est par conséquent impossible de soustraire tout simplement  $\text{MgO}$ ,  $\text{CaO}$  et  $\text{CO}_2$  de l'analyse et de faire avec le reste le calcul de la formule du silicate. Par conséquent, il existe une grande différence entre les résultats obtenus par la seconde analyse et les valeurs calculées et la troisième analyse semble être considérablement „retouchée“. Il existe entre les valeurs obtenues par Winkler de pareilles différences, aussi considérables. Celui-ci prétendit aussi, comme Breusing, que tout le  $\text{CaO}$  se combine avec l'acide carbonique. Par la découverte de Damour, il a été prouvé, que la chaux se trouve aussi dans le silicate et j'ai pu m'en assurer par une preuve microchimique. Quant aux propriétés physiques, de l'agnolithe, il existe une conformité complète avec celles de l'inesite.

L'agnolithe ainsi que l'inesite présentent des agglomérations fibreuses ou fibrobacillaires d'un éclat vitreux et de couleur rose, rouge chair ou quelquefois gris rosé. La poussière est blanche. La dureté 4.5—5 (Mohs) ou 5.5—6 (Breithaupt). Le clivage (010) parfait, (100) bon. La densité de l'inesite de Dillenburg en Nassau est de 3.03, d'une autre provenant de Suède 3.0295, celle du manganocalcite de Breithaupt 3.03 et de l'agnolithe de Breusing 3.054 (non homogène), 3.0298 de mon nouveau échantillon.

Les propriétés optiques nous donnent la meilleure preuve de l'identité de l'agnolithe et de l'inesite. — Les propriétés optiques essentielles de l'inesite indiquées par Scheibe sont les suivantes: le plan des axes coupe la longueur des fibres, sur la face de (010), la projection des axes



sur (010) sous un angle de  $60\frac{1}{2}^{\circ}$ , l'angle d'extinction sur (100) est  $12^{\circ}$ . La bissectrice aigüe est presque perpendiculaire sur (010), l'écartement des axes optiques, mesuré par l'appareil d'Adams avec  $n_{\text{Na}} = 1.7782$  fait  $64^{\circ}00'$  à la lumière Li,  $63^{\circ}28'$  Na,  $62^{\circ}51'$  Tl. Les indications données par Larsen sont conformes à celles données par Scheibe et les indices de réfraction cités par lui sont les suivants:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1.609 \pm 0.003, & \beta = 1.636 \pm 0.003, & \gamma = 1.644 \pm 0.003, \\ \beta - \alpha = 0.027, & \gamma - \beta = 0.008, & \gamma - \alpha = 0.035. \end{array}$$

Pour l'agnolithe voici ce qu'indique Des Cloizeaux: L'angle d'extinction sur la face du meilleur clivage est d'à peu près  $61^{\circ}$  pour la lumière naturelle et elle montre deux axes optiques écartés, dans un plan plus ou moins oblique au clivage, l'angle des axes:  $2H\alpha = 80^{\circ}31'$ .

J'ai fait des études sur les propriétés optiques de l'inésite, sur les échantillons de Suède cités plus haut, sur l'échantillon type d'agnolithe de Breusing ainsi que sur mon échantillon provenant de Baňská Štiavnica et j'ai trouvé entre eux une identité complète, conforme aux indications données par la littérature.

Les lames de clivage d'après (100) ne présentent qu'une extinction de  $12^{\circ}$ — $14^{\circ}$  (pour la lumière du sodium), oblique par rapport à leur longueur, l'examen par la teinte sensible nous prouve le caractère positif de la zone.

Les lames de clivage d'après (010) présentent une extinction beaucoup plus oblique:  $29\frac{1}{2}^{\circ}$  (pour la lumière du sodium) et le caractère de la zone négatif. Dans la lumière convergente, elles présentent la sortie de la bissectrice aigüe négative avec des axes optiques très écartés et une dispersion bien nette. Le plan des axes optiques coupe la longueur des fibres sous un angle de  $60\frac{1}{2}^{\circ}$  (Na). La biréfringence est plus faible que dans le cas précédent [sur (100)].

En déterminant quantitativement les indices de la réfraction par la méthode de M. Becke, j'ai trouvé

$$\begin{array}{lll} \alpha' = 1.61750, & \beta' = 1.6358, & \gamma' = 1.6439 \\ \alpha = 1.618 \pm 0.003, & \beta = 1.636 \pm 0.003, & \gamma = 1.644 \pm 0.003 \end{array}$$

$\beta$  et  $\gamma$  concordent absolument avec les valeurs indiquées par Larsen mais non pas  $\alpha$  qui en diffère. Si nous calculons l'écartement des axes optiques  $2V\alpha$  en nous basant sur les indices de la réfringence cités par Larsen, le résultat est absolument contraire à celui indiqué par lui. Certainement que là, il y a erreur et qu'au lieu de 1.609 il doit probablement y avoir 1.619.

L'identité entre l'agnolithe et l'inésite se manifeste aussi dans leurs propriétés chimiques sous le rapport de leur eau. — L'un et l'autre contiennent de l'eau dont une partie s'échappe jusqu'à  $200^{\circ}$ . — Breusing appelle cette eau, pour l'agnolithe, eau de cristallisation. Zambonini



la considère comme eau zéolithique, ce qui certainement est plus exacte. L'autre partie est l'eau de constitution.

Quant à la composition de l'inésite c'est la formule de Zambonini  $H_2 (MnCa)_2 Si_2O_7 + 0.6 H_2O$  qui me paraît être la plus juste.

L'inésite fond facilement sous le chalumeau en un verre brun. Si nous chauffons au rouge, une particule d'inésite sur une feuille de platine, elle se transforme en poussière à surface brunâtre. — Ce qui est curieux c'est que c'est un nouveau minéral semblable, quant aux propriétés optiques, aux hornblendes sauf sous le rapport de la réfringence. Celle-ci a augmenté considérablement (environ 1.68), l'orientation optique a changé, le caractère de la longueur est en général positif. Les directions d'extinction font un léger angle sur (010). En même temps apparaît un pléochroïsme très visible (rose, vert-jaune).

Plus tard je compte publier le résultat de mes recherches futures sur cette intéressante combinaison ainsi que de nouvelles analyses de l'inésite.

Comme il a été clairement prouvé que l'agnolithe et l'inésite sont le même minéral, il est nécessaire de supprimer l'appellation d'agnolithe du système minéralogique.

*Institut minéralogique  
de l'Université Charles à Prague.*



# Contribution à l'étude des phosphates de fer et d'alumine.

Par

FR. ULRICH à Prague.

Avec 4 figures.

Présenté le 24 février 1922.

(Résumé du texte tchèque.)

## 1. Les phosphates de Chvaletice et Litošice.

Pendant la guerre, la Société minière „Pražská železářská společnost“ entreprit des travaux de recherche sur les minerais de fer et de manganèse. Ces travaux furent faits dans deux localités des „Železné hory“ (Montagnes de fer), à savoir à Chvaletice près de la station Kladruby n. L. de la ligne de chemin de fer Prague—Brno, et à Litošice, à ESE de la localité précédente. Les deux gisements sont situés dans les schistes de la formation algonkienne, faiblement métamorphisés avec de puissantes intercalations de schistes pyriteux et des coulées de spilites effusives. Le minerai principal de manganèse est la diallogite, qui se trouve, surtout à Litošice, en quantités assez grandes. Les parties supérieures des gîtes sont caractérisées par de changements intéressants, produits dans le „chapeau de fer“.

En dehors des produits oxydiques: stilpnosidélite, pyrrhosidélite, psilomélane, on y trouve des phosphates de fer et d'alumine.

1. *Vivianite de Litošice*. Par l'examen goniométrique de beaux cristaux, j'ai pu constater les formes cristallines suivantes:

$a$  (100),  $b$  (010),  $m$  (110),  $g$  (012),  $w$  (0 $\bar{1}$ 1),  $v$  ( $\bar{1}$ 11),  $z$  (112).



Les angles mesurés et calculés (les paramètres de G. v. R a t h) sont les suivants:

Numéro	Symbol		Mesuré		Calculé		Notes
	Miller	Gold-schmidt	$\varphi$	$\varrho$	$\varphi$	$\varrho$	
1.	(010)	$0\infty$	$0^{\circ}00'$	$90^{\circ}00'$	$0^{\circ}00'$	$90^{\circ}00'$	Sur tous les cristaux.
2.	(100)	$\infty 0$	$90^{\circ}02'$	$90^{\circ}00'$	$90^{\circ}00$	„	„
3.	(110)	$\infty$	$53^{\circ}55'$	$90^{\circ}00'$	$54^{\circ}01'$	„	Sur 6 cristaux mesurés.
4.	(012)	$0\frac{1}{2}$	$36^{\circ}10'$	$23^{\circ}32'$	$36^{\circ}16'$	$23^{\circ}31'$	Sur 4 cristaux.
5.	( $\bar{1}01$ )	$-10$	$90^{\circ}00'$	$35^{\circ}26'$	$90^{\circ}00'$	$35^{\circ}20'$	Sur tous les cristaux du type II.
6.	(112)	$+\frac{1}{2}$	$64^{\circ}43'$	$39^{\circ}12'$	$64^{\circ}39$	$39^{\circ}20'$	„
7.	( $\bar{1}11$ )	$-1$	$45^{\circ}12'$	$44^{\circ}5'$	$45^{\circ}17'$	$44^{\circ}55'$	Sur tous les cristaux.

Densité = 2.670 à 18° C.

La couleur des cristaux de vivanite, sur les échantillons parfaitement frais était vert bleuâtre très clair; toutefois, lorsque le fer bivalent passait à l'état de fer trivalent, la couleur devenait plus foncée.

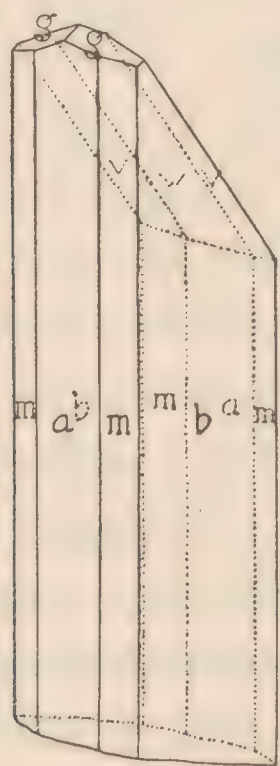


Fig. 1. Type I. de la vivianite de Litošice.

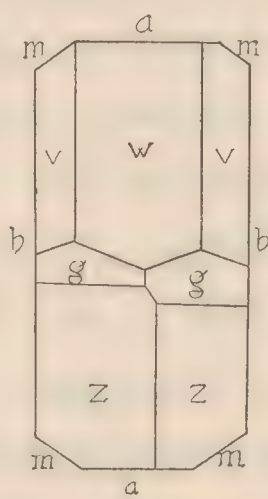


Fig. 2. Type II. de cristaux de la vivianite de Litošice.

L'orientation optique, constatée par moi, concorde avec celle trouvée par M. R o s i c k ý sur des cristaux de Valdice (Bohême septentrionale) et par M. L a r s e n sur ceux de Plant City, Florida et Mullica Hill, New Jersey:



Plan des axes optiques perpendiculaire à  $b(010)$ . La bissectrice aigüe positive ( $n_g$ ) fait un angle de  $28\frac{1}{2}^\circ$  avec l'axe verticale, dans l'angle obtus  $\beta$  (v. v. la fig. 3). Faible dispersion horizontale, avec  $\rho < v$ . Les indices mesurés sont pour la lumière du sodium:

$\alpha = 1.5788$	$\gamma - \alpha = 0.0506$	Le pléochroïsme
$\beta = 1.6024$	$\gamma - \beta = 0.0270$	est assez intense
$\gamma = 1.6294$	$\beta - \alpha = 0.0236$	$n_p$ bleu
		$n_m$ } jaune verdâtre,
		$n_g$ } presque incolore

Angle des axes optiques:

A. Solution d'après M. Th o u l e t,  $n_{Na} = 1.6932$

$$2H_{oNa} = 90^\circ 01'$$

$$2V_a = 83^\circ 17'$$

$$2V_o = 96^\circ 43'.$$

B. Solution d'après M. Th o u l e t,  $n_{Na} = 1.6534$

$$2H_{oNa} = 92^\circ 29 \frac{1}{2}'$$

$$2V_a = 83^\circ 38'$$

$$2V_o = 96^\circ 22'.$$

L'oxydation, effectuée par  $H_2O_2$  diluée fait accroître les indices de réfraction — sur (010), les indices  $n_m$  et  $n_g$  étaient, après l'oxydation, supérieurs à 1.652 — par contre, elle fait diminuer la double réfraction, l'orthodiagonale devient la bissectrice aigüe; le pleochroïsme est plus fort après l'oxydation:  $n_g$  vert jaunâtre,  $n_m$  vert bleuâtre.

2. *Fouchérite et vashegyite*. Ces deux phosphates sont antérieurs à la vivianite; les cristaux de celle-ci sont ou bien implantés directement sur la fouchérite, ou bien on observe la succession: fouchérite — vashegyite — vivianite. La fouchérite forme une incrustation mince d'une couleur brun rougeâtre et d'un éclat résineux, sur le schiste pyriteux. La présence de Ca, Fe et  $P_2O_5$  a été prouvée par des essais qualitatifs. L'indice de réfraction  $n_{Na} = 1.648$ . Il a été constaté par l'étude microscopique du matériel authentique de Bořický, que le minéral de Svatá Dobrotivá (S. Benigna) appelé picite par cet auteur, est identique à la fouchérite. Le nom de picite doit donc être seulement réservé pour le minéral, qui provient de la mine „Eleonore am Dünsberg“ près de Giessen, analysé par A. Nies et décrit en 1881 par A. Streng.

La vashegyite de Litošice correspond à la v. originale de Železník en Slovaquie, dont je fais mention dans la II<sup>ème</sup> partie de cette étude, et cela tant par ses propriétés physiques que par sa composition chimique. Elle est développée en incrustations réniformes et en petites stalactites de couleur blanche comme la craie ou jaunâtre, due aux traces de fer.

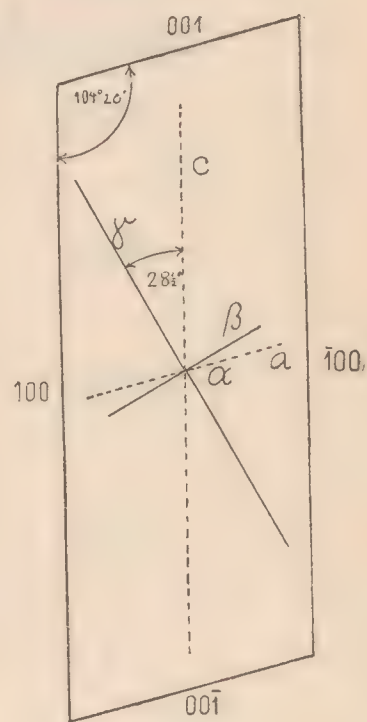


Fig. 3. L'orientation optique de la vivianite sur la face (010), perpendiculaire à la bissectrice obtuse  $\alpha = b$ .



Dureté = 2 environ, densité 1.92, indice de réfraction 1.5036 pour la lumière du sodium.

3. *Delvauxite* et *destinézite*. Les deux minerais sont abondants à Chvaletice et surtout à Litošice, où on a découvert, en 1920, une couche de phosphates sous le sable surjacent et dont l'épaisseur atteignait jusqu'à 5 mètres. Le Dr. V. Veselý a fait trois analyses chimiques de ces phosphates; elles sont publiées dans son étude: Composition chimique des minerais de Chvaletice et Litošice, Bull. int. l'Ac. de Sci. de Boh. 1922. La delvauxite a été trouvée à Litošice en quantité remarquable; elle est compacte, d'une couleur brun châtain jusqu'à rouge de brique. Dureté  $2\frac{1}{2}$ . Densité 1.815—1.999. Au microscope, la delvauxite est translucide en couleur jaune ou orangé et montre une structure micellaire; entre nicols croisés, elle est absolument isotrope. L'indice de réfraction varie un peu et atteint la valeur max. de 1.726. J'ai fait une étude comparative de propriétés optiques d'autres minerais désignés comme delvauxites, provenant des collections de l'Université Charles IV et du Musée National. Seule la delvauxite de Berneau près de Visé en Belgique est congruente avec celle de Litošice, puisqu'elle seule montre un indice de réfraction de 1.708 au minimum.

La destinézite de Chvaletice citée comme étant une diadochite, est le minéral phosphatique le plus abondant dans les deux localités. Elle se trouve en masses concrétionnées, ayant jusqu'à 2 décimètres de largeur; au microscope, elle est constituée par de petits cristaux lamellaires, dont la forme ressemble à celle du gypse, et qui n'atteignent que 0.01—0.03 millimètres. Les indices de réfraction sur (010) ont été trouvés 1.6658 et 1.6380, pour la lumière du sodium, la double réfraction est donc assez forte, 0.0278.

Quant au rapport génétique entre la delvauxite et la destinézite, on voit, que le minéral primaire est le phosphate ferrique colloïde, la delvauxite, qui se transforme en destinézite cristallisée par l'action de l'acide sulfurique provenant de la décomposition des schistes pyriteux. La cristallisation commence à la surface de concrétions d'où, elle se propage à l'intérieur. Les résultats des trois analyses chimiques faites par M. Veselý sont en accord avec cette interprétation. La delvauxite de Litošice donne la relation  $\text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{P}_2\text{O}_5 = 2 : 1$  comme son homoïsochémite cristallisée, la dufrénite, et le même rapport entre l'oxyde ferrique et l'acide phosphorique résulte aussi de l'analyse de la supposée diadochite, après soustraction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$  et  $\text{H}_2\text{O}$  correspondant à la quantité trouvée de  $\text{SO}_3$ , et pour la relation  $\text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{P}_2\text{O}_5 : \text{SO}_3 : \text{H}_2\text{O} = 2 : 1 : 2 : 12$ , telle qu'elle existe dans la destinézite. L'opinion de Cornu sur la connexion génétique entre la delvauxite et la destinézite est donc appuyée par notre étude des phosphates de Chvaletice et de Litošice. La destinézite se forme de la delvauxite par l'action de l'acide sulfurique qui est continuellement mise en liberté dans la décomposition de la pyrite, qui est



abondante ici. Cette explication génétique est contraire à l'opinion de M. Cesàro, d'après qui la delvauxite serait une destinézite altérée, ses expériences ayant constaté que l'acide sulfurique de la destinézite peut entièrement être remplacé par l'eau; mais ces résultats n'ont pu être confirmés ni par Rammelsberg ni par Kovář et Veselý. Au contraire, M. Dittler a observé, qu'un gel de composition voisine à la delvauxite, a cristallisé après addition d'une petite quantité de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . La question de savoir, quel est l'origine de l'acide phosphorique aux gîtes de Chvaletice et de Litošice reste irrésolue pour le moment, la quantité de  $\text{P}_2\text{O}_5$  étant trop grande pour pouvoir être expliquée uniquement par la sécrétion habituelle, assez fréquente d'ailleurs sur les gisements des minerais de fer.

## II. Les phosphates de Železník.

M. K. Zimányi avait décrit dans deux communications trois phosphates d'alumine, provenant de la localité Železník près de Sirk, au Sud de Velká Revúca en Slovaquie: la variscite, la vashegyite et un phosphate de la composition chimique  $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{P}_2\text{O}_5 \cdot 17\text{H}_2\text{O}$ , auquel il ne donne pas de nom. Le matériel recueilli en 1920 sur la localité m'a permis de compléter les recherches de M. Zimányi, surtout au point de vue optique.

La variscite de Železník se trouve en nodules et incrustations dans une brèche schisteuse; elle a une couleur vert clair avec une teinte bleuâtre. A l'oeil elle apparaît compacte, au microscope cryptocristalline. Dureté 4—5. Densité 2.453. L'indice de réfraction est voisin de 1.565. La roche-mère est phosphatisée presque entièrement elle aussi, il n'en reste qu'un peu de grains de quartz et d'écaillés de mica blanc, quelques parties de pyrite partiellement altérée et un pigment graphique abondant.

Les analyses chimiques, faites par M. Loczka, montrent un excédent d'eau sur la composition  $\text{AlPO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  de la variscite cristallisée ce qui est en accord complet avec le résultat de l'investigation microscopique — les modifications amorphes et cryptocristallines étant toujours plus riches en eau que celles qui sont cristallisées.

La vashegyite est postérieure à la variscite, de la quelle elle se forme. Elle est terreuse, blanche, molle, au microscope amorphe; par ci et par là, on observe les commencements d'une cristallisation. L'indice de réfraction est très voisin de 1.5046, supérieur à celui de l'évansite, 1.485, et inférieur à celui de l'uhligite (fischérite colloïdale), 1.533. La composition chimique empirique résulte de l'analyse de M. Loczka:  $4\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{P}_2\text{O}_5 \cdot 3\text{OH}_2\text{O}$ . Pour caractériser la relation entre la vashegyite et les phosphates l'accompagnant, c'est à dire la variscite et la wavellite, je lui propose la formule  $\text{AlPO}_4 \cdot [\text{Al} \cdot \text{OH}]_3 \cdot [\text{PO}_4]_2 \cdot n \text{H}_2\text{O}$ , dans laquelle le nombre  $n$  se rapproche de 13.



Le phosphate d'aluminium, à qui M. Z i m á n y i n'avait pas donné de nom, est, à mon avis, de la wavellite. Elle est constituée, comme on peut s'en apercevoir au microscope, par des sférolithes fort petits, dont la réfraction varie entre 1.542 et 1.544, c'est à dire, elle est intermédiaire entre les indices  $n_m$  et  $n_g$  de la wavellite, et dont les individus montrent un caractère positif d'allongement.

Pour  $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{P}_2\text{O}_5$ , il résulte de l'analyse de M. L o c z k a dans ce minéral la même relation que dans la wavellite, 3 : 2; la seule différence se manifeste dans la teneur en eau, facile à expliquer par l'admixture de presque 15 % de substances insolubles dans les acides et hydratées elles aussi.

En outre, j'ai pu constater sur les échantillons de Železník un phosphate ferrique amorphe, identifié avec la delvauxite par l'analyse microchimique et par la détermination de l'indice de réfraction.

L'évansite décrite pour la première fois par F o r b e s sur le matériel provenant de Železník, a pu être constatée dans un autre gisement en Slovaquie, celui de Nižná Slaná près de Rožňava. Les valeurs trouvées, densité 1.924 et indice de réfraction 1.485, confirment les données de M. M. F. E. W r i g h t et W. T. S c h a l l e r sur les évansites américaines.

*L'institut minéralogique et pétrographique  
de l'Université Charles à Prague.*



# Sur la nitration du $\beta$ -acétonaphtalide.

Par

V. VESELÝ et M. JAKEŠ.

Présenté le 22 Octobre 1922.

Dans le présent travail, nous avons trouvé qu'il se forme, dans la nitration de l'acéto- $\beta$ -naphtalide, en solution dans l'acide acétique anhydre, à côté de la nitro-1-acétonaphtalide-2 et de la nitro-8-acétonaphtalide-2, une proportion considérable de nitro-6-acétonaphtalide-2, fusible à 224°. En partant de cette nouvelle nitro-acétonaphtalide, nous avons préparé les dérivés suivants: la nitro-6-naphtylamine-2, F. 203°, le sulfate neutre, le sulfate acide en deux modifications; le sulfate du nitro-6-naphtalène-diazonium-2, très stable en solution aqueuse chaude; le nitro-6-naphtol-2, F. 158°, le diamino-2.6-naphtalène, F. 222°, et le dinitro-2.6-naphtalène F. 268°.

Nous avons, en même temps, établi des règles de substitution dans le noyau naphtalénique. Après la première substitution dans le noyau benzénique par les groupes OH-, NHAc — ou par un halogène, on observe que les nouveaux substituants se mettent en ortho ou para, c'est-à-dire, qu'il se forme des dérivés susceptibles de se transformer en ortho- ou para-quinones. Nous appelons des tels dérivés „*quinogènes*“. Quant aux dérivés naphtaléniques, nous avons pu constater qu'après la première substitution, soit en  $\alpha$ , soit en  $\beta$ , par les groupes OH-, NHAc ou par les halogènes-les nouveaux substituants favorisent également les positions quinogènes, c'est, à-dire, qu'il se forme les dérivés 1.2-, 1.4-, 1.5-, 1.7-, 2.3- et 2.6.

---



# Sur la réduction partielle des dinitronaphtalines.

Par

V. VESELÝ et K. DVOŘÁK.

Présenté le 12 janvier 1922.

Dans un mémoire antérieur\*) nous avons indiqué un nouveau mode, permettant de remplacer, dans les amines aromatiques, des groupes aminogènes par les groupes nitrogènes, en faisant réagir la solution du sel diazonium sur un mélange de cuivre moléculaire avec une solution d'un nitrite alcalin. Dans le présent travail nous avons utilisé cette méthode pour la préparation de la dinitronaphtaline 1.4, 2.5 et 2.8, en partant des nitronaphtylamines correspondantes.

Nos essais de transformer la 2-nitro-1-aminonaphtaline et la 1-nitro-2-aminonaphtaline en 1.2-dinitronaphtaline, par une réaction analogue, n'ont fourni que le naphtaline-1-diazoxyde-2 et naphtaline-2-diazoxyde-1.

En soumettant la dinitronaphtaline 2.5 et 2.8 à la réduction partielle au moyen du sulfure d'ammonium en solution alcoolique, nous avons pu nous convaincre, que dans tous les deux cas ce réducteur n'attaque que le groupe nitré en position  $\beta$ , tandis que la réduction par une solution alcoolique de chlorure stanneux, employée en quantité nécessaire pour opérer la réduction d'un seul de groupes nitrés, nous a transformé presque exclusivement le groupe en  $\alpha$ .

En réduisant, en même temps, un mélange équimoléculaire du para- et orthonitrotoluène par une quantité de  $\text{SnCl}_2$ , ne suffisante qu'à réduire la moitié de ces deux corps nitrés, nous avons démontré qu'il se forme seulement la toluidine para; un mélange de la  $\alpha$ - et  $\beta$ -nitronaphtaline, par contre, soumis à une réduction analogue, nous a fourni principalement la  $\beta$ -naphtylamine, à côté d'à peu près 30% de la  $\alpha$ -naphtylamine.

---

\*) Comptes Rendus de la „Česká akademie pro vědy a umění“ à Prague, 1921, XXX, no. 6.



# Sur les équations différentielles ordinaires du 3<sup>me</sup> ordre avec la série de transformation terminée dans les deux sens.

Par

FR. RÁDL.

Présenté le 26 mars 1922.

Les recherches de M. Darboux sur ceux des équations de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial g} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial g} + c z = 0$$

qui sont résolubles par la méthode de Laplace, a l'auteur élargi auparavant sur les équations diff. *ordinaires* du 2<sup>me</sup> ordre. Dans cette note la méthode est généralisée sur l'ordre 3<sup>me</sup> des équations.

Les systèmes

$$y_1'' + h y' + H y = 0, y_1 = y' + p_1 y; Y' + p_1 Y + k y' + K y = 0, Y = y'',$$

l'où par l'élimination resp. de  $y_1$ ,  $Y$  on obtient l'équ. donnée, définissent les valeurs  $h$ ,  $H$ ,  $k$ ,  $K$  et l'on peut ensuite écrire l'équ. proposée dans la forme

$$y''' + \frac{1}{2} \int (k - h) dx y'' + k y' + K y = 0;$$

si nous obtenons les expressions pour  $h_{-i-p}$ ,  $k_{-i-p}$ ,  $K_{-i-p}$  d'une équation arbitraire de la suite de Laplace, qui est définie par le premier système au-dessus,

$$\dots f_{=j} \dots f_1, f, f_1 \dots f_i \dots,$$

le problème est résolu.

Il est nécessaire pour ce but introduire encore les invariants  $\Delta$ ,  $\Delta$  qui sont analogues à la *résultante* des équ. algébriques. L'auteur a démontré, que si l'on pour l'équ.  $f_i$  suppose  $h_i = H_i = 0$ , il y a lieu pour l'équ.  $f_{i=p}$  la formule



$$\Delta_{i-p} = \frac{H_{p+1} H_{p-1}}{H_p^2}, \quad H_p = \begin{vmatrix} A & A'' & \dots & A^{2p} \\ A' & A''' & \dots & A^{2p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^p & A^{p+2} & \dots & A^{3p} \end{vmatrix}, \quad A = e^{\int p_1 dx}$$

de laquelle on peut conclure sur les expressions pour  $h_{i-p}$ ,  $k_{i-p}$ ,  $K_{i-p}$ .



# La représentation projective d'une surface de troisième degré $S_2^3$ de l'espace à quatre dimensions — dans un plan $\pi_0$ .

Par

V. HLAVATÝ.

Présenté le 28 avril 1922.

La surface à deux dimensions et du troisième degré  $S_2^3$  est formée par les points d'intersection de deux faisceaux collinéaires des plans  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_2$ , ayant pour l'axe la droite  $D_1$  resp.  $D_2$ . Les deux droites ne sont pas situées dans un même plan.

Chaque point „ $a_0$ “ du plan  $\pi_0$  peut être coordonné à un plan  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_2$  d'une façon projective, d'où suit, que le point d'intersection  $a \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2$  (appartenant donc à  $S_2^3$ ) est représenté par „ $a_0$ “. En continuant de cette façon on démontre, que les droites  ${}^2K_0$  dans  $\pi_0$  répondent aux sections coniques  ${}^2K$  situées sur  $S_2^3$ . — Il y a un point  $X_0$  dans  $\pi_0$  qui représente une ligne droite  $X$ . Cette droite se trouve dans l'espace  $\vartheta \equiv (D_1 D_2)$  et rencontre toutes les deux droites  $D_1$  et  $D_2$ . Chaque ligne droite  $L_0$  passant par  $X_0$  répond à une droite „ $L$ “ de surface  $S_2^3$ , qui rencontre  $X$ . — Chaque courbe conique  ${}^3K_0$  par  $X_0$  représente une courbe cubique  ${}^3K$  rencontrant  $X$ . Chaque courbe  ${}^3K$  fait le lieu géométrique des points communs d'un espace linéaire à trois dimensions  $E_3^1$  et de la surface  $S_2^3$ . — Chaque courbe conique  ${}^4K_0$  ne passant par  $X_0$  représente une courbe du quatrième degré  ${}^4K$  à triple courbure, qui n'est pas située dans un même espace  $E_3^1$ . [Il y a quatre points d'intersection  $(E_3^1 {}^4K)$ ]. — Se servant de cette représentation, on peut démontrer beaucoup de qualités diverses de la surface  $S_2^3$ . En voilà quelques les plus intéressantes: Sur la surface  $S_2^3$  on peut fixer toutes les sortes de courbes  ${}^2K$  et  ${}^3K$ . Le faisceau de  $\infty^1$  courbes.  ${}^4K$  fixé par quatre points provoque sur chaque courbe  ${}^2K$  une involution de points. La courbe  ${}^4K$  a quatre points (réels ou imaginaires) à l'infini. — Il y a une seule droite de surface parallèle à  $X$ . Par chaque de ses points on ne peut mener qu'une parabole  ${}^2K$ .

---



# La construction de l'espace quadratique à trois dimensions $E_3^2$ par 14 points.

Par

V. HLAVATÝ.

Présenté le 28 Avril 1922.

Un espace  $E_3^2$  est fixé par ses 14 points. On en peut prendre 13 qui déterminent  $\binom{13}{2}$  espaces réglés  $E_3^{2'}$  dont chacun contient  $\infty^2$  droites de surface. Deux de ces espaces  $E_3^{2'}$  se rencontrent dans une surface biquadratique à deux dimensions  $S_2^4$ . Chaque espace linéaire  $E_3^1$  passant par le quatorzième point  $p_{14}$  rencontre  $S_2^4$  dans une courbe biquadratique  $C_4^1$ . Les éléments  $(p_{14} C_4^1)$  fixent une quadrique  $Q_2^2$  de l'espace  $E_3^2$ .

Les treize points, on les groupe comme suit: Quatre points  $^1a \dots ^4a$  dans un espace  $\mathfrak{A}_3^1$ , quatre points  $^1b \dots ^4b$  dans  $\mathfrak{B}_3^1$ , trois points  $^1p \dots ^3p$  fixant le plan  $P_2^1$  et deux points  $^1C$   $^2C$  se trouvant sur la ligne droite de surface  $L_1^1$ . Dans l'espace  $\mathfrak{A}_3^1$  resp.  $\mathfrak{B}_3^1$  on obtient encore le point d'intersection  $^5a \equiv (\mathfrak{Q}_1^1 \mathfrak{A}_3^1)$  resp.  $^5b \equiv (\mathfrak{Q}_1^1 \mathfrak{B}_3^1)$ . On démontre facilement le théorème suivant: Les quadriques  $A_2^2$  et  $B_2^2$  de l'espace  $E_3^{2'}$ , qui passent par les cinq points „ $^1a$ “ resp. „ $^1b$ “ appartiennent à un faisceau  $F_a^1$  resp.  $F_b^1$  de  $\infty^1$  quadriques. Chaque faisceau fixe une courbe biquadratique  $\alpha_1^4$  resp.  $\beta_1^4$  qui — hors de quatre points dans le plan d'intersection  $(\mathfrak{A}_1^3 \mathfrak{B}_1^3)$  — passe par les cinq points „ $^1a$ “ resp. „ $^1b$ “.

Le plan  $P_2^1$  rencontre l'espace  $\mathfrak{A}_3^1$  resp.  $\mathfrak{B}_3^1$  dans la ligne droite  $D_1^1 \equiv (P_2^1 \mathfrak{A}_3^1)$  resp.  $E_1^1 \equiv (P_2^1 \mathfrak{B}_3^1)$  sur laquelle on obtient l'involution de points  $I_a$  resp.  $I_b$ , provoquée par la biquadratique  $\alpha_1^4$  resp.  $\beta_1^4$ . L'involution  $I_a$  et les trois points „ $^1p$ “ représentent le faisceau de courbes côniques dont l'intersection avec  $E_1^1$  est une autre involution de points  $I_b'$ . La paire commune  $(i i')$  de ces deux involutions  $I_b$  et  $I_b'$  fixe avec les „ $^1p$ “ une courbe cônique appartenant à  $E_3^{2'}$ , qui rencontre  $D_1^1$  dans deux points  $i'' i'''$ . Pour construire la quadrique  $A_2^2$  resp.  $B_2^2$ , on fait l'usage de la courbe biquadratique  $\alpha_1^4$  resp.  $\beta_1^4$  et de deux points  $i'' i'''$  resp.  $i i'$ .



Un espace linéaire quelconque  $E_3^1$  rencontre „ $L_1^1$ “ dans un point „ $l$ “ et les quadriques  $A_2^2$  resp.  $B_2^2$  dans deux sections côniqes,  $S_2^2 S_2^{2'}$  qui ont deux points communs. Les éléments  $(l S_2^2 S_2^{2'})$  fixent une quadrique  $Q_2^{2'}$  de l'espace  $E_3^{2'}$ . — En regroupant les 13 points d'une autre façon, on obtient une autre quadrique  $Q_2^{2''}$  de l'espace  $E_3^{2''}$  dans  $E_3^1$ . La courbe  $C_1^4 \equiv (Q_2^{2'} Q_2^{2''})$  appartient à  $S_2^4$  cherchée. L'espace  $E_3^1$  passant par le point quatorzième  $p_{14}$ , on obtient une quadrique  $Q_2^2$  de l'espace  $E_3^2$  demandé en se servant des éléments  $(p_{14} C_1^4)$ . L'ensemble de  $\infty^3$  surfaces  $Q_2^2$  forme l'espace  $E_3^2$ . — On construit l'espace  $E_3^2$  touchant 14 espaces linéaires  $E_3^1$  en transformant le problème ci-dessus cité suivant la lois de la dualité.



Une preuve du théorème de Riemann-Roch  
pour les diviseurs fractionnels  
par les méthodes de la théorie des fonctions.

Par

K. DUSL.

Présenté le 6 Mai 1921.

La théorie arithmétique des fonctions algébriques exprime le théorème de Riemann-Roch pour les diviseurs fractionnels. L'auteur donne une preuve du théorème énoncé par les méthodes générales de la théorie des fonctions. Les quotients de deux différentiels linéairement indépendants (appartenant au même diviseur réciproque) donnent des fonctions rationnelles de la classe des fonctions „liées“ (gebundenen Functionen) de M. F. Klein.

---



# Sur la variation de la réfraction de l'oxygène avec la pression au-dessous d'une atmosphère.

Par

Ph. Dr. JAROSLAV ŠAFRÁNEK.

Présenté le 10 mars 1922.

La variation de la réfraction de l'oxygène avec la pression au-dessous d'une atmosphère a été étudiée selon la méthode du prof. Posejpal à l'aide du même arrangement expérimental, dont il s'est servi dans ses travaux sur l'air et l'anhydride carbonique, avec des petites modifications nécessaires à la production de l'oxygène. Ce gaz a été produit par l'électrolyse de KOH. On fait pénétrer ce gaz dans le système, qui a été évacué jusqu'au vacuum de Roentgen.

On a mesuré le quotient  $ds/dp$  pour sept pressions diminuant :  $p = 699.6, 591.9, 492.7, 360.5, 292.7, 190.9, 89.5 \text{ mm}$  et chaque valeur a été mesurée dix fois. On a trouvé les valeurs suivantes : 0.30936, 0.30917, 0.30888, 0.30862, 0.30807, 0.30767, 0.30754 ( $16^\circ \text{ C}$ ). Les valeurs de  $ds/dp$  forment une progression croissante avec le  $p$ .  $ds/dp$  est alors une fonction de la pression et en supposant dans la première approximation une relation linéaire nous posons :  $\frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p$ . Par la méthode des moindres carrés on a calculé les valeurs suivantes pour les paramètres :  $\alpha_1 = 0.30721 \pm 0.00012$ ,  $\beta_1 = 0.00000324 \pm 0.00000028$ . Si on calcule  $ds/dp$  pour une pression de 760 mm, à l'aide de ces paramètres, on obtient :

$$\left( \frac{dp}{ds} \right)_{760} = 0.30967 \pm 0.00033.$$

L'évaluation de la réfraction de l'oxygène donne

$$10^6 (n - 1) = 275.16 \pm 0.29 \text{ pour la pression de } 760 \text{ mm normale,}$$
$$10^6 (n - 1) = 275.27 \pm 0.29 \text{ pour la pression de } 760 \text{ mm à Prague.}$$



En substituant dans la formule de Mascart  $(n - 1) = K \cdot p (1 + \beta p)$  pour  $K = \frac{\lambda}{L} \alpha_1$ , et  $\beta = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  on obtient (température 16°):

$$K = 0.33925.10^{-6} \pm 0.00013.10^{-6}, \beta = 0.00000527 \pm 0.00000047.$$

La réfraction calculée d'après la formule de Mascart est:

$$10^6 (n - 1) = 274.07 \pm 0.25$$

la valeur corrigée de M. Posejpal.

Ce travail a été exécuté à l'Institut de physique de l'université tchèque de Prague sous la direction de M. le professeur Dr. V. Posejpal.



# О фульгуритах.

П. Н. ЧИРВИНСКИЙ.

Présenté le 27 janvier 1922.

Фульгуриты должны бы представлять для специалистов различных наук значительный интерес, но именно это обстоятельство, может быть, и объясняет то, что ими сравнительно немногие интересуются, а физики, геофизики, метеорологи и электротехники о них почти даже ничего не знают. Больше всего фульгуриты исследовались геологами и минералогами, но и то недостаточно всесторонне: для первых это была „петрографическая мелочь“, для минералогов фульгурит не минерал, для петрографов не горная порода. Так или иначе о фульгуритах накопилась довольно большая литература. Мы назовем следующих авторов, писавших о природных фульгуритах: L. D. Hermann (1711), Priestley (1790), Fiedler (1817), Humboldt (1819 и 1859), Arago (1821), G. D. Gibb, Ch. Darwin, W. Wieke (1859), H. Abich (1870), А. Рогович (1873), M. P. Harting (1874), F. Roemer (1876), Gumbel (1882), A. Wichmann (1883), A. Heim (1886), G. P. Merrill (1886), F. Rutley (1889), W. H. Hobbs (1899), G. T. Bonney (1900), A. A. Julien (1901), G. Merzbacher, П. Я. Армащевский (1903), R. W. Wood (1910), Al. Lacroix (1915), А. П. Павлов (1919) и нек. др.

Искусственно получали фульгуриты Beudant, Hachette et Savart (1828), W. Rollmann (1868), R. W. Wood (1899), П. Н. Чирвинский (1905), И. И. Косоногов (1905), Butcher (1909) и нек. др.

Повидимому древнейшую находку фульгуритовых трубок в песке сделал L. D. Hermann в Massel'е в пределах нынешней Силезии недалеко от Бреславля.<sup>1)</sup> Он выражается так: „стекловатые трубки, которые растут в желтом песке снизу вверх и представляют очевидно продукт подземного огня“. Если на могиле знаменитого Фрэнклина, изобре-

---

<sup>1)</sup> L. D. Hermann, Maslographia. Brieg 1711.



тателя громоотвода, стоит надпись „поймал молнию с неба“ (eripuit coelo fulmen), то на забытой могиле Н е r m a n n'a можно бы написать: „нашел молнию в земле“. Фульгуриты в виде характерной формы трубок описывались главным образом из песка, в котором они лучше всего образуются. Однако бывают фульгуриты и в твердых породах, изверженных и осадочных, которые образуются преимущественно на вершинах гор. О них писалось реже (см. в работах Н u m b o l d t'a, Н. А b i c h'a, Р о г о в и ч а, Н e i m'a, Л а с р о i x). Если бы я располагал возможностью напечатать свою статью о фульгуритах полностью, я бы придал ей характер иллюстрированной монографии с подробным использованием всей литературы вопроса, но сейчас я ограничусь лишь извлечениями из этого материала с целью ближе осветить морфологические особенности фульгуритов в связи с их генезисом и дать их классификацию.

Нужно сказать, что еще в сороковых годах прошлого столетия высказывались сомнения в реальном существовании фульгуритов, как продуктов удара молнии.

17. июля 1823 года молния ударила в Rausch в Восточной Пруссии в ствол березы. У подножия дерева образовалось две дыры. Одна из них была глубиною в одни фут, причем ничего особенного не наблюдалось, глубже однако появился фульгурит. Во второй дыре фульгурита не было. 29. апреля 1825 года молния ударила в деревне Августдорф близ Роггенфельда, причем место удара было замечено по поднявшемуся дыму. Спустя месяц при осмотре здесь было найдено углубление в 3—4 дюйма и поперечником в 9—10 дюймов. В почвенном слое были найдены только отдельные спекшиеся куски земли, однако ниже, когда пошел чистый песок, была обнаружена настоящая фульгуритовая трубка в полдюйма поперечником.

По сообщению W. Wicke<sup>1)</sup> молния ударила 15 июня 1858 года в берег реки близ города Ольденбурга. Место удара находилось в 10 футах от воды и обратило на себя внимание тем, что после удара над ним показалось облачко пара. Виднелись две дырки, окруженные валиком из белого песка. При раскопке найдены две нежные фульгуритовые трубки в песке, который здесь образует прослой в полтора фута над болотом, в котором фульгурита не образовалось. Не было фульгурита и в покрывающем песок шестидюймовом почвенном слое.

Ch. D a r w i n<sup>2)</sup> описал свои находки в песчаных пространствах, отделяющих лагуну Дель-Потреро от берегов Ла-Платы в Южной Америке. Пески эти покрыты подвижными дюнами. Благодаря передвижению трубки, первоначально вполне скрытые в песке, начинают торчать наружу и постепенно обламываются. Многочисленные обломки их, располагаясь

<sup>1)</sup> W. W i c k e, Direkte Beobachtung über Entstehung von Blitzröhren. Ann. der Physik und Chemie, 1859, Bd. 106, S. 158—159.

<sup>2)</sup> Ch. D a r w i n, Путешествие на корабле Бигль. Geol. Trans., vol. II, p. 528. Ные эти последние фульгуриты сохраняются в Британском Музее в Лондоне.



вместе, показывают место их первоначального залегания. Разгребая песок руками D a r w i n проследил одну из них на глубину двух футов, а присоединив сюда обломки, здесь же лежавшие, получил трубку несколько более 5 футов. Внутренняя поверхность трубок была совершенно остеклованная, гладкая и блестящая. „Небольшой осколок при исследовании под микроскопом напоминал своими многочисленными пузырьками, наполненными воздухом, а может быть парами, сплав, получаемый на паяльной трубке“. По внешнему виду, покрытые бороздами и шероховатые, по Дарвину, вполне походят на фульгуриты из Кумберленда, где они могут достигать 30 футов. Поверхность трубок Дарвин очень удачно сравнивает с морщинистым корнем, корою вяза или пробкового дуба. В окружности его трубки имели около двух дюймов, а некоторые даже около четырех. „Борозды представляют очевидно результат давления, которое производил на трубку песок в то время, как вещество ее было еще расплавленным под действием высокой температуры.“ Разбирая условия нахождения фульгуритов в указанном месте группами, Дарвин полагает, что их положение группами объясняется тем, что молния при ударе в землю дает несколько ветвей.

Любопытны находки фульгуритов близ Старцинова недалеко от города Олькуши в Польше, о чем мы узнаем из работы F. R o e m e r'a.<sup>1)</sup> Песок здесь сыпучий, сероватобелый. Фульгуритовые трубки оказались окруженными на 3—4 дюйма кругом песком, приобретшим светлорусый цвет (изменение цвета песка мне удалось вызвать при получении искусственным путем фульгурита в желтом песке). Толщина фульгуритов найденных здесь колебалась от толщины руки до толщины толстой вязальной спицы. Наиболее тонкие трубочки были прозрачны и очень хрупки. Поперечное сечение трубок то круглое, то ребристое, то сплюснутое. Наиболее тонкие трубочки были почти всегда идеально круглы. Более толстые трубки обычно несут неправильный шероховатый продольный гребень. Сплюснутые трубочки часто неожиданно переходят в круглые. Толщина стенок фульгуритов изменчива. У фульгуритов в палец толщиной обычно стенки имеют толщину от 1 до 2 мм. В некоторых случаях она настолько толста, что внутренний канал равняется диаметру булавочной головки. Нередко наблюдались ответвления от главного ствола, а иногда было распадение на две равные ветви (ср. случай фульгурита из Вигуровщины близ Киева, о котором сообщается нами ниже). Наиболее длинный фульгурит, найденный здесь, оказался равным 219 сантиметрам. Был снят план расположения фульгуритовых трубок на площади 20 тысяч квадратных футов. На этой площади заре-

<sup>1)</sup> F. R o e m e r, Ueber ein Vorkommen von Blitzröhren oder Fulguriten bei Starcynow etc. N. Jb. 1876, S. 33—40. Микроструктуру этих фульгуритов описал и изобразил A. W i c h m a n n, Ueber Fulgurite. Z. d. Deut. Geol. Ges. 1883, Bd. XXXV, S. 849—859. При чтении этой статьи надо иметь в виду справедливые замечания G ü m b e l'я, Zeit. d. Deutsch. Geol. Ges. 1884, Bd. XXXVI, s. 179—180.



гистрировано 26 трубок, группирующихся, судя по плану, в две полосы вытянутые с ЮЗ на СВ.

R. W. Wood'у в East Hampton, Long Island в 1910 году посчастливилось быть свидетелем удара молнии в песок и затем откопать фульгурит, этот „автограф молнии“, как он выражается.<sup>1)</sup> От места удара молнии он находился всего в каких-нибудь 50 футах. Было это на полянке, близ дома, где он жил. Удар сопровождался звуком, похожим на пушечный выстрел. Перед его глазами мелькнул огонь у поверхности земли и поднялся столб пара и дыма высотой в 6—8 футов. До этого времени всю неделю шел дождь и почва была сильно смочена. Wood заметил три участка поперечником около 18 дюймов, покрытые завядшей травой. В центре одного такого участка виднелась дыра поперечником в 1 дюйм, а по соседству еще одна меньшая (около  $\frac{1}{4}$  дюйма). Wood решил сделать отливку фульгурита, для чего он расплавил около 7 килограммов олова и вылил его в дыру. Затем фульгурит был выкопан, трубки разрушены и отливка внутренней полости подвергся изучению в отношении формы (этот отливка он неудачно называет „искусственным фульгуритом“). При откапывании фульгурита Wood наткнулся на глубине нескольких дюймов от поверхности почвы на боковое ответвление, которое было связано с главной ветвью одной или двумя веточками. Металл в это ответвление не проник. Длина отливка оказалась равной 4 футам. Отливка имел несомненно спиральное изогнутие во всю свою длину. Особенно ясно оно было у его более тонкого, нижнего конца. Поперечник отливка увеличивается, приблизительно, до двух фут считая сверху, затем уменьшается постепенно книзу (сравни размеры обхвата у киевского фульгурита). Спираль эта по указанию Wood'а идет в направлении часовой стрелки (слева направо) или что то же согласно завиткам штопора. Из приложенной фотографии можно заключить, что величина хода спирали не остается постоянной: вверху она более растянута, чем внизу (это по моему мнению вызвано худшей электропроводностью лежащего глубже слоя песка).

Следующими интересными сведениями о нахождении фульгуритов в песке и песчанике близ города Чигирине Киевской губернии мы обязаны А. С. Роговичу.<sup>2)</sup> Он их наблюдал на Каменной горе, которая расположена недалеко от Чигирине. „Как в верхних слоях песка, лежащих над песчаником, так и в самых песчаниках найдены фульгуриты, различающиеся поперечником, по цвету и легкости очень сходные с пемзой.“ „Форма их четырехугольная или неправильная, толщина уменьшается, смотря по плотности слоя, в котором они проходят.“ „В сыпучем песке они часто принимают пузырчатую форму с стекловатой поверхностью

<sup>1)</sup> R. W. Wood, Experimental Study of Fulgurites. Nature. Vol. LXXXIV, London 1910, p. 70.

<sup>2)</sup> А. Рогович, О громовых стрелах или фульгуритах Каменной горы в г. Чигирине. Пр. 3-го съезда Русс. Ест. в Киеве в 1871 году. Киев 1873.



внутри; в плотных песчаниках трубки эти утоньшаются и принимают четковидную форму, они бывают то простые, то распадаются на ветви, иногда оканчиваются глухими концами.“ „В тех местах, где в направлении громовых стрел встречаются трещины, то поверхность их на значительном пространстве покрыта стекловидною массою буроватого цвета.“ „Следы разновременных ударов молнии можно видеть почти на каждой отколотой для приготовления жерновов глыб песчаника.“ „Следы прежних ударов молнии легко отличаются бурым, матовым цветом.“ „Трубка, которую я имею честь представить, взята мною из того места, где ударом молнии была убита лошадь в прошедшем 1870 году.“

Gümbel исследовал несколько фульгуритов из Ливийской пустыни.<sup>1)</sup> Фульгуриты эти довольно правильной круглой формы с внутренним диаметром до 5—10 мм и среднею толщиной стенок около одного миллиметра. Трубки покрыты неправильно сменяющимися друг друга продольными гребешками и рвами, которые в общем намечают спиральный ход трубок. Кроме того во многих местах стенки фульгуритов оказываются продырявленными округлыми отверстиями, имеющими оплавленные края. Весьма неправильную внешнюю форму имеют темные, почти черные фульгуритовые трубки из той же Ливийской пустыни. Я полагаю, что они могли возникнуть в глауконитовом или магнетитовом песке (такие черные фульгуриты я получал в глауконитовом песке искусственно). У этих фульгуритов толщина канала имеет 3—5 мм, а толщина стенок  $2\frac{1}{2}$ —3 мм. Продольные ребра, покрывающие черные фульгуриты, имеют по своей длине вздутия, напоминающие суковатую палку. На поперечном изломе получается лучистое строение. Он соглашается с Ch. Darwin'ом и Harting'ом,<sup>2)</sup> что фульгуритовая трубка *in statu nascendi* была округлой и большего диаметра, но потом еще будучи жидкою сплюснулась действием внешнего давления вокруг безвоздушного пространства, возникшего по месту прохождения молнии в песке. Так и образовались ребра. Это предположение кажется и мне правдоподобным, но его надо дополнить воззрениями G. P. Merrill'a,<sup>3)</sup> W. S. Bailey<sup>4)</sup> и F. Rutley,<sup>5)</sup> которые полагают, что гребни могут образоваться от растекания электричества в стороны благодаря изменчивости в проводимости

<sup>1)</sup> G ü m b e l, Ueber die Bildung der Stylolithen und über Fulgurite. Zeit. d. deut. geol. Ges. 1882, Bd. XXXIV, S. 647—648.

<sup>2)</sup> M. P. H a r t i n g, Notice sur un cas de formation de fulgurites et sur la présence d'autres fulgurites dans le sol de la Néerlande. Publié par l'Acad. Roy. Néerlandaise des Sciences. Amsterdam 1874.

<sup>3)</sup> G. P. M e r r i l l, On Fulgurites. Proceed. of U. S. Nat. Mus. 1886, vol. IX, p. 83.

<sup>4)</sup> W. S. B a y l e y, A fulgurite from Waterville, Maine. Amer. Journ. of Sc., vol. XLIII, p. 327.

<sup>5)</sup> F. R u t l e y, On Fulgurites from Monte Viso. Quart. Journ. of Geol. Soc. XLV, p. 60—66, 1889.

О н ж е. On Fulgurites from Griqualand West. Miner. Magazine 1894, X, N. 48, p. 280, с 8 рис.



окружающего песка. По моему мнению однако это причина второстепенная. Что главной причиной образования ребер служит сплющивание трубки в момент образования, по-моему, доказывает то, что глубоко лежащие тонкие трубки фульгурита бывают не ребристыми, а круглыми. Это же наблюдается у тонких трубочек, получаемых при пропускании искр через песок. Дело в том, что тонкие цилиндрические образования под одним и тем же давлением сплющиваются труднее толстых, ибо из физики известно, что относительное уменьшение объема пустого цилиндра с внутренним радиусом  $R^0$  и внешним радиусом  $R$  под внешним давлением выражается

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{5 - 4b}{E} \cdot \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} P$$

где  $b$  коэффициент *P o i s s o n*'а,  $E$  модуль *Y o u n g*'а.

*R u t l e y* исследовал фульгуриты из окрестностей *Griquastad* в Южной Африке. Фульгуриты песчаные, как в виде обломков обычных трубок, так и в виде небольших комков почти лишенных внутреннего канала (в его статье даны рисунки). Это повидимому сходно с комками, совершенно не имеющими внутреннего канала, о которых упоминает в своей работе *G. P. Merrill*: „Их форма, по *Merrill*'у, походит на ту, что дает расплавленная масса, выплеснутая из большой ложки на землю.“ Я тоже нашел такие образования (капли с стекловатыми „псевдоподиями“) в образцах фульгуритов из Вигуровщины близ Киева и думаю, что они здесь представляют собою брызги, возникшие на поверхности песка близ того места, где ударила молния. Интересна находка в *Цанкендорфе* близ Вены (см. *Gilbert's Annalen*, Bd. LXXIV, S. 213): здесь была найдена фульгуритовая трубка, закончившаяся на границе песка и нижележащей мокрой глины полым желваком с многочисленными отверстиями. Дальнейший ход молнии можно было видеть распавшимся на красные нити, проникшие в глину на глубину около 8 дюймов, а также рассеявшихся радиально по всем направлениям на подобие нежных корешков. Красная окраска повидимому здесь вызвана местным нагреванием глины, ибо такое изменение можно вызвать в глине искусственно действием высокой температуры при доступе воздуха.

*W. H. Hobbs*<sup>1)</sup> описал фульгуриты из бурого песка из одного места штата *Wisconsin*. Интересно, что фульгурит обнаруживал несомненно спиральный ход, причем завив шел слева направо. Ребра, покрывающие поверхность фульгурита, в общем повторяли эту спираль. Фульгурит этот сходен с описанным *Bauley* спиральным фульгуритом из *Waterville, Maine*, завитым тоже слева направо. Спиральный ход очень хорошо виден на большом фульгурите, найденном в песках второй террасы Днепра недалеко от Киева (близ деревни Вигуровщина, Остерского

<sup>1)</sup> *W. H. Hobbs*, A Spiral Fulgurite from Wisconsin. Amer. Journ. of Sc. 1899, VIII, p. 17—20, с рисунками.



уезда Черниговской губернии). Фульгурит этот сохраняется в Минералогическом Кабинете Киевского Университета<sup>1)</sup> и был в 1903 году демонстрирован на одном из заседаний Киевского Общества Естествоиспытателей моим растреленным большевиками учителем проф. П. Я. Армашевским, но ближе описан не был. У этого фульгурита



Рис. 1. Общий вид фульгурита из Вигуровщины (окрестности Киева). В коробках мелкие обломки фульгуритов, собранные там же.

имеется главный ствол и вниз две почти одинаковые развилины. Спираль завита слева направо, т. е. также как это обычно бывает у винтов и что до сих пор для северного полушария мы видели у всех фульгуритов, для которых на спиральное изогнутие было обращено внимание исследователями.<sup>2)</sup> Этот наиболее длинный (он однако не целый, а склеен из обломков, порядок которых однако удалось сохранить) и лучший русский фульгурит (см. рис. 1 и 2) имеет такие размеры своих

<sup>1)</sup> Здесь сохраняются обломки тонких нередко круглых неребристых фульгуритов, собранных тоже близ Вигуровщины (см. на прилагаемой рисунке; эти обломки лежат в коробочках, рядом с большим фульгуритом). Для таких трубочек и определенною удельный вес.

<sup>2)</sup> На мой запрос L. J. S p e n s e r ответил, что сохраняющиеся в Британском Музее фульгуриты не показывают спирального изогнутия.



частей (измерения произведены по моей просьбе моим братом В. Н. Чирвинским):

Длина фульгурита по распадения на ветви (измерение сделано шнурком, делая изгибы соответственно изгибам фульгурита) 1255 сант.,

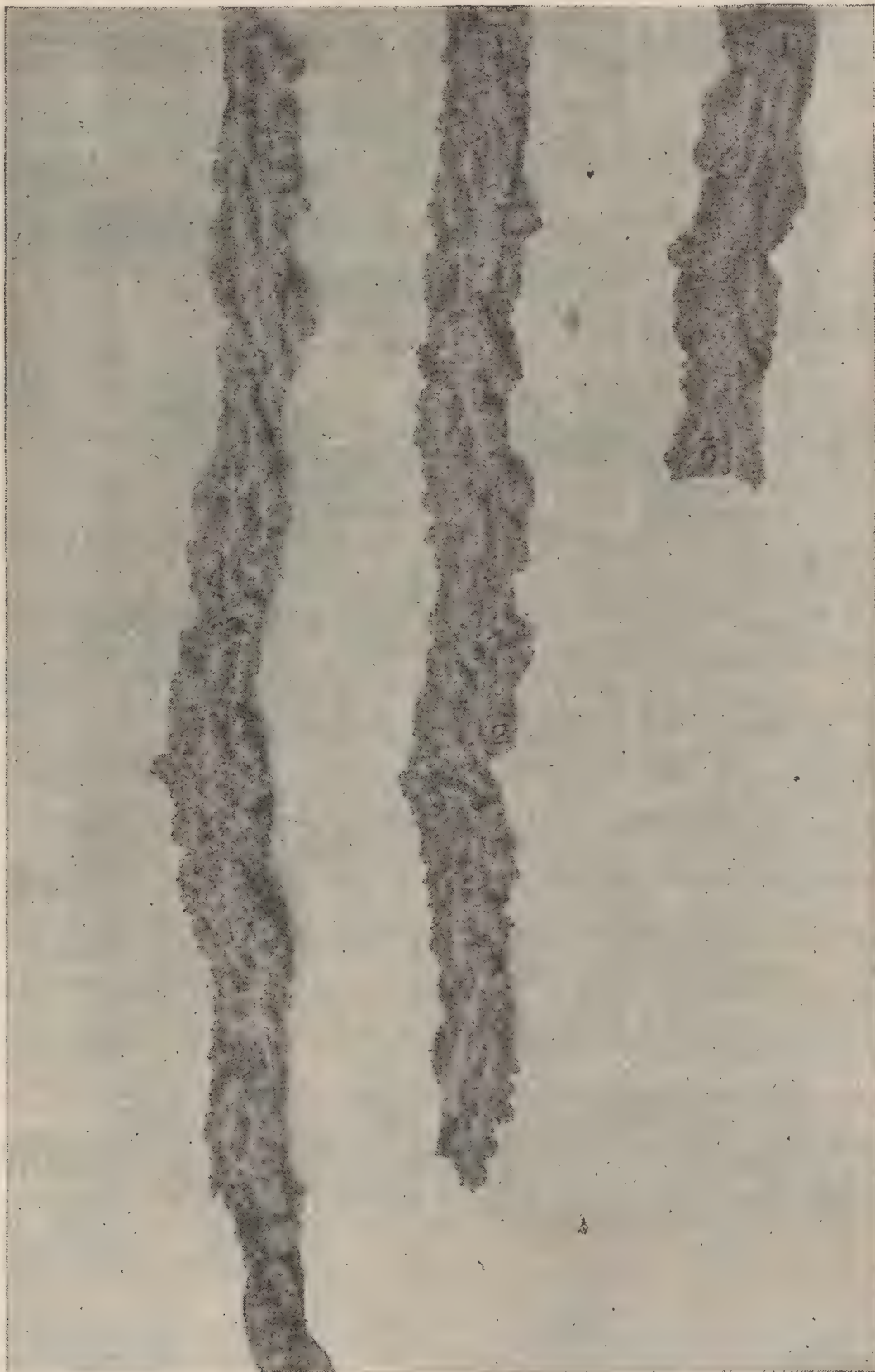


Рис. 2. Вид поверхности пбломков фульгурита Вигуровщины снятые с более близкого расстояния. Обломки главного ствола, считая сверху 1, 2, 3, и 4.

длина более толстой развилины 39 см., другой 405 см. Так как развилины не заканчивают фульгурит в естественном виде, то общая длина его должна во всяком случае превышать 160 см. Вес фульгурита около 200 грамм.



## ГЛАВНЫЙ СТВОЛ.

1) Самый тол- стый верхний конец главн. го ствола на 4 см. от его вершины.	Общий обхват (бумаж- ной лен- т. й).	Размеры и форма внутреннего просвета фульгуритовой трубки.	Толщина стенок.
2. 11 см.	8 см. 6,2 см.	6 × 8 мм. (сечение шестигранное) 6 × 9 мм. (неправильно треуголь- ное, даны высота треугольника и его сторона)	1—1,5 мм. 1—1,5 мм.
3. 20 см.	7,9 см.	не опред.	не опред.
4. 38-40 см.	7,8 см.	4 × 7 × 8 мм. (сечение непра- вильно пятиугольное)	1—1,3 мм.
5. 50 см.	6,7 см.	не опред.	не опред.
6. 60 см.	7,7 см.	не опред.	не опред.
7. 78 см.	7,2 см.	4 × 7 × 6 мм. (неправильно треуголь- ное сечение, его высота и сторона)	1,5 мм.
8. 100 см.	7 см.	не опред.	не опред.
9. 110 см.	6,8 см.	не опред.	не опред.
10. 123 см. т. е. в двух см. по раз- вилины	9,8 см.	не опред.	не опред.

## БОЛЕЕ ТОЛСТАЯ ВЕТВЬ.

1. В двух см. от осно- вания	6,4 см.	не опред.	не опред.
2. 13 см.	4,8 см.	4.5 × 7 мм. (форма округло-тре- угольная)	1,3 мм.
3. 20 см.	6,6 см.	не опред.	не опред.
4. у нижнего конца опять развилина	не опр.	у одной веточки 3 × 4.9 мм. у дру- гой) форма сечения неправильно треугольная)	1—1,2 мм.

## БОЛЕЕ ТОНКАЯ ВЕТВЬ

1. На 10 см. от ее основания	3,6 см.	25 × 4 мм. (сечение неправильно четыреугольное)	1 мм.
2. 28 см.	3 см.	19 × 2 мм. (сечение неправильно треугольное)	1—15 мм.
3. 40 см.	2,9 см.	2 × 35 мм. (сечение неправильно треугольное)	1—13 мм.



Цифры, характеризующие размеры обхвата фульгуритовой трубки, по крайней мере для главного ствола, показывают, мне кажется, известную пульсацию, объяснение которой надо искать в изменчивости и размерах боковых продольных ребер.<sup>1)</sup> Чем в свою очередь вызывается это последнее явление, я не знаю (причин вероятно здесь несколько и их следует пытаться розыскать экспериментальным путем). Спираль главного ствола, т. е. верхней части фульгурита, раза в три более растянута, нежели таковая же боковых ветвей, ибо в первом случае два полных оборота приходится на 106 см., во втором на 39—40 см. (ср. аналогичное наблюдение Wood'a). Большая сжатость спирали объясняется уменьшением электропроводности песка. К сожалению фульгуриты, попадающие в коллекции, бывают большею частью лишь малыми обломками. Так в России я могу указать на такие случаи их находок.

В Донском Музее в Новочеркасске имеются обломки песчаных фульгуритов из песчаных пространств близ станицы Казанской Донской Области, в Харьковском Университете имеются обломки из села Кочеток Змиевского уезда Харьковской губернии, собранные А. С. Ф е д о р о в с к и м, в Московском Университете есть небольшие сборы фульгуритов, слеланные на реке Оке в дюнах Муромского уезда проф. А. П. П а в л о в ы м. А. С. Федоровский сообщил мне (письмо от 9. апреля 1921 г.), что в Кочетке он выкопал на левом берегу реки Северного Донца фульгурит около одного метра длиною, но не мог после склеить его из обломков. Он же находил фульгуриты близ хутора Задонецкого Змиевского уезда, около села Черкасский Вишкин Змиевского уезда и др. мест. Самые лучшие экземпляры он оставил не выкопанными, желая это сделать позже с ббльшими предосторожностями, но до сих пор этого сделать не удалось. О находках фульгуритовых трубок в песках Туркестана кратко упоминается в работах проф. И. В. М у ш к е т о в а; находил их и Н. И. А н д р у с о в в Закаспийской области.

Уд. в. песчаных фульгуритов по Gümbel'ю колеблется от 2,35 до 2,46, т. е. приходится между уд. в. кварца (2,65) и уд. в. кварцевого стекла (2,2). Для тонких трубочек фульгурита из Вигуровщины я нашел его ниже: 1,94 при 11 Цельзия. Очевидно здесь сказалось присутствие многочисленных пор в стенках фульгуритов.<sup>2)</sup>

Химический состав песчаных фульгуритов-более или чистый кремнезем (91,23—99%). Стекло вполне изотропно, ( $n_{Na} = 1,485$  по Л а к р у а) иногда со шлирами кофейного цвета (такие шлиры наблюдал и я в фульгурите Вигуровщины) и большим или меньшим количеством пор, то

<sup>1)</sup> Явление это могло быть лучше охарактеризовано количественно, если бы взвесить одинаковой длины обломки фульгурита, взятые по всей его длине по порядку. Этого к сожалению сделать было нельзя, ибо фульгурит пришлось бы ломать.

<sup>2)</sup> Навеска равнялась 6.1268 грамма. Всего было взято 18 обломков трубочек длиною 2—3.5 сантиметра и 3—5 миллиметров поперечником. Определение сделано путем гидростатического взвешивания. Воздух изгонялся кипячением воды.



микроскопических (от того оно и приобретает характер эмали), то заметных невооруженным глазом. Кофейные шпирсы, по крайней мере в фульгурите Вигуровщины, вызываются расплавлением зернышек магнитного железняка, примешанного в ничтожном количестве к песку.

Кристаллические и осадочные породы на вершинах гор оплавляются и частью продырявливаются на известную глубину от ударов молний. Н е i m на одной вершине в группе Gotthard удалил все следы оплавления вызванные молнией, но посетив несколько лет спустя ту же вершину нашел вновь следы оплавления.<sup>1)</sup>

Особенно подробно описаны случаи оплавления андезита на вершине Малого Аларата Н. А b i c h'ом,<sup>2)</sup> но рамки настоящей статьи не позволяют нам ближе на них останавливаться. В последнее время А. Л а к р у а напечатал интересное описание и изображение песчаных фульгуритов из Сахары и каменных из Пиреней.<sup>3)</sup>

Интересно, что линейные или искровые молнии, дающие фульгуриты при ударе в землю, имеют винтовой путь в атмосфере (Н. М а с h e und E. S c h w e i d l e r. Die atmosphärische Elektrizität, 1901, S. 217). Вследствие перспективного искажения этим именно явлением может быть объяснено попятное движение некоторых из таких молний (Schleifenblitze). Петли этой неправильной спирали громадны по сравнению с величиною спиральных петель песчаного фульгурита. Замечу, что мы можем говорить о „воздушном фульгурите“ или „атмосферном фульгурите“. Дело в том, что при прохождении молнии в воздухе происходит трубка с настолько сильным разрежением, что внутри ее газ приобретает светимость слоистого типа, как это наблюдается в трубках G e i s s l e r'a или в северных сияниях. Впервые это явление было открыто фотографически у молнии К а у s e r'ом и В. W a l t e r'ом, причем первый употреблял быстро вращающуюся фотографическую камеру.<sup>4)</sup>

Такой воздушный фульгурит характеризуется не только очень малым внутренним давлением газа, но его температурой, степенью ионизации, химическими новообразованиями (гремучий газ, азотистая кислота) и способен существовать, хотя, правда, очень короткое время. Этим вероятно объясняется то, что иногда как след молнии в атмосфере может сохраняться очень короткое время слабое сияние. Взрыв гремучего газа, образовавшегося в воздушном фульгурите, является по T r o w b r i d g e'у причиной грома.

При поражении молнией деревьев нередко она обходит их ствол по спирали. Об этом мы узнаем подробнее в работах, трактующих болезни

<sup>1)</sup> A l b. H e i m, Notizen über Wirkungen des Blitzschlages auf Gesteine. Jahrb. d. S. A. G., XXI, S. 342—357, 1 Fig., 1886.

<sup>2)</sup> Н. А b i c h, Sitzber. d. Akad. d. Wiss. Wien 1870, Bd. LX, 1 Abt., S. 155.

<sup>3)</sup> А. L a c r o i x, Bulletin de la soc. franç. de Minéralogie XXXVIII (1915), 188—198, pl. I—III.

<sup>4)</sup> В. W a l t e r, Ann. der Physik 1906, Bd. XIX, S. 1042, Taf. V.



растений (случай поранения деревьев), в частности в прекрасном труде Р. S o r a u e r'a.<sup>1)</sup> Спиральный ход молнии по дереву он объясняет спиральным расположением древесных волокон. На рисунке его труда изображен дуб, пораженный молнией. Судя по его указанию дуб этот имел 23 метра высоты, а удар судя по рисунку, откуда началась спираль, пришелся на высоту около 16 метров от земли. На этих 16 метрах умещается, судя по рисунку, 3 полных оборота ленты молнии. Иначе говоря ход винта должен быть немногим более 5 метров. Направление завитков справа налево. Во время своего детства я видел в Петровско-Разумовском близ Москвы очень высокую стройную ель, которая была поражена молнией, постепенно засохла и на ее поверхности была хорошо видна желтая лента правильной спирали, где молния сорвала кору. Такую же спираль наблюдал В. К. Ч е р к а с (частное сообщение) в одном месте Полтавской губернии на пирамидальном тополе, пораженном молнией. Дерево упало и от него остался пенек, приблизительно, в его рост (1,8 метра). В этом месте свол был как-бы срезан и растрепан. Я полагаю, что этот срез вызван тем, что на этой высоте пришлась пучность отраженной электрической волны (стоячая волна).

Я предлагаю следующую классификацию фульгуритов.

1. Фульгуриты, существующие очень короткое время (не фиксированные),

- а) фульгуриты атмосферные,
- в) фульгуриты водяные, снежные и ледяные;

2. фульгуриты существующие неопределенно долгое время (фиксированные):

- а) фульгуриты органические (растительные и животные):
- в) фульгуриты песчаные,
- о) фульгуриты каменные,
- о) фульгуриты громоотводные.

Фульгуриты водные возникают при ударе молнии в водоемы, особенно озера и моря. Здесь по ее пути возникают явления электролиза растворенных солей, что может быть обнаружено при лабораторных опытах подмесью к жидкости лакмуса. Ударное пространство является источником возникновения волнообразных сотрясений, распространяющихся во все стороны в воде. Снежные и ледяные фульгуриты могут образоваться особенно в горах, покрытых снегом и ледниками. Такие фульгуриты, повидимому, встретил В. И. В о р о б ь е в летом 1903 года на горе Шугус на Кавказе. К фульгуритам органическим следует отнести следы от поражения молнией деревьев, людей и животных (последние случаи подробно описывает F l a m m a r i o n в своей книге „Атмо-

<sup>1)</sup> Р. S o r a u e r, Handbuch der Pflanzenkrankheiten, Berlin 1903, Bd. III, S. 479—497 (здесь и литература вопроса). — S t a h l, Die Blitzgefährdung der verschiedenen Baumarten. Jena 1912.



сфера“). Фульгуриты громоотводные-это случаи ударов в громоотводы, причем происходит механические разрушения в зданиях, плавление металлических проволок, перенос металлов в распыленном состоянии и пр.

Знакомство с фульгуритами логически связывается с их искусственным получением и изучением электрических разрядов вообще. Последнему вопросу посвящена громадная литература в физике, частью-в отделе метеорологии об атмосферном электричестве. Разряды (в том числе молнии) теперь не только фотографируют, но и изучают во времени с помощью вращающегося зеркала или вращающейся фотографической камеры (F e d d e r s e n, R o o d, T r o w b r i d g e, S c h m i d t, W a l t e r и др.). На фотографических снимках видно, что длинная искра возникает не сразу, а прокладывает свой путь толчками, причем частные разряды постепенно удлиняются, носят характер кистей. Так как явление происходит не мгновенно, то на снимках видно, что каждая последующая фаза в развитии искры является сдвинутой относительно предыдущей. Замечательно, что предварительные разряды в главном своем стволе точно параллельны друг другу, иначе говоря пользуются тем самым путем, что и главная результирующая искра (это лишнее доказательство реального существования воздушного фульгурита, предопределяющего ход главного разряда).

W. H o l z<sup>1)</sup> показал, как под микроскопом можно наблюдать путь искры. Он нашел, что искра, которая пробивала 20—30 см длины массивный стеклянный цилиндр поперечником 5—10 см, вдоль его оси имела в воздухе длину 30 см. Для пробивания стеклянной пластинки 1.7 см по своему методу K i e s s l i n g и W a l t e r должны были прибегать к искрам, имевшим в длину в воздухе 25 см.<sup>2)</sup> Их опыты показали, что самые незначительные трещины на поверхности диэлектрика облегчают пробивание искрами. E. V o i g t<sup>3)</sup> нашел: 1. слюда при толщине 0.2—1 мм пробивается при 25—40 киловольтах, 2. стекло обыкновенное толщиной 1—5 мм при 40—90 киловольтах. Весьма любопытно, что при своих опытах K i e s s l i n g и W a l t e r наблюдали, что канал от искры в стекле иногда может совсем закрываться (заплывать), так что его нельзя и найти.

Первые опыты получения фульгуритов в сыпучих телах, насколько знаю, были описаны в 1828 году в работе B e u d a n t, H a c h e t t e et S a v a r t.<sup>4)</sup> Они действовали искрами от сильнейшей в Париже батареи на мелкоистолченное стекло, помещенное в углубление кирпича.

<sup>1)</sup> W. H o l z, Sitzb. Akad. d. Wiss., Berlin 1876, Pogg. Ann. 1867, Bd. 130, S. 121.

<sup>2)</sup> J. K i e s s l i n g und W. W a l t e r, Über die elektrische Durchbohrung eines festen Dielektrikums. Ann. d. Phys. 1903, Bd. XI, S. 570—588.

<sup>3)</sup> E. V o i g t, Ann. d. Physik 1903, Bd. XII.

<sup>4)</sup> B e u d a n t, H a c h e t t e et S a v a r t, Ann. de Chimie et de Physique, 1848, t. 37, p. 319—321.



Прибавление поваренной соли, способствуя плавкости стекла, позволило приготовить трубки несколько больших размеров. Одна из трубок, приготовленная из толченого стекла, достигала в длину 25 мм. Наружный ее диаметр у одного конца был 3 мм, у другого  $1\frac{1}{2}$  мм, а внутренний канал равнялся  $\frac{1}{2}$  мм. После прибавления соли к стеклу была получена трубочка в 30 мм при наружном диаметре в  $4\frac{1}{2}$  мм и внутреннем 2 мм. Опыты с измельченным в порошок полевым шпатом и кварцем остались безрезультатными.

R o l l m a n n описал в 1868 году свои опыты получения трубочек в серном цвете, к которому он иногда прибавлял и другие вещества (железные опилки, окись железа, окись ртути и пр.).<sup>1)</sup> Полученные трубочки могли достигать 8 см., но всегда ломались на мелкие кусочки при вынимании из стеклянной трубочки или стакана, в которых производились опыты. Трубочки были круглые или ребристые и показывали неправильные изогнутости. С меньшим успехом он экспериментировал с канифолью, стеарином и нек. др. веществами.

Спустя много времени после этого R. W. W o o d, погружая угли дугового фонаря, получил короткие толстые трубки, показывающие спиральный ход. Опыты эти были очень кратко описаны в 1899 году в вышецитированной работе W. H. H o b b s'a. Заметим, что здесь впервые было высказано предположение, что спиральное изогнутие фульгуритов вызывается действием магнитного поля земли (действие магнита на подвижной ток, каким является молния). Это остроумное предположение, требующее однако доказательства, если только оно верно, должно бы, по моему мнению, обусловить образование спиралей фульгуритов разного направления в северном и южном полушариях земли, как это обычно бывает у циклонов или антициклонов. Впрочем магнитное поле земли само по себе очень слабо, отчего образование спирали может быть правдоподобнее искать во взаимодействии с статическим и динамическим полями, вызванными ею же самой: здесь поля получают мощными. Возможно также, что изогнутие вызывается простой неоднородностью среды.

В 1905 году я опубликовал о своих опытах искусственного получения фульгуритов.<sup>2)</sup> Опыты были поставлены в электротехнической лаборатории Киевского Политехнического Института при любезном содействии А. В. К р у к о в с к о г о. Переменные токи высокого напряжения, к которым мы прибегали, равнялись 60—80 тысяч вольт; замыкание длилось не несколько секунд, в каждом опыте обыкновенно делалось по нескольку таких замыканий. В первой серии опытов употреблялся мелкозернистый (диаметр зерен 0.1—0.15—0.2 мм) белый кварцевый песок. Наиболее удачной оказалась форма опыта, когда песок распола-

<sup>1)</sup> R o l l m a n n, Pogg. Ann. Bd. 134, S. 605—615.

<sup>2)</sup> П. Н. Ч и р в и н с к и й. Об искусственных фульгуритах. Записки Киевского Общества Естествоиспытателей 1905, том XIX, стр. 139—144. Со стереоскопическим снимком полученного фульгурита.



гался на толстой стеклянной пластинке валиком в 5—6 см в высоту при длине его в 15—20 см. Электроды в виде проволок вставлялись в оба узкие края валика, не касаясь стекла, так, чтобы ток мог идти по длинной оси валика. Оказалось существенно необходимым слегка смачивать гребень валика водою (проводящий путь), так как в противном случае получался скользящий разряд по стеклу при этих условиях в стекле образуется бороздка, наполненная как-бы бисером из переплавленного стекла (ср. указание В о н н е у для андезитовых фульгуритов из Анд), к которой приплавляются соседние части песка, и только изредка в песок отходит трубчатый фульгурит из чистого песка. В первом случае получается разветвленный фульгурит, ветви которого смыкаются в местах входа и выхода тока через проводники. На стеклянной пластинке удается получить свободную фульгуритовую сеть, которая держится на ней лишь немногими приплавленными к стеклу местами.

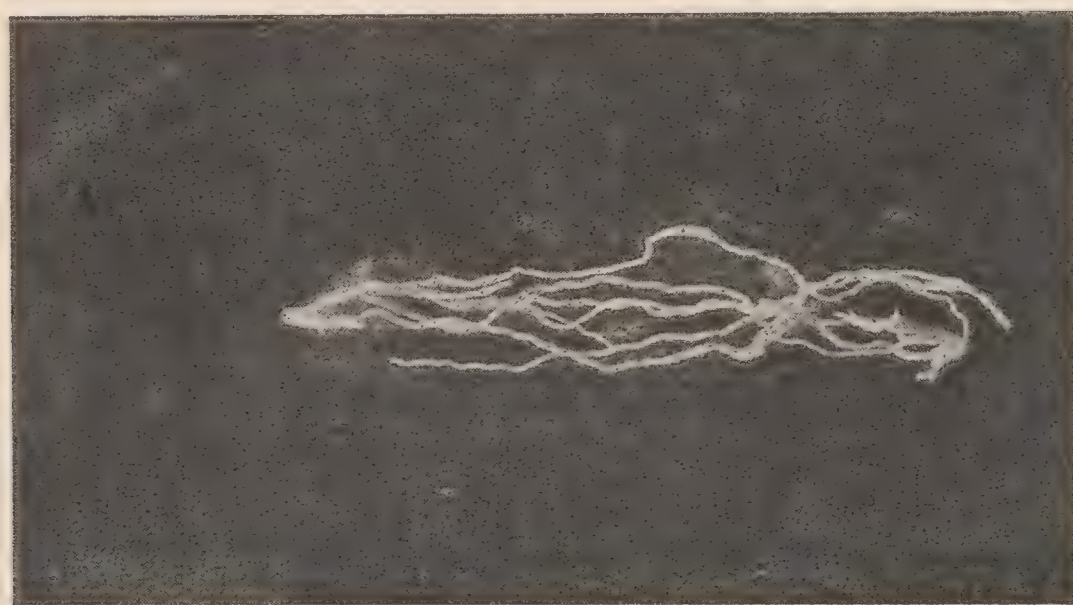


Рис. 3. Искусственный песчаный фульгурит.

Эти песчаные фульгуриты до иллюзии напоминают природные. Кроме круглых более тонких веточек (трубочек) наблюдаются ребристые и более толстые ветви. Те и другие имеют спиральный ход. Наибольшая толщина гранистых трубочек 4 мм, обыкновенная же толщина круглых 1—1.5 мм. От места до места трубочки показывают расширения, напоминающие по внешнему виду геморроидальные вздутия вен. Цвет внешней стенки фульгуритов сероватобелый, эмаль, выстилающая их совнутри, — молочно-белая. Поверхность и внутренность этой эмали показывает присутствие пузырей. Это результат действия паров воды. Наибольший фульгурит, нами полученный, весил около двух грамм и имел в длину 14 см (см. рис. 3). Что касается песка, в котором образовались фульгуриты, то никаких изменений в его массе не произошло. Пропуская в тех же условиях искры через охристо-желтый песок (диаметр кварцевых зерен у этого песка 0.03—0.5 и редко 1 мм) мы получали чисто белые фульгуриты, к внешней поверхности которых приплавлялись то желтые зерна кварца, то покрасневшие; такое изменение цвета песка вблизи природного фульгурита наблюдал Р о е т е r (см. выше). Зеленый глаукони-



товый песок (диаметр кварцевых зерен 0.15—0.2 мм, редко 0.5 мм) дал черные блестящие фульгуриты (сравни темные фульгуриты, описанные G ü m b e l e m из Ливийской пустыни). Цветового изменения песка даже в ближайшем соседстве с фульгуритом не замечено. Интересно, что опыты с порошковатой химически чистой кремнекислотой и порошком типического лёсса дали отрицательный результат (последний факт следует сопоставить с тем, что в глинистой почве фульгуриты редко встречаются и бывают плохо выражены). Это обстоятельство может быть объяснено не химическим составом взятых веществ, а скорее условиями их агрегатного состояния (мелкостью зерна), играющего важную роль в проводимости электричества.

Вопросом искусственного получения фульгуритов заинтересовался в связи с выше описанными опытами мой учитель физики проф. И. И. К о с о н о г о в. Он сам ставил опыты с толченым стеклом и кварцевым песком в смеси с канифолью. В последнем случае получались толстые неправильно изогнутые трубки с очень тонким внутренним каналом в несколько сантиметров длиною. Фульгуриты эти были переданы в 1904 году в коллекцию Минералогического Кабинета Киевского Университета и специально описаны не были. Проф. Косоногов ставил опыты в поле электромагнита, желая подметить связь между действием поля этого последнего и спиральным изогнутием самых фульгуритов. Связь эту с уверенностью подметить однако не удалось, хотя возможность ее он и не отрицает.<sup>1)</sup>

В 1909 году были опубликованы опыты искусственного получения фульгуритов D. D e a n e B u t c h e r.<sup>2)</sup> К сожалению ее работа, обнаруживающая малое знакомство с литературой предмета, оказалось слабой и со стороны экспериментальной: она имела в своем распоряжении лишь батарею из 12 лейденских банок и потому могла получать лишь ничтожной величины трубочки (не более 6—9.5 мм в длину) в таких легкоплавких веществах как поваренная соль, бура, резина, сахар, сургуч и смесь толченого стекла с поваренной солью. От руки сделанные плохие наброски таких фульгуритов вместе с таковыми же рисунками некоторых природных иллюстрируют ее работу. Основная задача работы состояла в том, чтобы проверить предположение одного из первых исследователей фульгуритов доктора F i e d l e r'a,<sup>3)</sup> высказанное в 1817 году, что массивные толстостенные фульгуритовые трубки образуются положительным электричеством, а тонкие, цилиндрические, стекловатые отрицательным. Эту идею Fiedler подкреплял тем, что в массивных толстостенных трубках

<sup>1)</sup> Об этих опытах упомянуто в моей книге „Искусственное получение минералов в XIX столети“, Киев 1903—1906 г., стр. 487.

<sup>2)</sup> D o r o t h y D e a n e B u t c h e r, Experiments on artificial fulgurites, Proc. Phys. Soc. XXI, 1903, p. 254—260, 4 pls., London.

<sup>3)</sup> K a r l G u s t a v F i e d l e r. Über die Blitzröhren und ihre Entstehung. Gilbert's Annalen, Vol. LV, S. 121—164, 1817.



были признаки радиальной структуры, напоминающей собою Лихтенберговы фигуры. Опыты *Butcher* не позволили отличать в характере трубочек какой-либо разницы между положительным и отрицательным полюсами, откуда она сделала заключение о неправильности и самого предположения *Fiedler*'а. В работе формулированы и кое-какие другие банальные выводы, высказаны предположения и относительно подробно описаны экспериментальные трудности, которые ей встретились.

Заканчивая на этом свою небольшую монографию о фульгуритах, не могу не высказать пожелания, чтобы к этим образованиям было проявлено больше внимания со стороны лиц, работающих в разных областях знания, чтобы были поставлены экспериментальные исследования, достойные своими масштабами, точностью и разносторонностью века электричества.

Январь 1922.

*Новочеркасск,  
Кабинет Прикладной Геологии и Минералогии Донского  
Политехнического Института.*



# О своеобразных надрезах (надпилах) кристаллов горного хрусталя с горы Казбек на Кавказе.

Проф. ВЛАДИМИРА ЧИРВИНСКАГО в Киеве.

(С 5 рисунками в тексте.)

Présenté le 22 octobre 1922.

Кристаллы горного хрусталя с г. Казбек неоднократно привлекали к себе внимание исследователей. Предметом их изучения были кристаллографические формы (Ф р е н ц е л ь),<sup>1)</sup> двойниковые образования, а также весьма интересное и редкое явление скручивания кристаллов.<sup>2)</sup>

Во время экскурсии на Кавказ летом 1910 г. мною была собрана значительная коллекция кристаллов горного хрусталя с г. Казбек, среди которых находились кристаллы своеобразно надрезанные по некоторым направлениям. Надрезы эти то более мелкие, то более глубокие наблюдались то на одной, то на нескольких, а иногда и на всех плоскостях кристалла (например на всех плоскостях призмы).

В большинстве случаев они имеют характер глубоких надпилов, как бы произведенных толстой пилой. Кроме надрезов на кристаллах, также наблюдались матовые плоскости или плоскости соприкосновения (плоскости срезов), нередко покрытые штриховкой, которые однако не являются нормальными элементами ограничения кристаллов. Сами кристаллы, служившие предметом моего изучения, были куплены мною в ауле около станции Казбек. Часть кристаллов происходит несомненно из трещин в сланцах, на что указывает присутствие в штуфах глинистых

---

<sup>1)</sup> А. F r e n z e l, Mineralogisches aus Kaukasien. Tscherm. Mitt. N. F. II, S. 126.

<sup>2)</sup> Р. П р е н д е л ь, Ежег. по Геол. и Мин. России, т. III, стр. 18 и Зап. Нов. Общ. Ест., т. XXVI, 1904, стр. 161.

Л. И в а н о в, Кальцит, кварц и прохлорит с Кавказа. Изв. Акад. Наук 1916, стр. 623.



сланцев черных и зеленоватых, другая же часть, преимущественно крупные кристаллы с вышеупомянутыми своеобразными надрезами, происходит, надо думать, из трещин и пустот в гранитах.

Впервые на такие своеобразные кристаллы горного хрусталя обратил внимание проф. П. З е м я т ч е н с к и й<sup>3)</sup> кратко описав ( $\frac{1}{2}$  страницы) интересную друзу горного хрусталя с г. Казбек. По наблюдениям П. З е м я т ч е н с к о г о кристаллы горного хрусталя были ограничены такими плоскостями значение и характер которых не поддавались ника-



Рис. 1.—5.

кому объяснению. На плоскостях этих наблюдались характерное разьедание и особенная штриховка. Плоскости эти не являются, по мнению автора, кристаллографическими элементами ограничения. Причину возникновения этих плоскостей П. З е м я т ч е н с к и й объясняет, как результат проростания и наростания таблицеобразного кальцита на кристаллы горного хрусталя. П. З е м я т ч е н с к и й здесь говорит собственно не о надresaх или надпилах, а о „срезанных“ плоскостях, но на этих кристаллах наблюдались и надрезы, как это ясно видно из рисунка, помещенного в его учебнике минералогии за 1910 г. на стр. 97, рис 134.

Имея в своем распоряжении значительное количество кристаллов горного хрусталя с вышеупомянутыми своеобразными надпилами, я задался целью решить вопрос, нет ли какой либо закономерности в положении плоскостей надпила? Среди имеющихся у меня образцов можно различить три главных типа распилов.

<sup>3)</sup> П. З е м я т ч е н с к и й, Прот. С. П. Б. Общ. Ест. т. XXIII, N. 4, 1893.



- I. тип. Плоскость надпила лежит в зоне  $(10\bar{1}1, 10\bar{1}0)$  (рис. 1.).  
 II. тип. Плоскость надпила в зоне  $(11\bar{2}1, 11\bar{2}0)$  (рис. 4. и 5.).  
 III. тип. Плоскость надпила в вышеупомянутых зонах не лежит.

Эти типы надпилов могут встречаться на отдельных кристаллах, или, что чаще, одновременно на одном и том же кристалле.

Наиболее интересных кристаллов, в которых надпилы резко выражены и притом наблюдаются на различных сторонах кристаллов, в моей коллекции имеется пять, на кратком описании которых я и останавлиюсь.

№ 1 (рис. 1.). Крупный кристалл  $10 \times 4.5$  см. Богат включениями жидкостей и газовыми порами. Кристалл правый. Особенно много включений в нижней части кристалла, делающих его мало прозрачным. В средней части наблюдается две ясно выраженных плоскости параллельных друг другу, весьма богатых включениями.

Кристалл очень богат надпилами, принадлежащими к I., II. и III. типам. Главных надпилов семь, второстепенных четыре. Надпилов I. типа 3. Произведенные прикладным гониометром измерения наклона плоскостей надпила к плоскостям призмы I. рода дали следующий результат:

- |    |         |
|----|---------|
| 1. | $141^0$ |
| 2. | $142^0$ |
| 3. | $141^0$ |

Надпилов II. типа 2. Измерением найдены следующие углы:

- |    |         |
|----|---------|
| 4. | $124^0$ |
| 5. | $125^0$ |

Надпилов III. типа тоже 2, с наклоном к вертикальной оси около  $140^0$ . Наблюдается несколько плоскостей соприкосновения (*b*). На некоторых плоскостях надпилов видна хорошо выраженная штриховка.

№ 2 (рис. 2, 3). Прозрачный кристалл  $5.5 \times 3$  см.; включений почти нет, наблюдается 2 ясно выраженных надпила и 5 плохо выраженных. На плоскостях одного из ромбоэдров наблюдается тонкая горизонтальная штриховка. Кристалл — правый.

Надпил II. типа под углом:

- |    |         |
|----|---------|
| 1. | $135^0$ |
|----|---------|

Надпил I. или III. типа под углом:

- |    |         |
|----|---------|
| 2. | $145^0$ |
|----|---------|

№ 83. Дофине́йский двойник  $8 \times 2.5$  см. Интересными представляются пластинчатые вроски кальцита местами глубоко врезающиеся и кристалл. Наиболее хорошо развитых кальцитовых пластинки — две. Одна вросшая пластинка кальцита (а следовательно и надпил) наклонена под углом в:  $141^0 30'$ .



Пластинка эта достигает величины 3.5 см при толщине в 2 мм. Вростание наблюдается на плоскостях призмы. Другая пластинка под углом  $141^\circ$ .

Вростание наблюдается также на плоскостях призмы. Длина пластинки 2.7 см. при толщине в 1.8 мм.

Первая пластинка кальцита расположена параллельно  $r$  ( $10\bar{1}1$ ), вторая параллельно  $z$  ( $01\bar{1}1$ ). На кристалле есть еще несколько пластинчатых вростков кальцита, но мелких, для которых не представляется возможным сколько нибудь точно установить их положение, некоторые из пластинок расположены приблизительно параллельно вертикальной оси. На пластинках кальцита местами видна хорошо выраженная штриховка, образующая ромбическую сеть. В верхней части кристалла близ ребра призмы наблюдается две плоскости среза, напоминающие по своему положению правый и левый тригональный трапецоэдры. Образовались они от соприкосновения с таблитчатыми кристаллами кальцита, частью еще сохранившимися. Благодаря вышеупомянутому явлению мы здесь имеем кажущийся бразильский двойник. Хорошо выраженная плоскость соприкосновения (среза) с ромбической штриховкой имеется в верхней части кристалла; последняя под небольшим углом срезывает плоскость ромбоядра. Кроме вросших пластинок кальцита на описываемом кристалле наблюдается также нарощия.

№ 113 (рис. 4). Кристалл  $9 \times 3.5$  см. Включения жидкостей и газовые поры сосредоточены в нижней части кристалла. Хорошо выраженных распилов три, плохих семь. Все три главных распила принадлежат к II. типу. Измерением найдено: 1.  $131^\circ$ , 2.  $130^\circ$ , 3.  $132^\circ$ .

№ 120 (рис. 5). Дофинейский двойник  $8 \times 3$  см. Включений (жидкостей и газовых пор) довольно много. Собраны они преимущественно в верхней и нижней части кристалла. Главных надпилов пять и девять слабо выраженных, в числе которых есть разрезы приблизительно параллельные вертикальной оси. Все главные надрезы принадлежат ко II. типу. Измерением найдены следующие углы: 1.  $136^\circ$ , 2.  $135^\circ$ , 3.  $137^\circ$ , 4.  $137^\circ$ , 5.  $155^\circ$ .

Теперь сопоставим по типам полученные данные для главных надпилов описанных выше кристаллов.

Кристалл	тип I.	тип II.	тип III.
№ 1	$141^\circ$	$124^\circ$	$140^\circ$
	$142^\circ$	$125^\circ$	$140^\circ$
	$141^\circ$		
№ 2		$135^\circ$	$145^\circ$
№ 83	$141^\circ, 30'$		
	$141^\circ$		



№ 113	131°
	130°
	132°
№ 120	136°
	135°
	137°
	137°
	155°

Угол между  $10\bar{1}1$  и  $10\bar{1}0$  как известно =  $141^{\circ} 47'$

„ „  $11\bar{2}1$  и  $11\bar{2}0$  =  $155^{\circ} 33'$

„ „  $11\bar{2}2$  и  $11\bar{2}0$  =  $137^{\circ} 44'$ .

Сопоставляя эти данные с полученными мною цифрами мы замечаем, что наклон надпилов I типа (всех пяти) вполне отвечает наклону плоскостей ромбоэдра к плоскостям призмы I-го рода.

Что касается до распилов II типа, то здесь можно подметить группу из пяти надпилов, наклоненных под углом  $136^{\circ}$ — $137^{\circ}$ , т. е. под углом близким к углу, образуемому тригональной бипирамидой знака ( $11\bar{2}2$ ) и призмой второго рода. Кроме того один<sup>4)</sup> из надпилов наклонен под углом в  $155^{\circ}$ , близким к углу, образуемому тригональной бипирамидой знака ( $11\bar{2}1$ ) и призмой 2-го рода.

На основании вышеизложенного нельзя не прийти к заключению, что наряду с совершенно случайными надпилами и срезами кристаллографически невозможными, наблюдаются надпилы по плоскостям ромбоэдров ( $10\bar{1}1$ ) и ( $01\bar{1}1$ ), а также, повидимому, по плоскостям тригональных бипирамид знака ( $11\bar{2}1$ ) и ( $11\bar{2}2$ ). Это в общем отвечает наблюдающимся закономерностям в сростании кварца и кальцита.

Теперь остановимся на вопросе о происхождении вышеописанных надпилов. В этом отношении я вполне разделяю взгляд, высказанный проф. П. З е м я т ч е н с к и м, объясняющим появление некоторых плоскостей (срезов) ограничения *явлением проростания и наростания таблицеобразного кальцита на кристаллы горного хрусталя*. В пользу такого заключения имеется целый ряд доказательств: характер плоскостей, штриховка их, отвечающая трещинам спайности кальцита, и в особенности присутствие еще местами сохранившихся пластинчатых вростков кальцита. В этом отношении особый интерес представляет описанный выше кристалл № 83.

Процесс вrostания кальцитовых пластинок происходил во время роста кристаллов горного хрусталя. *Последующее растворение их и вызвало появление глубоких желобков, „надпилов“ и „надрезов“*, которые

<sup>4)</sup> Среди других кристаллов моей коллекции имеются еще два надпила среднего качества под тем же углом в  $155^{\circ}$ .



мы видели на описанных выше кристаллах.<sup>5)</sup> Явление наростания вызвало появление плоскостей соприкосновения (срезов). Часть кальцитовых пластинок срослась с кварцем в строго определенном положении,<sup>6)</sup> часть же в произвольном. Повидимому, совершенно сходные кристаллы горного хрусталя с надпилами и срезанными плоскостями встречаются в Швейцарии,<sup>7)</sup> по крайней мере в коллекции Минералогического Кабинета Донского Политехнического Института у проф. П. С у щ и н с к о г о мне пришлось видеть друзу кристаллов горного хрусталя из Maderanertal в кантоне Uri<sup>8)</sup> с характерными плоскостями среза и немногочисленными надпилами. Vom R a t h,<sup>9)</sup> описавший эти кристаллы, говорит, что часто пластинки кальцита перерезают кристаллы кварца, причем на них остаются отпечатки спайности известкового шпата, идущие по трем направлениям.

Что касается до кристаллографических форм, то среди собранного мною материала (около 150) новых форм, по сравнению с описанными А. F r e n z e l'ем, мне наблюдать не приходилось. Были найдены:  $(10\bar{1}0)$ ,  $(10\bar{1}1)$ ,  $(01\bar{1}1)$ ,  $(11\bar{2}1)$  и  $(51\bar{6}1)$ . Среди кристаллов встречаются как правые, так и левые, а также дофинейские двойники. Бразильские двойники не наблюдались.

Из включений наиболее обычными являются включения жидкостей и газовые поры, в некоторых кристаллах наблюдались включения глинистых сланцев (расположенные иногда по плоскостям ромбоэдра) и изредка хлорита. Марганцевые налеты<sup>10)</sup> и пленки водной окиси железа<sup>11)</sup> не наблюдались. Большинство кристаллов прозрачны или полупрозрачны с блестящими чистыми плоскостями. Все это говорит за то, что имеющаяся в моем распоряжении коллекция хрусталей происходит, повидимому, из другого месторождения, по сравнению с коллекциями хрусталей, собранных Р. П р е н д е л е м и А. Ф р е н ц е л е м.

*Минералогический Кабинет  
Киевского Политехнического Института.*

<sup>5)</sup> Е. С. Ф е д о р о в (Ежегодн. по Геол. и Мин. России т. III, стр. 78 (описал разсеченный кристалл кварца из Богословского округа на Урале. По его мнению, разрез кристалла кварца объясняется присутствием в пространстве, в котором происходила кристаллизация, перегородки (б. м. бурого железняка), которая впоследствии растворилась.

<sup>6)</sup> Как известно, закономерное сrostание кальцита и кварца наблюдается нередко. Наиболее часто встречается сrostание, при котором плоскости  $\frac{1}{2}R$  кальцита располагаются параллельно плоскостям  $R$  кварца, реже встречается сrostание по тригональной бипирамиде  $(11\bar{2}1)$ .

<sup>7)</sup> R a t h, Niederrhein. Gesellschaft, Bonn 1860, S. 121. Цитирую по Hintze.

<sup>8)</sup> Образец получен от W. Maucher'a в Мюнхене.

<sup>9)</sup> См. H i n t z e, Handbuch der Mineralogie, Bd. I, S. 1386.

<sup>10)</sup> А. F r e n z e l'ем наблюдались включения хлорита и марганцевые налеты.

<sup>11)</sup> Большинство кристаллов из коллекции П р е н д е л я были подернуты снаружи пленкой водной окиси железа.



# О находке самородного мышьяка в Ходском руднике Владикавказского округа в Терской области.

П. Н. ЧИРВИНСКИЙ.

Ходский рудник, работающий на той же самой жиле, что и более известный рудник Садонский, расположен несколько к северо-востоку от него.<sup>1)</sup> Вот почему находке здесь мышьяка следует предпослать сведения о нахождении мышьяка вообще в Садонском руднике.

Первое литературное указание на присутствие самородного мышьяка имеется в заметке С. С. Гембицкого (1916 года), сформулированное им следующим образом: „Самородный мышьяк открыт случайно в коллекции, собранной на Садонском руднике студентом Горного Института в Екатеринославе Л. Н. Пламеневским, и выяснение условий его залегания составляет мою задачу в будущем“.<sup>2)</sup> По частным сведениям от Гембицкого из Екатеринослава могу дополнить, что образец самородного мышьяка был им взят из конторы рудника в Садоне. Там ему говорили, что образцов было несколько, но их разобрали раньше другие. Указали Гембицкому и место рудника, откуда был взят образец, но это место оказалось уже недоступным вследствие обвала. Из частного сообщения инженера Л. А. Лурье, работавшего на Владикавказском заводе, куда поступали для выплавки Садонские руды, мне стало известным, что химическим анализом в цинковых и свинцовых рудах с несомненностью можно считать констатированным присутствие мышьяка и сурьмы. Заводская практика показала при этом, что мышьяк преимущественно концентрируется в цинковой обманке, а сурьма в свинцовом блеске. В каком виде химически связаны эти элементы, ему неизвестно. А priori указание инж. Лурье вполне правдоподобно, ибо в районе Ардонского ущелья, столь бо-

---

<sup>1)</sup> См. геологическую карточку в статье С. С. Гембицкого, Садонское месторождение серебро-свинцовых и цинковых руд на Северном Кавказе. „Южный инженер“, Май-июнь 1916 г.

<sup>2)</sup> С. С. Гембицкий, цитированная статья, стр. 31.



гатого проявлениями рудоносности садонского типа, известны находки жил, содержащих реальгар, мышьяковый колчедан, сурьмяный блеск и бертьерит. Правдоподобно по аналогии с другими месторождениями и преимущественное накопление мышьяка в цинковой обманке, которая в Садоне богата железом, мышьяк может быть здесь связан в форме мелко-разсеянного мышьякового колчедана. Что касается сурьмы в свинцовом блеске, то она вероятно входит в состав какой-либо сульфосоли, содержащей свинец или серебро.

Образцы самородного мышьяка из Ходского рудника вместе с сопровождающими его минералами (кальцитом, цинковой обманкой и свинцовым блеском) доставил в Кабинет Прикладной Геологии и Кабинет Минералогии Донского Политехнического Института проф. горного искусства Н. С. Успенский, посетивший Садонское и Ходское месторождение в мае 1921 года.

Штейгером, служившим ранее в Богословском руднике на Урале П. М. Никоновым был передан проф. Успенскому самородный мышьяк, определенный как таковой.<sup>1)</sup> Встречен этот минерал пока только в недавно заложённой штольне № 15, заданной прямо по рудному выходу слегка окисленному. Концевой забой в жильной породе, но безрудный. По мнению профессора Успенского цинково-свинцовой руды было, надо думать, вынута много, но теперь работается лишь потолок на высоте примерно 5 сажен от штольни. Вынимают круто падающий прожилок руды в 4 вершка в кальците. Встречается в жиле и кварц. Включения мышьяка обыкновенно почковидной формы. Устье штольни № 15 расположено выше на 201·3 сажени Александровской штольни Садонского рудника. В Ходском месторождении имеются и еще более высоко лежащие выработки, мышьяка однако не содержащие № 17 на высоте 238·5 саж. над той же штольней Александровской и № 19 еще выше на 15 саж. по сравнению с № 17. Так как ниже на 35 саж. главной штольни Садонского рудника, штольни Александровской имеются еще работы, то можно установить амплитуду вертикального оруденения в 289 саж. при длине полосы по простиранию около двух верст. Надо при этом заметить, что оруденение ни вверх ни вниз от этих пределов не исчезает и указанная цифра в 289 саж. (по надению, правда крутому, еще больше) является таким образом какимлибо естественным пределом горных работ. Факт нахождения самородного мышьяка в верхней части жильного тела отвечает обычному характеру нахождения этого минерала в эпигенетических месторождениях. Термодинамические условия образования верхней части Садонско-Ходской жилы вероятно должны были несколько отличаться от таковых же собственно Садонского месторождения, ибо Ходские

<sup>1)</sup> Как известно, самородный мышьяк был встречен пока только один раз на Урале, именно среди руд Богословского горного округа (см. Е. С. Федоров и В. В. Никитин, Богословский горный округ, СПб. 1901, стр. 14).



выходы приходится уже не только в область гранита, но и дацитово-риолитовых пород по В. М. Дервиз или гранулитов по С. С. Гембицкому.<sup>1)</sup> После этих вводных замечаний перейдем к характеристике найденного мышьяка, как минерала. Остановлюсь сначала на двух почти одинаковых обломках самородного мышьяка размером  $2 \times 2,5 \times 6$  см (один из них весил 76 гр.), переданных в мое распоряжение профессором Успенским. В одном из них имеются небольшие неправильные участки вросшего чисто белого непрозрачного кальцита, другой их, практически говоря, не содержит вовсе (этот последний и был употреблен для определения удельного веса). Два других образца содержат мышьяка меньше, значительное количество белого кальцита, также свинцовый блеск и цинковую обманку. Наконец большой кусок белого крупнокристаллического кальцита с плоскими углублениями,<sup>2)</sup> был покрыт серовато-черною матовою корою мышьяка, выбитого из них и ограниченного очевидно поверхностью очень плоских больших почек. В некоторых образцах мышьяка можно видеть, что он разбивается на неправильно-гранные (четырёх- и пятигранные) отдельности, как-бы вызванные усыханием. В этих трещинах обычно имеются прожилки кальцита. Все это делает вероятным предположение, что первоначально мышьяк выпал в форме коллоидального сгустка; на это обстоятельство в генезисе мышьяка указывал и В. И. Вернадский).

По внешнему виду наши образцы очень похожи на мышьяк из Шнееберга в Рудных горах (таков напр., образец № 160 коллекции Кабинета Прикладной Геологии). Куски плотные, черные, без блеска, но на свежем изломе серовато-оловяннобелые, тонкозернистого сложения. Серовато-черная побежалость, переходя сначала через стадию золотистобурой, возникает на свежих изломах моих образцов скорее, нежели на образце из Шнееберга. Так она образовалась (в очень жаркую и сухую погоду) на моих образцах в большей или меньшей степени через 4—5 дней, в то время как потускнение блеска на свежем изломе Шнеебергского мышьяка к этому времени было еще очень слабо заметно. Возможно, что это явление стоит в связи с большей степенью кристалличности Шнеебергского мышьяка. Куски, покрытые серовато-черной побежалостью, кажутся для невооруженного глаза матовыми, при рассматривании в лупу или в микроскоп показывают заметный блеск и обнаруживают тоже мелкокристаллическое сложение. Видны очень тонкие налеты окиси мышьяка неравномерно распределенные. На свежем изломе можно видеть, что кристаллические зерна по своим размерам колеблются между 0.03 и 0.06 мм. В зернах видна хорошо выраженная спайность, как известно,

<sup>1)</sup> Сравни К. И. Богданович, очерк Но 3 „Серебро, свинец, цинк“ в томе IV, „Естественные производительные силы России“. Полезные ископаемые. СПб. 1918, стр. 34—35.

<sup>2)</sup> Напоминают углубления на железных метеоритах (пъезоглипты, регмаглипты). Размеры этих углублений не менее 5—6 см.



имеющаяся у мышьяка по базису с (0001) и по первому тупейшему ромбоэдру  $e$  (0112). В нашем случае видна почти исключительно спайность по базису, как весьма совершенная (этим вызывается явление как-бы пластинчатого сложения в изломе). На изломе мышьяка из Шнееберга я наблюдал совершенно ту же картину с той только разницею, что агрегат не был столь однороден в смысле размеров зерен и отдельные зерна в нем достигали 0.2 мм.

Твердость Ходского мышьяка я оцениваю в  $3-3\frac{1}{2}$ , причем необходимо сделать следующие оговорки. Наши образцы, равно как и для сравнения с ними испытанный мышьяк из Шнееберга легко царапают исландских шпат на гранях его спайности, но они же не оставляют никакого следа, напр., на естественных гранях больших хороших кристаллов кальцита из Андреасберга (границы призмы, базиса и тупого ромбоэдра), а на естественных гранях больших ромбоэдров Конгсбергского кальцита едва-едва получают царапины от гонимого и другого.<sup>1)</sup>

Цвет черты темносерый, почти черный. Уд. в. был определен по способу гидростатического взвешивания (навеска 76.0111 грамма) и оказался равным  $7.8$  при  $29^{\circ}$  Цельсия. Таким образом, судя уже по этим данным, мы имеем дело с нормальным мышьяком, а не с арсенолампритом, для которого дают твердость 2 и уд. в.  $5.3-5.5$  (для нормального мышьяка: „тв. выше 3“, уд. в.  $5.6-5.8$ ). При нагревании минерала в запаянной с одного конца трубке получается мелкокристаллический несплошной серый налет близ самого кусочка,<sup>2)</sup> далее полоска буроватого цвета с побежалостью и еще дальше темносерое непрозрачное зеркало „аморфного“ мышьяка. Слышен чесночный запах. Все эти налеты при действии на соответственные места трубки пламени Бунзеновской горелки легко передвигаются с места на место и могут окончательно из нее быть изгнаны. При накаливании на угле в пламени паяльной трубки минерал улетучивается, не плавясь, давая белый налет и испуская чесночный запах. При накаливании в щипчиках в окислительном пламени паяльной трубки заметно улетучивание вещества с образованием белых паров с чесночным запахом, но отнюдь не возгорание и дальнейшее самопроизвольное тление, как это характерно для арсеноламприта. Кусочки минерала опущенные в водный раствор азотнокислого серебра немедленно покрываются как-бы серым мохом из дендритов серебра (реакция тоже характерная для мышьяка). Дендриты эти при рассматривании в микроскоп показывают типичный блеск и формы скелетов серебра. Пользуясь

<sup>1)</sup> Как известно кальцит, взятый за Но 3 в шкале твердости Моса, показывает очень большие изменения в величине твердости по разным направлениям. По наблюдению Гетцен (*Riv. di Min. e. Crist.* XXVI, 1901) одна разность кальцита из Блейберга обладает твердостью плавленого шпата.

<sup>2)</sup> В кристалликах этих можно различить комбинацию из двух ромбоэдров, часты двойники изученные Г. Р о з е (см. H i n t z e, *Handbuch der Mineralogie*, Bd. I, S. 109, Fig. 33—35).



обычными приемами качественного анализа в своем мышьяке я не мог найти сурьмы, висмута, серебра и золота. Железо присутствует в следах. Далее я остановился подробнее на исследовании кальцита, с которым непосредственно бывает связан мышьяк в Ходском руднике. Агрегат этот крупнозернист: часто индивиды достигают 1 и даже 3—4 см. Спайные поверхности нередко слегка изогнутые. Двойниковая штриховка на гранях спайности видна обычно только в лупу. Тв. 3. Уд. в. определенный путем гидростатического взвешивания (навеска 21.5834 грамма) оказался равным 2.74 при 28° Цельсия, что хорошо согласуется и с химическим составом минерала. Последний по моему анализу оказался следующим:

Ca O	53.50
Fe O	2.73
Mn O	0.00
Mg O	0.06
Ba O и SrO	0.00
CO <sub>2</sub>	43.77
	<hr/> 100.06

Следовательно

Ca CO <sub>3</sub>	95.54
Fe CO <sub>3</sub>	4.40
Mg CO <sub>3</sub>	0.12
	<hr/> 100.06

Таким образом мы имеем дело с железистым известковым шпатом. Качественные пробы образцов известкового шпата, взятые из Садонского рудника, убедили меня в том, что состав его близок к вышеприведенному: также довольно много железа и ничтожно количество магния. Цвет обычно серовато-белый, слегка буроватый или зеленоватый (от примеси хлорита). При прокаливании этот кальцит чернеет.<sup>1)</sup>

Ноябрь 1921 г.

*Новочеркасск,  
Кабинет Прикладной Геологии и Минералогии Донского  
Политехнического Института.*

<sup>1)</sup> Нужно сказать, что название кальцит употребляется часто без специального исследования. Так за кальцит сравнительно недавно считали все карбонаты жильных месторождений Нагольного кряжа, пока Я. В. С а м о й л о в не доказал, что это анкерит (паранкерит). Принято думать, что кальцит входит в состав жильных тел Карачаевских цинково-свинцовых месторождений Кубанской области, между тем анализ В а р д а н я н ц (см. Н. В. Э к к, Изв. Общ. Горн. Инж. 1899 г., No 6) показывает, что это анкерит (значительное содержание карбоната железа и к. магния).



# Sur deux démonstrations du théorème de Feuerbach.

Par

J. SOBOTKA.

(Avec 2 figures.)

Présenté le 13 janvier 1922.

1. Le cercle connu sous le nom de cercle des neuf points d'un triangle donné a la propriété de toucher le cercle inscrit et les cercles exinscrits de ce triangle. C'est le théorème de Feuerbach. Dans son oeuvre „Cyclographie“ W. Fiedler s'occupe en détail de ce théorème et de sa déduction par des considérations en l'espace, mais il n'aboutit pas à une démonstration, comme le remarque aussi E. Müller.<sup>1)</sup> Je veux faire voir que la cyclographie fournit, dans ce cas aussi, une démonstration facile et simple.

Soit  $ABC$  le triangle donné,  $k_0$  le cercle inscrit,  $k_1, k_2, k_3$  les cercles ex-inscrits, qui touchent, respectivement, les cotés  $BC, CA, AB$  et le prolongement des deux autres cotés. Soit  $k_0$  orienté dans le sens positif,  $k_1, k_2, k_3$  dans le sens négatif. Les cercles ainsi orientés, ou cycles, sont des projections cycliques, respectivement, des points  $K_0', K_1', K_2', K_3'$ , dont les projections orthogonales sur le plan  $ABC$  sont les centres  $K_0, K_1, K_2, K_3$  des cercles considérés. Cherchons les cycles qui touchent trois quelconques des cycles  $k_0, k_1, k_2, k_3$ . Pour les trouver considérons les cônes de révolution  $K_0 = (K_0' k_0)$ ,  $K_1 = (K_1' k_1)$ ,  $K_2 = (K_2' k_2)$ ,  $K_3 = (K_3' k_3)$ . Deux quelconques  $K_i, K_j$  de ces cônes se coupent, à distance finie, en une conique  $k_{ij}'$ , dont la projection orthogonale sur le plan est une conique  $k_{ij}$ , lieu des centres des cycles touchant les cycles  $k_i, k_j$ . On obtient tous les cycles ayant de cette propriété en formant les projections cycliques de tous les points de  $k_{ij}'$ . Soit  $T_{ij}$  le plan de cette conique. Si l'on considère les intersections de tous les cônes  $K_i$  deux à deux, on ob-

---

<sup>1)</sup> Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereins. J. 1911. S. 188.



tient six plans  $T_i$ , formant un quadrièdre complet, dans les arêtes duquel les plans  $T_i$ , se coupent trois à trois. En effet, les plans  $T_{12}$ ,  $T_{23}$ ,  $T_{31}$  passent par l'arête  $h_0'$ , les plans  $T_{02}$ ,  $T_{03}$ ,  $T_{23}$  par l'arête  $h_1'$ , les plans  $T_{03}$ ,  $T_{01}$ ,  $T_{31}$  par l'arête  $h_2'$  et les plans  $T_{01}$ ,  $T_{02}$ ,  $T_{12}$  par l'arête  $h_3'$ ;  $h_0'$  est menée par les deux points communs, à distance finie, aux cônes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , et les projections cyclographiques de ces points sont les cycles qui touchent simultanément les trois cycles  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Des énoncés analogues ont lieu pour les arêtes  $h_1'$ ,  $h_2'$ ,  $h_3'$ . Les arêtes  $h_0'$ ,  $\dots$ ,  $h_3'$  se coupent en un même point  $H'$ , ce qui suit de ce qu'ils ne sont pas situées toutes dans un même plan et qu'elles se coupent deux à deux. C'est ainsi p. e. que les arêtes  $h_0'$ ,  $h_1'$  se coupent, puisqu'elles sont situées dans le plan  $T_{23}$ . Cet état de choses a lieu pour une position arbitraire des quatre cycles. Exprimons la position du point  $H'$  dans notre cas particulier; pour ce but nous ferons usage de la projection centrale sur le plan  $ABC$  du centre  $K_0'$ .

La trace du plan  $T_{12}$  est (Fig. 1) l'axe radical  $t_{12}$  des cercles  $k_1$ ,  $k_2$ . Comme les points de contact  $C_1$ ,  $C_2$  communs à ces cercles et à la droite  $AB$  sont symétriques par rapport au milieu  $\bar{C}$  du côté  $AB$ , la droite  $t_{12}$  passe par le point  $\bar{C}$  et est perpendiculaire à la ligne  $K_1 K_2$  des centres. Le plan  $T_{12}$  passe par le milieu du segment  $K_1' K_2'$ , il est donc parallèle aux droites  $K_1' C_1$ ,  $K_2' C_2$ ; par conséquent, la ligne de fuite  $t_{12}$  de ce plan passe par le point  $C_0^*$  du cercle  $k_0$  diamétral au point de son contact  $C_0$  avec le côté  $AB$ . On conclut de même que le point de contact  $C_3$  du côté  $AB$  avec  $k_3$  est symétrique à  $C_0$  par rapport à  $\bar{C}$ , que la perpendiculaire  $t_{03}$  abaissée de  $\bar{C}$  sur  $K_0 K_3$  est la trace du plan  $T_{03}$  et que la droite  $t_{03}^*$  menée par le point  $C_0$  parallèlement à  $t_{03}$  est la ligne de fuite de ce plan. Il s'ensuit que les traces des droites  $h_0'$ ,  $h_1'$ ,  $h_2'$ ,  $h_3'$  sont les centres  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ , les sommets duquel partagent en deux parties égales les côtés du triangle donné  $ABC$ . Les sommets du triangle dont les côtés passent par les points  $\bar{A}_0$ ,  $\bar{B}_0$ ,  $\bar{C}_0$  et sont parallèles aux droites  $t_{01}$ ,  $t_{02}$ ,  $t_{03}$ , sont les points de fuite  $T_1^*$ ,  $T_2^*$ ,  $T_3^*$  des droites  $h_1'$ ,  $h_2'$ ,  $h_3'$ , tandis que l'orthocentre de ce triangle est le point de fuite  $T_0^*$  de la droite  $h_0'$ . Les traces, les points de fuite et les droites de fuite forment deux systèmes homothétiques; le centre d'homothétie est la projection  $H^*$  du point  $H'$ ; c'est le point de concours des droites  $T_i T_i^*$ . Au cercle  $(h)$  des neuf points du triangle donné  $ABC$  dans le premier système correspond, dans le second le cercle  $k_0$ . En effet  $(h)$  est aussi le cercle des neuf points du triangle  $T_1 T_2 T_3$ ; le cercle lui correspondant par l'homothétie est alors le cercle des neuf points du triangle  $T_1^* T_2^* T_3^*$  et c'est le cercle  $k_0$  parce que les droites  $t_{03}^*$ ,  $t_{12}^*$  passent par ses points diamétraux  $C_0$ ,  $C_0^*$ . Si l'on désigne par  $H$  le centre du cercle  $(h)$ , aux droites  $HT_i$  correspondent, dans l'homothétie, les droites  $K_0 T_i^*$ ; ces droites sont les projections orthogonales des droites menées par le point  $K_0'$  parallèlement aux droites  $h_i'$ ; c'est pourquoi les droites  $HT_i$  sont les projections orthogonales des droites  $h_i'$  et, par con-



séquent, le point  $H$  est la projection orthogonale du point  $H'$ , d'où il suit que, de fait, la projection cyclographique du point  $H'$  se trouve sur le cercle  $(h)$ .

Les triangles  $ABC$ ,  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  déterminent, de même, dans le plan une homothétie au rapport 2 et dont le centre est situé au centre de gravité commun des deux triangles. Il en suit, si l'on attribue au cercle  $k$  circonscrit au triangle  $ABC$  le même sens qu'au cercle  $k_1$  (et  $k_2$  et  $k_3$ ), et si l'on désigne par  $K'$  le point dont  $k$  est la projection cyclographique, que  $K'K_0 \parallel h'_0$ ,  $K'K_1 \parallel h'_1$ ,  $K'K_2 \parallel h'_2$ ,  $K'K_3 \parallel h'_3$ .

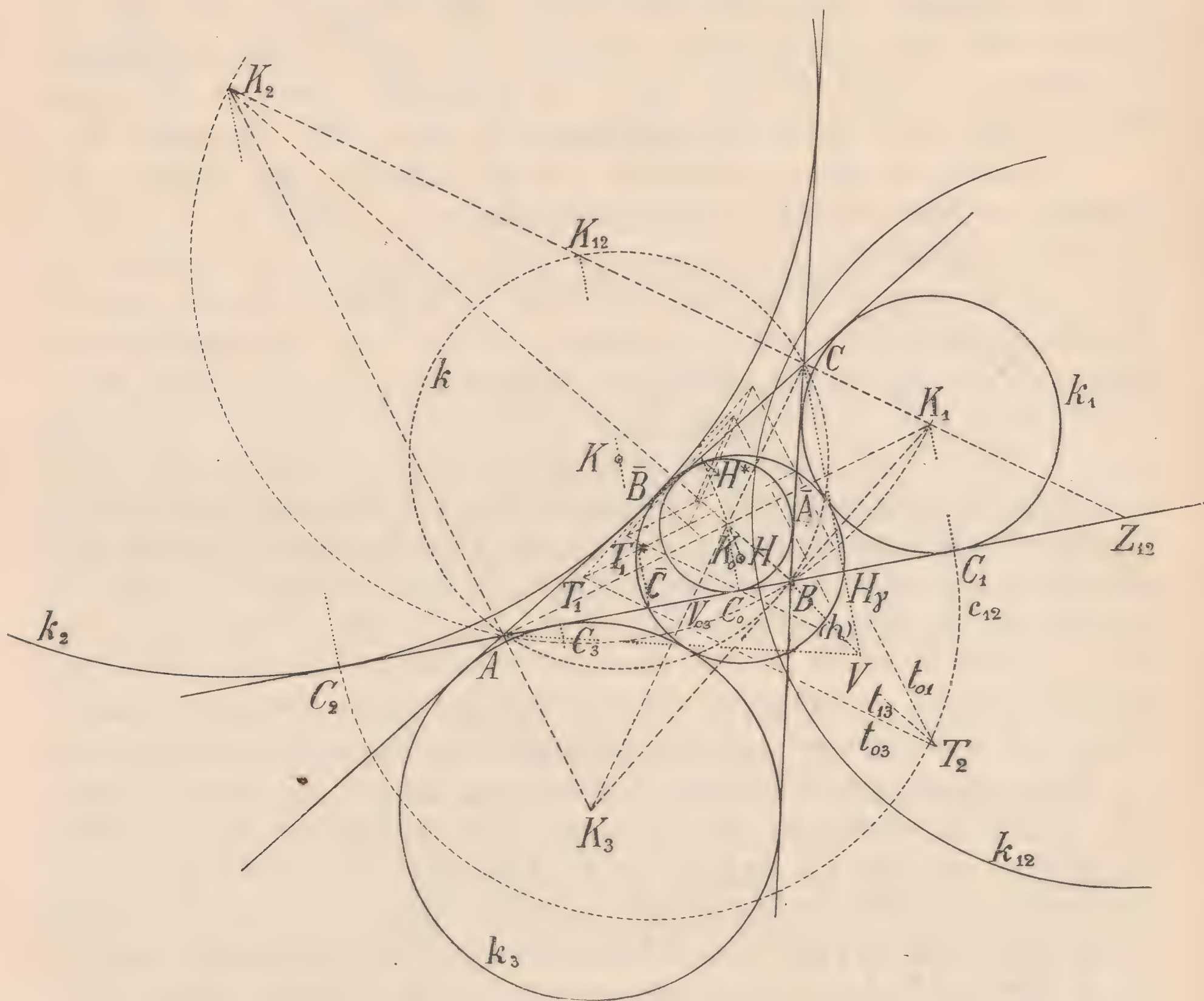


Fig. 1.

2. Le cercle  $k$  circonscrit au triangle  $ABC$  passe par les pieds des hauteurs du triangle  $K_1 K_2 K_3$ ; donc, il passe par les milieux  $K_{i1}$  de ses côtés  $K_i K_j$ . Le cercle au diamètre  $K_1 K_2$  passe par les points  $A, B$ ; par conséquent, la droite  $AB$  est l'axe radical de ce cercle et du cercle  $k$ , et par suite, le point  $Z_{12}$ , où  $K_1 K_2$  coupe la droite  $AB$ , est le centre de l'involution ponctuelle située sur  $K_1 K_2$  et déterminée par les couples  $K_1 K_2$  et  $C K_{12}$ . Cette involution est projetée sur  $AB$  dans une involution  $C_1 C_2$ .



$\bar{C}H\gamma$ , où  $H\gamma$  désigne le pied de la hauteur du triangle  $ABC$  abaissée du sommet  $C$ . Le centre de cette involution est encore le point  $Z_{12}$ .

Par les points  $\bar{C}$ ,  $H\gamma$  passe le cercle  $(h)$  et par les points  $C_1$ ,  $C_2$ , faisons passer le cercle  $c_{12}$  ayant le diamètre  $C_1C_2$ ; la circonférence  $k_{12}$ , dont le centre est  $Z_{12}$  et qui est orthogonale à  $c_{12}$ , est orthogonale aussi au cercle  $(h)$  et coupe  $AB$  aux points doubles de l'involution introduite ci-dessus. Par conséquent, le cercle  $k_{12}$  est le cercle de puissance des cycles  $k_1$ ,  $k_2$ . Par là on s'aperçoit [de ce que les cercles  $(h)$  et  $k_{12}$  sont orthogonaux. On s'aperçoit de la même manière que l'involution  $C_0C_3 \cdot \bar{C}H\gamma$  possède le centre  $V_{03}$ , qui est, en même temps, centre de similitude des cycles  $k_0$ ,  $k_3$ . Comme cette involution est elliptique, le cercle  $k_{03}$  au centre  $V_{03}$  et orthogonal à  $c_{03}$  et  $(h)$ , est imaginaire et est remplacé par le cercle concentrique  $k_{03}^*$  coupé par les cercles  $c_{03}$  et  $(h)$  aux points diamétraux, si  $c_{03}$  est le cercle ayant le diamètre  $C_0C_3$ . Il est évident que  $k_{03}$  est le cercle de puissance des cycles  $k_0$ ,  $k_3$ , de manière que  $(h)$  est orthogonal au cercle  $k_{03}$ .

On aboutit ainsi au résultat que le cercle  $(h)$  est orthogonal à tous les cercles  $k_{ij}$ , pour  $i, j = 0, 1, 2, 3$  et  $i \neq j$ .

Si l'on construit, pour chaque couple formé des quatre cycles donnés, le cercle de puissance, on obtient six cercles appartenant à un réseau de cercles; leur cercle orthogonal commun coupe les quatre cycles donnés sous le même angle. C'est pourquoi  $(h)$  coupe les cycles  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sous le même angle. Fiedler déduit cette propriété encore en faisant usage de la projection cyclographique. Le cercle  $k_{12}$  est situé sur un hyperboloïde rectangulaire de révolution  $H_{12}$ , dont les points ont pour projections cyclographiques des cycles qui coupent tous  $k_1$  et  $k_2$  sous les mêmes angles, et qui sont orthogonaux à  $k_{12}$ . Donc, le cycle  $(h)$  est la projection cyclique du point  $H'$  commun aux hyperboloïdes rectangulaires  $H_{12}$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{31}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{02}$ ,  $H_{03}$  qui coupent le plan  $ABC$  dans les cercles de puissance mentionnés plus haut, et dont  $H_{12}$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{31}$  possèdent une nappe, les trois autres deux nappes. Excepté  $H'$  et le point symétrique par rapport au plan de projection, ces hyperboloïdes ne possèdent, à distance finie, de points d'intersection. Les cônes  $K_1$ ,  $K_2$  et l'hyperboloïde  $H_{12}$  appartiennent au même faisceau; donc, ils se coupent suivant une conique  $k_{12}'$ ; de même, les cônes  $K_2$ ,  $K_3$  et l'hyperboloïde  $H_{23}$  se coupent suivant une conique  $k_{23}'$ . Ces coniques passent nécessairement par le point  $H'$ , qui appartient à tous les hyperboloïdes  $H_{ij}$ . Par conséquent, le point  $H'$  appartient aussi à tous les cônes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . On conclut d'une manière analogue, que le point  $H'$  appartient aussi au cône  $K_0$ , donc, sa projection cyclographique  $(h)$  touche les quatre cycles  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_0$ .

On parvient à ce résultat aussi par le raisonnement suivant. Soient  $K_i'$ ,  $K_j'$  deux points de l'espace,  $k_i$ ,  $k_j$  leurs projections cyclographiques et  $T_{ij}$  le plan de la conique commune, à distance finie, aux cônes  $(K_i' k_i)$ ,  $(K_j' k_j)$ ; un plan quelconque  $M^*$ , parallèle au plan de projection, coupe ces cônes suivant deux cercles  $m_i$ ,  $m_j$  et le plan  $T_{ij}$  en leur axe radical



$m_{i,j}$ . Soit  $K_n'$  un troisième point de l'espace et  $k_n$  sa projection cyclographique; d'une manière analogue, les cônes  $(K_i', k_i)$ ,  $(K_n', k_n)$  conduisent à un plan  $T_{i,n}$ , de même les cônes  $(K_j', k_j)$ ,  $(K_n', k_n)$  au plan  $T_{j,n}$ , et ces plans se coupent en une droite  $p$ , qui coupe  $M^*$  au point  $P$ . En désignant par  $m_n$  le cercle commun à  $M^*$  et au cône  $(K_n', k_n)$ , le point  $P$  est le centre de puissance des cercles  $m_i$ ,  $m_j$ ,  $m_n$ .

On conclut de là que le plan  $M_0$  contenant le point  $H'$  et parallèle au plan de projection  $M$  coupe les cônes  $(K_i', k_i)$  suivant les cercles  $n_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ), par rapport auxquels le point  $H'$  possède la même puissance. Donc, les cycles  $n_i$  possèdent un cercle orthogonal commun  $\bar{h}$ ; par suite, l'hyperboloïde rectangulaire  $H$  ayant son centre au point  $H'$  et contenant le cercle  $\bar{h}$  passe par les points  $K_i'$ . Sa trace dans un plan quelconque parallèle à  $M$ , donc aussi dans le plan  $M$  lui-même, coupe, comme on sait, les projections cyclographiques de tous ses points dans ce plan sous les mêmes angles. Comme les cycles  $k_i$  sont les projections cyclographiques de quatre points de  $H$ , et que, de plus,  $(h)$  est le seul cycle possible qui coupe les cycles  $k_i$  sous les mêmes angles, on conclut que ce cycle est la trace de l'hyperboloïde  $H$ . L'hyperboloïde  $H$  se réduit, par conséquent, à un cône rectangulaire au sommet  $H'$  et contenant  $(h)$  et le cercle  $\bar{h}$  se réduit au point  $H'$ . Donc, les points  $K_i$  sont situés sur un cône rectangulaire de révolution dont le sommet est  $H'$  et l'axe duquel est perpendiculaire à  $M$ .

3. Feuerbach avait déduit le théorème que le cercle  $(h)$  touche les quatre cercles  $k_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) par des considérations trigonométriques. Faisons voir comment ce but peut être atteint par l'emploi de formules trigonométriques connues.

Soit (Fig. 2)  $V$  l'orthocentre du triangle  $ABC$  et  $V_a$  le milieu du segment  $AV$ . Les vecteurs  $K\bar{A}$  et  $V_aV$  sont égaux, et comme

$$K\bar{A} = R \cos A, \quad (1)$$

où  $R$  signifie le rayon de  $k$ , on a

$$AV = 2R \cos A, \quad BV = 2R \cos B, \quad CV = 2R \cos C. \quad (2)$$

On a de plus, désignant par  $r_i$  les rayons des cercles  $k_i$

$$r_0 = \frac{\Delta}{s}, \quad r_1 = \frac{\Delta}{s-a}, \quad r_2 = \frac{\Delta}{s-b}, \quad r_3 = \frac{\Delta}{s-c}, \quad (3')$$

où  $\Delta$  signifie l'aire du triangle  $ABC$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les longueurs de ses côtés et  $2s = a + b + c$ . On obtient

$$r_2 + r_3 = \frac{abc \sin A}{2(s-b)(s-c)} = \frac{a \sin A}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{2R \sin^2 A}{1 - \cos A} = 2R(1 + \cos A)$$



de sorte que

$$r_2 + r_3 = 2R(1 + \cos A), \quad r_1 - r_0 = 2R(1 - \cos A) \quad (3)$$

et des expressions analogues pour  $r_3 + r_1$ ,  $r_1 + r_2$ ,  $r_2 - r_0$ ,  $r_3 - r_0$ .

Si  $A''$  est, sur  $k$ , le point diamétral au point  $A$ , le point  $A'$  le second point d'intersection de  $AV$  avec  $k$ , il est  $A''A' \parallel BC$  et, par conséquent  $\sphericalangle VAB = \sphericalangle CAA''$ . Par suite  $\sphericalangle VAK = A + 2B - \pi$  que l'angle  $B$  soit aigu ou obtus ou bien droit; le triangle  $KAV$  donne, si  $VK = 2e$ , et si l'on tient compte de (1):

$$\begin{aligned} 4e^2 &= R^2 + 4R^2 \cos^2 A + 4R^2 \cos A \cos(A + 2B) \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2 A + 2R^2 [\cos 2(A + B) + \cos 2B] \end{aligned}$$

de manière que

$$4e^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

De la relation bien connue

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \quad (4)$$

ayant lieu pour les angles d'un triangle, suit

$$1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

Donc

$$4e^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

ou bien

$$e^2 = r^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) \quad (5)$$

où  $r$  est le rayon du cercle des neuf points ( $h$ ), ou, en tenant compte de (4)

$$e^2 = 9r^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ou

$$4e^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \quad (5')$$

4. Dans le triangle  $K_3KA$  on peut calculer  $K_3K$ ; on a

$$\overline{K_3K}^2 = R^2 + \frac{r_3^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 2R \frac{r_3}{\cos \frac{A}{2}} \cos\left(\frac{A}{2} + B\right).$$

Il résulte de (3)

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{\cos^2 \frac{A}{2}} &= \frac{2r_3}{1 + \cos A} = \frac{4Rr_3}{r_2 + r_3} = \frac{4R(a - b + c)}{2a} = \\ &= 2R \frac{\sin A - \sin B + \sin C}{\sin A} \end{aligned} \quad (6)$$

on a de plus

$$- \frac{R \cos\left(\frac{A}{2} + B\right)}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2R}{\sin A} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2} = \frac{R}{\sin A} (\sin B - \sin C)$$



et, par conséquent

$$\frac{r_3}{\cos^2 \frac{A}{2}} - \frac{2 R \cos \left( \frac{A}{2} + B \right)}{\cos \frac{A}{2}} = 2 R.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \overline{K_i K^2} &= R^2 + 2 R r_i = 4r (r + r_i) \quad (i = 1, 2, 3), \\ \overline{K_0 K^2} &= R^2 - 2 R r_0 = 4r (r - r_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Comme

$$\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

on obtient de (6)

$$r_3 = 4 R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

ou encore, en tenant compte de l'identité bien connue

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$$

aussi

$$r_3 = R (1 + \cos A + \cos B - \cos C).$$

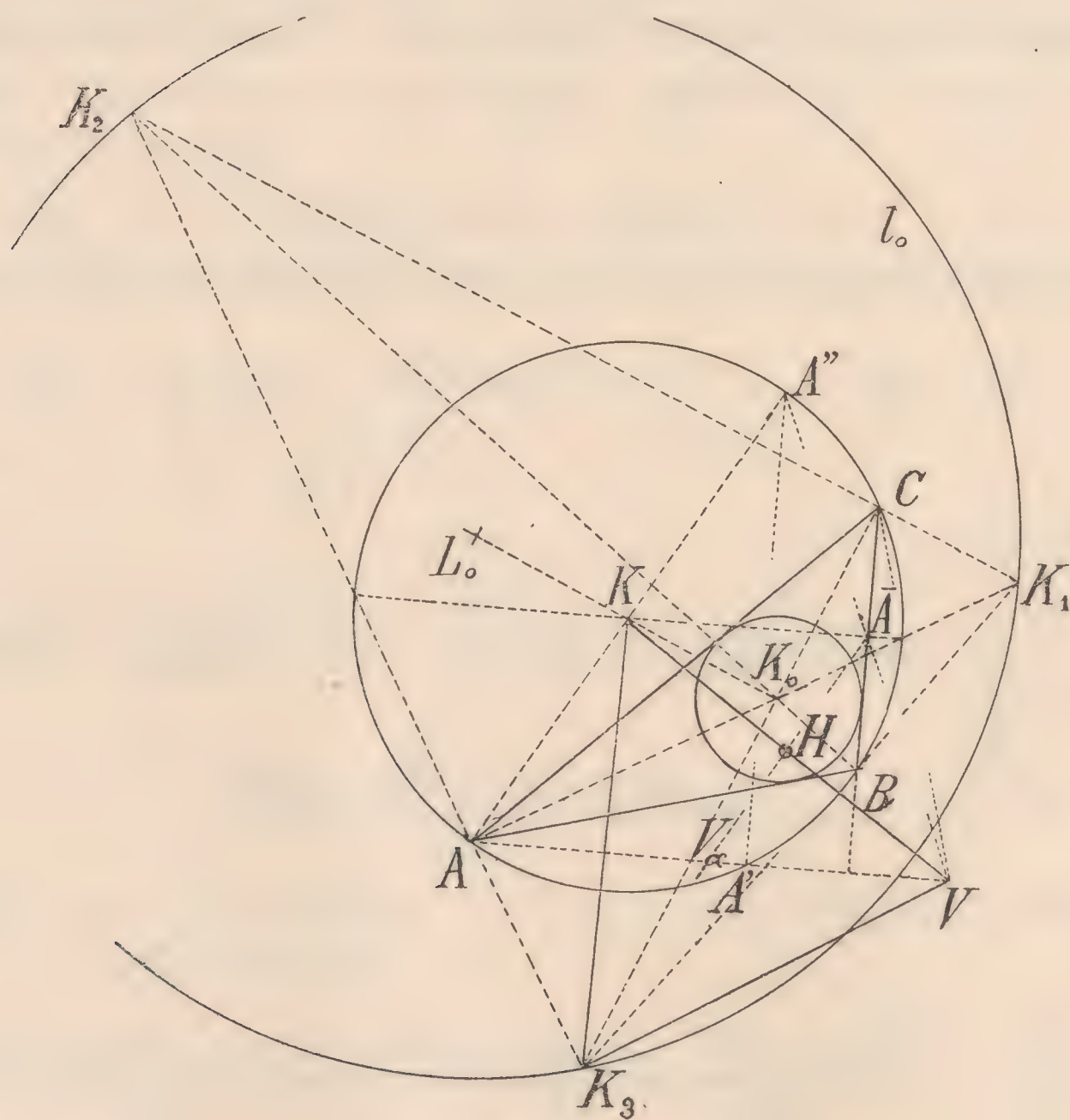


Fig. 2.



Par là on aboutit aux équations

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 4 R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = R (-1 + \cos A + \cos B + \cos C) \\
 r_1 &= 4 R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = R (1 - \cos A + \cos B + \cos C) \\
 r_2 &= 4 R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = R (1 + \cos A - \cos B + \cos C) \\
 r_3 &= 4 R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = R (1 + \cos A + \cos B - \cos C)
 \end{aligned} \tag{8}$$

de manière qu'ait lieu l'identité

$$\begin{aligned}
 -\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Dans le triangle  $K_3 A V$  on a

$$\overline{K_3 V}^2 = \frac{r_3^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} + 4 R^2 \cos^2 A + \frac{4 R r_3}{\cos \frac{A}{2}} \cos A \cos \left( \frac{A}{2} + B \right).$$

Substituons dans cette relation les expressions trouvées toute à l'heure, on obtient

$$\begin{aligned}
 \overline{K_3 V}^2 &= 16 R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4 R^2 \cos^2 A + 16 R \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A \\
 &\quad - R \sin \frac{B-C}{2} \\
 &= 16 R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4 R^2 \cos^2 A \\
 &\quad - 16 R^2 \cos A \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 &\quad + 16 R^2 \cos A \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= 32 R^2 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4 R^2 \cos^2 A - 4 R^2 \cos A \sin B \sin C.
 \end{aligned}$$

En tenant compte de l'identité connue

$$-\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \sin B \sin C$$

on peut écrire

$$\overline{K_3 V}^2 = 2r_3^2 + 4 R^2 \cos^2 A - 2 R^2 (-\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

ou enfin

$$\overline{K_3 V}^2 = 2r_3^2 + 4R^2 - 2R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$



Si l'on tient compte de la relation (4), on obtient

$$\overline{K_3 V^2} = 2 r_3^2 - 4 R^2 \cos A \cos B \cos C,$$

et, vu la relation (5), on obtient la formule générale

$$\overline{K_i V^2} = 2 (r_i^2 + e^2 - r^2), \text{ où } i = 0, \dots, 3. \quad (9)$$

Puisque le point  $H$  est le milieu du segment  $VK$ , on a, tenant compte à (7) et (9)

$$2 \overline{K_3 H^2} = \overline{K_3 V^2} + \overline{K_3 K^2} - 2 \overline{H K^2} = 2 r^2 + 4 r r_3 + 2 r_3^2.$$

On obtient par là

$$K_i H = r_i + r, \quad (i = 1, 2, 3); \quad K_0 H = r_0 - r; \quad (10)$$

de ces relations suit la proposition de Feuerbach.

5. On obtient des équations (3) en faisant l'addition

$$r_1 + r_2 + r_3 - r_0 = 4 R$$

et, de plus,

$$(r_2 + r_3)(r_1 - r_0) + (r_3 + r_1)(r_2 - r_0) + (r_1 + r_2)(r_3 - r_0) = 4 R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C),$$

de manière que

$$\begin{aligned} r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 - r_0 r_1 - r_0 r_2 - r_0 r_3 &= 2 R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

De (8) résulte

$$\begin{aligned} &r_1 r_2 r_3 - r_0 r_1 r_2 + r_0 r_2 r_3 + r_0 r_3 r_1 = \\ &8 R^2 \sin A \sin B \sin C \left( \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = \\ &8 R^2 \sin A \sin B \sin C \left( \cos A \cos \frac{B+C}{2} - \sin A \sin \frac{B+C}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

En faisant usage des équations (3'), on obtient immédiatement

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2$$

et, par là, on déduit de la dernière équation

$$r_1 r_2 r_3 - r_0 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) = 0$$

que

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r_0} = s^2$$

enfin, on obtient, en multipliant les équations (8)

$$r_0 r_1 r_2 r_3 = \Delta^2.$$



Donc, les rayons  $r_1, r_2, r_3, -r_0$  sont les racines de l'équation

$$x^4 - 4R x^3 + 2R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) x^2 + \Delta^2 = 0.$$

tandis que  $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, -\frac{1}{r_0}$  sont les racines de l'équation

$$\Delta^2 x^4 - 2R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) x^2 + 4Rx + 1 = 0.$$

On déduit facilement les équations

$$\begin{aligned} r_1 r_2 - r_1 r_0 - r_2 r_0 &= (s - c)^2, & r_2 r_3 - r_2 r_0 - r_3 r_0 &= (s - a)^2, \\ r_3 r_1 - r_3 r_0 - r_1 r_0 &= (s - b)^2, \end{aligned}$$

et on conclut que les rayons de tous les cercles ex-inscrits aux triangles auxquels le cercle donné  $k_0$  est inscrit, sont les racines de l'équation

$$x^3 - (4R + r_0) x^2 + s^2 x - s^2 r_0 = 0$$

et que les rayons de tous les cercles inscrits aux triangles auxquels le cercle donné  $k_i$  est ex-inscrit, sont les racines de l'équation

$$x^3 - (4R - r_i) x^2 + (s - a_i) x^2 - (s - a_i)^2 r_i = 0$$

où  $a_i$  signifie le côté touché par  $k$ .

6. Considérons un système de coordonnées rectangulaires; choisissons, pour le plan  $xy$ , le plan qui contient les figures dont il est question; le point  $K$  soit l'origine,  $KV$  la partie positive de l'axe des  $x$ ; supposons enfin que les coordonnées  $z$  des points  $K_1', K_2', K_3'$  soient positives. Les cycles  $k_i$ , ( $i = 0, \dots, 3$ ) sont les projections cyclographiques des points qui sont situés, par suite des équations (7), sur un parabolôïde de révolution

$$x^2 + y^2 = 4r(z + r) \quad (11)$$

et, par suite de (9), sur la surface

$$(x - 2e)^2 + y^2 - 2z^2 = 2(e^2 - r^2). \quad (12)$$

En ajoutant les deux équations on obtient le cône

$$(x - e)^2 + y^2 - (z + r)^2 = 0. \quad (13)$$

Multiplions l'équation (11) par 2 et retranchons-en l'équation (13); on obtient l'équation

$$(x + e)^2 + y^2 + (z - 3r)^2 - 2(e^2 + 8r^2) = 0, \quad (14)$$

qui exprime une sphère. En faisant la différence des équations (11), (13) on aboutit à l'équation du cylindre

$$(z - r)^2 = -2e \left( x - \frac{e}{2} - \frac{2r^2}{e} \right). \quad (15)$$

Toutes ces surfaces appartiennent à un faisceau dont la courbe fondamentale est une courbe sphérique ( $s$ ) du 4<sup>e</sup> ordre. L'équation de sa pro-



jection orthogonale  $s$  sur le plan  $(xy)$  résulte des équations (11) et (13) si l'on élimine  $(z + r)$

$$(x^2 + y^2)^2 - 16 r^2 [(x - e)^2 + y^2] = 0. \quad (16)$$

Pour cette courbe les points circulaires à l'infini sont des points de rebroussement.

On peut considérer  $h$  comme le cercle principal de la conique  $v$  aux foyers  $K$  et  $V$ . Alors le triangle  $ABC$  est circonscrit à la conique  $v$  et inscrit au cercle  $h$ . Il existe, par conséquent, une infinité de triangles circonscrits à  $v$  et inscrits à  $h$ . Comme  $(h)$  est le cercle des neuf points pour tous ces triangles  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ , on conclut que les surfaces (11), ... (15) ne changent non plus; donc, les centres des cercles inscrits et ex-inscrits à tous les triangles  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$  remplissent la courbe cyclique (16). Par suite de (4) et (5) tous ces triangles possèdent la propriété que le produit  $\cos A_\lambda \cos B_\lambda \cos C_\lambda$  et la somme  $a_\lambda^2 + b_\lambda^2 + c_\lambda^2$  ont des valeurs constantes; tous ces triangles possèdent le même orthocentre  $V$ .

7. Considérons (Fig. 2) encore trois à trois les centres  $K_0, K_1, K_2, K_3$ . Chaque système de ces trois points forme un triangle, pour lequel le quatrième point est l'orthocentre. Les cercles  $l_0, l_1, l_2, l_3$  circonscrits aux triangles  $K_1 K_2 K_3, K_2 K_3 K_0, K_3 K_0 K_1, K_0 K_1 K_2$  ont tous le rayon  $4r$ , car ils possèdent le même cercle des neuf points  $h$ . Considérons un quelconque d'eux, p. e.  $l_0$ . Ce cercle est — dans le plan considéré — la projection orthogonale de la courbe  $(l_0)$ , intersection du plan  $K_1' K_2' K_3'$  avec le paraboloïde de révolution (11), qui coupe le plan  $M$  suivant le cercle  $h$ . Par suite, la trace  $s_0$  de ce plan est l'axe radical des cercles  $h$  et  $l_0$ . Mais le plan  $K_1' K_2' K_3'$  contient les sommets des cônes  $(K_1' h_1), (K_2' h_2), (K_3' h_3)$ , donc,  $s_0$  est l'axe de similitude des cycles  $h_1, h_2, h_3$ . Puisque  $K_0$  est l'orthocentre,  $l_0$  le cercle circonscrit, et  $h$  le cercle des neuf points du triangle  $K_1 K_2 K_3$ , on a  $K_0 K = K L_0$ ,  $L_0$  signifiant le centre du cercle  $l_0$ . Par conséquent, les centres  $L_0, L_1, L_2, L_3$  des cercles  $l_0, l_1, l_2, l_3$  sont situés sur la courbe  $s^*$  symétrique avec la hyperbole équilatère  $s$  qui lie les points  $K_i$  par rapport au point  $K$ . C'est ce qui a lieu pour tout triangle  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ .

Considérons, sur une droite  $q$  située dans le plan d'une parabole  $(p)$ , et qui n'est pas parallèle à l'axe  $o$  de cette parabole, deux séries ponctuelles directement égales, et projettons ces points sur  $(p)$  parallèlement à  $o$ ; on obtient sur  $(p)$  deux séries ponctuelles projectives dont les éléments doubles coïncident avec le point à l'infini de  $(p)$ . Il suit de là que les droites joignant les points correspondants de ces séries sur  $(p)$  ont pour enveloppe une seconde parabole  $p^*$  égale à  $(p)$  et ayant le même axe. Soit  $q$  perpendiculaire à l'axe  $o$  et soit  $4p$  la distance des points correspondants situés sur cette droite, où  $p$  est le paramètre de la parabole  $(p)$ ; en ce cas  $p^*$  dérive de la parabole  $(p)$  par une translation de longueur  $2p$  dans la direction de l'axe  $o$ . On conclut de là que les plans  $(K_1' K_2' K_3'), (K_2' K_3' K_0'), (K_3' K_0' K_1'), (K_0' K_1' K_2')$  et quatre plans analogues déduits



par les mêmes considérations d'un quelconque des triangles  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ , touchent le parabolôïde  $P$  égal au parabolôïde (11) et qui en dérive par une translation de longueur  $2r$  dans le sens positif de l'axe des  $z$ . La projection orthogonale du point de contact  $(L_0)$  du plan  $(K_1' K_2' K_3')$  avec  $P$  sur le plan  $M$  est le centre  $L_0$  du cercle  $l_0$ . Soit  $(s^*)$  la courbe située sur la surface (11) et symétrique à leur courbe  $(s)$ , projetée orthogonalement en  $s$ , par rapport à l'axe des  $z$  et soit  $(u)$  la courbe d'intersection du parabolôïde  $P$  avec le cylindre parallèle à l'axe des  $z$  et contenant la courbe  $(s^*)$ , de sorte que  $(u)$  dérive de la courbe  $(s^*)$  par une translation de longueur  $2r$  dans le sens positif de l'axe des  $z$ . On reconnaît par là que les systèmes de quatre plans correspondant à tous les triangles  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$  forment des tétraaèdres inscrits à la surface (11) et circonscrits à la surface  $P$ ; leurs sommets remplissent la courbe  $(s)$  et leurs faces touchent la surface  $P$  aux points de la courbe  $(u)$ . Ces faces ont, par suite, pour enveloppe une développable de la 4<sup>e</sup> classe; par conséquent, les axes de similitude  $s_0, s_1, s_2, s_3$  des cercles trois à trois:  $k_1 k_2 k_3, k_2 k_3 k_0, k_3 k_0 k_1, k_0 k_1 k_2$  correspondant à tous les triangles  $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$  ont pour enveloppe une courbe de la 4<sup>e</sup> classe.

On peut donc énoncer le théorème:

„Soit  $a$  le demi-axe principal d'une conique centrale quelconque  $v$  et  $k$  un cercle au rayon  $2a$  ayant le centre dans un foyer  $K$  de la conique; on peut circonscrire à la conique  $v$  une infinité de triangles  $ABC$  inscrits au cercle  $k$ . Ces triangles ont l'orthocentre commun situé au deuxième foyer  $V$  et tous les cercles inscrits et ex-inscrits à ces triangles touchent le cercle  $(k)$  principal de la conique  $v$ ; l'axe de similitude de trois quelconques des cercles inscrits à un tel triangle  $ABC$  est l'axe radical du cercle  $k$  et du cercles passant par leurs centres; les axes de similitude relatifs à tous les triangles ont pour enveloppe une courbe de la 4<sup>e</sup> classe.“

Les courbes  $v$  et  $k$  sont homologues, étant le centre d'homologie  $K$ ; si  $KM'$  est un rayon de  $k$  perpendiculaire à l'axe  $KV$  et qui coupe  $v$  au point  $M$ , la tangente  $m$  de  $v$  au point  $M$  coupe la tangente  $m'$ , touchant le cercle  $k$  au point  $M'$ , au point  $R$  situé sur l'axe d'homologie. Le point d'intersection  $S$  de la droite  $m$  avec  $KV$  est situé sur la directrice de la conique  $v$  relative au foyer  $K$ , et la proportion a lieu:  $MK : KS = e : a$  où  $e$  signifie l'excentricité de la conique  $v$ . Il suit de cette proportion que  $ST = 2 \frac{a^2}{e}$ , où  $T$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $R$  sur  $KV$ .

Par conséquent, la directrice  $RT$  de la conique, relative au foyer  $V$ , est un axe de l'homologie considérée. Si l'on désigne par  $I$  un point d'intersection des courbes  $k$  et  $v$  sur  $RT$ , on voit que  $VI$  est la tangente de  $v$  en ce point. Il suit de là que les tangentes menées de  $I$  à la conique  $v$  coupent le cercle  $k$  au point à l'infini  $I_1$  et au point  $I_1'$  qui lui est infiniment voisin; par conséquent, la droite  $I_1 I_1'$  est une tangente du cercle  $k$  et passe par son centre  $K$ , qui est le foyer de  $v$ ; par suite,  $I_1 I_1'$  est tangente aussi à  $v$ .



On a trouvé, ainsi, un triangle  $II_1 I_1'$  circonscrit à  $v$  et inscrit à  $k$ ; donc, il existe une infinité de tels triangles.

Le cercle  $k$  coupe  $KV$  en deux points dont l'un  $G$  au moins est situé à l'extérieur de la conique  $v$ . Le cercle au diamètre  $GK$  coupe le cercle principal en deux points  $G_1, G_2$  et les droites  $GG_1, GG_2$  sont tangentes à  $v$ ; elles coupent  $k$  encore en deux autres points  $G_1', G_2'$ ; la droite joignant les deux points touche  $v$  au sommet. Nous avons trouvé ainsi un triangle réel inscrit à  $k$  et circonscrit à  $v$  et le théorème énoncé est démontré.

On obtient facilement encore le théorème suivant:

„Les orthocentres des triangles circonscrits à un cercle donné  $k_i$  et inscrits à un deuxième cercle  $k$  remplissent une circonférence  $h$  concentrique à  $k_i$ ; les centres de tous les cercles inscrits à ces triangles sont situés sur un deuxième cercle  $l$  et ces deux cercles coupent l'axe radical des cercles  $k, k_i$  sous le même angle.“

Si  $R$  et  $r_i$  sont les rayons de  $k$  et  $k_i$ , le rayon du cercle  $l$  est  $2R$  et le rayon du cercle  $h$  est  $\frac{R}{2} + r_i$  ou  $\frac{R}{2} - r_i$ .



# Le rapport du théorème de Feuerbach avec l'hyperbole équilatère.

Par

J. SOBOTKA.

(Présenté le 27 janvier 1922.)

1. Le théorème de Feuerbach se rattache étroitement à quelques propriétés de l'hyperbole équilatère. Dans la suite ces rapports seront étudiés dans une certaine direction.

Énonçons d'abord le théorème :\*)

„Quand l'hyperbole équilatère est circonscrite au triangle donné  $ABC$  et quand elle passe par le centre  $K_i$  d'un cercle quelconque qui est inscrit ou ex-inscrit à ce triangle, la tangente menée à la courbe au point  $K_i$ , passe par le centre  $K$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .“

Pour démontrer ce théorème projetons les sommets  $A, B, C$  du point  $K_i$  sur le cercle  $k$  circonscrit au triangle  $ABC$  dans les points  $A', B', C'$ . Nous avons maintenant le triangle  $A'B'C'$ ; ses côtés  $A'B', B'C', C'A'$  sont respectivement perpendiculaires aux droites  $CK_i, AK_i, BK_i$ . L'hyperbole  $h'$  circonscrite au triangle  $A'B'C'$  qui passe par le point  $K_i$  et qui a la tangente  $K_iK$  au point  $K_i$  est équilatère, parce que  $K_i$  est le point de concours des hauteurs du triangle  $A'B'C'$ . L'involution centrale qui a le centre au point  $K_i$  et dont l'axe est la polaire  $o$  du point  $K_i$  par rapport au cercle  $k$ , reproduit ce cercle et transforme l'hyperbole  $h'$  en l'hyperbole  $h$  qui est circonscrite au triangle  $ABC$  et qui touche en  $K_i$  la droite  $KK_i$ .

Considérons l'involution des angles droits qui ont leur sommet  $V$  sur l'hyperbole équilatère  $h$ ; cette involution coupe  $h$  en une involution qui a ces deux couples d'éléments: les points infiniment éloignés, le point  $V$  et l'intersection  $N$  de la normale de l'hyperbole  $h$  en  $V$ . On voit que la droite qui joint un couple quelconque d'éléments dans cette involution est parallèle à la normale  $VN$ .

\*) Plusieurs figures font partie essentielle de ce mémoire; on peut les construire facilement selon la description donné au texte.



L'axe de fuite de l'involution  $(K_i o)$  qui est parallèle à la droite  $o$  et divise la distance du point  $K_i$  à la droite  $o$  en deux parties égales, coupe  $h'$  en deux points  $G_1, G_2$ ; d'après la relation précédente la droite  $G_1 K_i$  est perpendiculaire à la droite  $G_2 K_i$ . Ces droites contiennent les points éloignés infiniment de la courbe  $h$ , qui est, par suite, une hyperbole équilatère et ainsi le théorème précédent est démontré.

2. Considérons le plan du triangle  $ABC$  comme le plan de projection, les centres  $K_0, K_1, K_2, K_3$  des cercles  $k_0, k_1, k_2, k_3$  inscrits à ce triangle comme les projections orthogonales des quatre points  $(K_0), (K_1), (K_2), (K_3)$ . La distance de chacun de ces quatre points au plan de projection est égale au rayon du cercle correspondant. Considérons  $(K_1), (K_2), (K_3)$  correspondant aux centres des cercles ex-inscrits comme étant situés sur un côté du plan de projection, et le point  $(K_0)$  correspondant au centre  $K_0$  du cercle inscrit comme étant situé sur le deuxième côté. On oriente ces cercles de manière qu'ils soient les projections cyclographiques des points  $(K_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 0$ ).

Cherchons maintenant les cycles qui touchent les cycles  $k_i$  ainsi fixés. Les cônes droits à base circulaire qui s'appuient par exemple sur  $k_2$  et  $k_3$  et qui ont leurs sommets aux points  $(K_2)$  et  $(K_3)$ , se coupent à distance finie en une conique, dont le plan  $P_{23}$  a comme trace dans le plan de projection la droite de puissance  $p_{23}$  des cercles  $k_2, k_3$ , et passe par le point  $(K_{23})$  qui divise le vecteur  $(K_2)(K_3)$  en deux parties égales. De même les cônes qui s'appuient sur  $k_3, k_1$ , et qui ont leurs sommets aux points  $(K_3), (K_1)$  se coupent à distance finie en une conique, dont le plan  $P_{31}$  a comme trace dans le plan de projection la droite de puissance  $p_{31}$  des cercles  $k_3, k_1$  et passe par le point  $(K_{31})$  qui divise la distance  $(K_3)(K_1)$  en deux parties égales. Les plans  $P_{23}, P_{31}$  se coupent en une droite  $(p_0)$  qui contient les points communs aux deux coniques. Ces points ont pour projection orthogonale les centres des cycles qui touchent les cycles  $k_1, k_2, k_3$  mentionnés cidessus.

Soient  $A_0, B_0, C_0$  les points qui divisent en deux parties égales les côtés  $BC, CA, AB$  du triangle  $ABC$  et la distance des points de contact des couples de cercles  $k_3, k_2; k_3, k_1$  et  $k_1, k_2$  avec les droites  $BC, CA, AB$ . Par conséquent les droites de puissance  $p_{23}, p_{31}, p_{12}$  de ces couples passent aussi par les points  $A_0, B_0, C_0$  et sont les bissectrices des angles du triangle  $A_0 B_0 C_0$ . Ainsi le centre de puissance  $P_0$  des cercles  $k_1, k_2, k_3$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $A_0 B_0 C_0$ . Par suite la droite  $p_0$  passe par le point  $P_0$ . Elle coupe la droite  $A_0 (K_{23})$  située dans le plan  $P_{23}$ , la droite  $B_0 (K_{31})$  située dans le plan  $P_{31}$ , et de même la droite  $C_0 (K_{12})$  sur laquelle est le point  $K_{12}$ , qui divise le segment  $(K_1)(K_2)$  en deux parties égales, et qui est située dans le plan  $P_{12}$  de la conique commune aux cônes  $(K_1) k_1, (K_2) k_2$ .

Pour cette raison les droites  $A_0 (K_{23}), B_0 (K_{32}), C_0 (K_{12})$  déterminent un hyperboloïde  $H_0$ , sur lequel est située la droite  $(p_0)$  et la droite per-



pendiculaire au plan de projection, qui passe par le centre  $K$  du cercle  $k$  circonscrit au triangle  $ABC$ . La trace de la surface  $H_0$  est circonscrite au triangle  $A_0B_0C_0$ , elle passe par le point de concours de ses hauteurs  $K$ , elle est donc une hyperbole équilatère. Parce qu'elle passe aussi par le centre  $P_0$  du cercle inscrit au triangle  $A_0B_0C_0$ , elle a en ce point la tangente  $P_0Q$  contenant le centre  $Q$  du cercle  $q$  qui est circonscrit au triangle  $A_0B_0C_0$ , c'est à dire du cercle de neuf points du triangle  $ABC$ .

Soit  $(K)$  le point qui se projette orthogonalement en le point  $K$ , cyclographiquement en le cercle  $k$ , et qui est situé, par rapport à  $(K_0)$  sur le deuxième côté du plan de projection.

Le plan  $P_{23}$  joint  $p_{23}$  à la droite  $A_0(K_{23})$ ; il est donc parallèle au plan  $AK_0(K)$ . Par conséquent la droite  $(p_0)$  est aussi parallèle à ce plan. On conclut, d'une manière analogue, que la droite  $(p_0)$  est aussi parallèle aux plans  $BK_0(K)$ ,  $CK_0(K)$ ; donc elle est parallèle à la droite  $K_0(K)$ . Considérons maintenant la homothétie ayant le centre de gravité des triangles  $ABC$  et  $A_0B_0C_0$  comme centre et le rapport de similitude  $1/2$ . Dans cette homothétie, au point  $(K)$  correspond le point  $(Q)$  situé sur le deuxième côté du plan de projection. La projection cyclographique du point  $(Q)$  est situé sur le cercle  $q$ .

On voit de même que la droite qui joint les deux points à distance finie, communs aux trois cônes quelconques  $(K_i)$   $k_i$  passe par le point  $(Q)$ . Ainsi nous sommes parvenus à une propriété que nous avons trouvée ailleurs d'une autre manière.<sup>1)</sup>

Soient  $r_0, \dots, r_3$  les rayons des cercles  $k_0, \dots, k_3$ .

La distance  $\frac{r_2 + r_3}{2}$  du point  $(K_{23})$  au plan de projection est égale à la longueur  $R(1 + \cos A)$  de la projection du segment  $A_0(K_{23})$ , si  $R$  signifie le rayon du cercle  $k$ . Ainsi nous obtenons directement les relations:

$$\begin{aligned} r_2 + r_3 &= 2R(1 + \cos A), & r_1 - r_0 &= 2R(1 - \cos A). \\ r_3 + r_1 &= 2R(1 + \cos B), & r_2 - r_0 &= 2R(1 - \cos B). \\ r_1 + r_2 &= 2R(1 + \cos C), & r_3 - r_0 &= 2R(1 - \cos C). \end{aligned}$$

3. Démontrons maintenant la proposition suivante:

„Soient donnés une hyperbole équilatère et un cercle qui a son centre  $K$  en un point quelconque de cette hyperbole et qui passe par son centre  $O$ . On peut inscrire à cette hyperbole un nombre infini de triangles, qui sont circonscrits au cercle  $k$ .“

Soient  $a_1, a_2$  les asymptotes de l'hyperbole  $h$  et  $t$  sa tangente au point  $K$  qui coupe les asymptotes aux points  $A_1, A_2$ . La tangente au point  $A_1$  du cercle  $k$  coupe  $h$  toujours en des points réels  $A_0, B_0$ . La droite  $A_0, B_0$  est parallèle à la normale au point  $K$  de l'hyperbole, et par suite, comme

<sup>1)</sup> Voir: Sur deux démonstrations du théorème de Feuerbach'' dans ce Bulletin 1922.



nous avons vu déjà dans l'art. 1.,  $KA_0$  est perpendiculaire à  $KB_0$ . Si  $A^0, B^0$  sont les points symétriques de  $A_0$  et  $B_0$  par rapport au point  $K_1$ ,  $A_0 B_0 A^0 B^0$  est un losange circonscrit au cercle  $k$ .

Si  $A^*$  est le point de concours de la droite  $A_0 B_0$  et de l'asymptote  $a_2$ , on a  $A_2 B^0 = B_0 A_1 = A^* A_0$ . Cette égalité entraîne le parallélisme des droites  $A_0 B^0, B_0 A^0, a_2$ .

Par conséquent les tangentes au cercle  $k$  parallèles à l'asymptote  $a_2$  coupent l'hyperbole aux points  $A_0, B_0$  qui sont situés sur la tangente au  $A_1$  du cercle  $k$ . Si  $C_0$  est le point situé à l'infini sur  $a_2$ , on parvient ainsi au triangle  $A_0 B_0 C_0$  qui est circonscrit au cercle  $k$  et inscrit à l'hyperbole  $h$ . Pour cette raison on peut inscrire à l'hyperbole  $h$  un nombre infini de triangles  $ABC$  qui sont circonscrit au cercle  $k$ . Un deuxième triangle  $A'_0 B'_0 C'_0$  a son sommet  $C'_0$  à l'infini sur  $a_1$ , les deux autres sur la tangente du cercle  $k$  au point  $A_2$ . Nous disons que la conique à laquelle on peut circonscrire des triangles qui sont inscrits à une autre conique, est à celle-ci dans la position de Poncelet.

4. Considérons deux cercles  $k_1, k_2$  qui ont les centres  $K_1, K_2$  situés d'une telle manière, que  $k_2$  soit dans la position de Poncelet par rapport à  $k_1$ . La droite qui joint les centres coupe  $k_1$  aux points  $M_1, N_1$ . Considérons maintenant celui des triangles  $ABC$  qui est symétrique par rapport à la droite centrale de  $k_1$  et  $k_2$  de manière qu'un des sommets est au point  $M_1$  ou au point  $N_1$ . Désignons ce point par  $M_1$  et ce triangle par  $M_1 P_1 Q_1$ , les centres des cercles  $k_1, k_2$  par  $K_1, K_2$  et les rayons par  $r_1, r_2$ .

Il faut distinguer deux cas:

Le cercle  $k_2$  est inscrit au triangle  $M_1 P_1 Q_1$  et, par suite à tous les triangles réels  $ABC$ , soit à l'intérieur, soit à l'extérieur. Soit encore  $\overline{M_1 K_2} = m$ . Examinons le premier cas: De la similitude des triangles suit

$$\overline{M_1 P_1}^2 : 4 r_1^2 = (m^2 - r_2^2) : m^2 \quad (1)$$

et comme  $\overline{M_1 P_1}^2 = 2 r_1 (m + r_2)$  on obtient  $2 r_1 = \frac{m^2}{m - r_2}$ .

Si  $L$  est le bout d'un rayon du cercle  $k_2$  perpendiculaire à la centrale  $K_1 K_2$ , on a

$$\overline{K_1 L}^2 = r_2^2 + (m - r_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 m r_1 + 2 r_1 (m - r_2) = (r_1 - r_2)^2.$$

Parce que ici  $r_1 > r_2$ , on a  $r_1 = \overline{K_1 L} + r_2$ . Dans le deuxième cas on obtient encore la relation (1), mais

$$\overline{M_1 P_1}^2 = 2 r_1 (m - r_2); \quad 2 r_1 = \frac{m^2}{m + r_2}$$

et, par conséquent  $\overline{K_1 L}^2 = (r_1 + r_2)^2$ . On a  $r_1 = \overline{K_1 L} - r_2$ .

Ainsi nous avons déterminé les conditions pour le cercle  $k_2$  qui est dans la position de Poncelet par rapport au cercle donné  $k_1$  et réciproquement. Si le cercle  $k_2$  et la centrale  $K_1 K_2$  sont donnés, on construit le



point  $L$  et de ce point comme centre on décrit le cercle  $l$  de rayon égal à  $r_2$ ; puis les cercles  $k_1$  par rapport auxquels  $k_2$  est dans la position de Poncelet, forment une série quadratique de cercles, dont les centres sont situés sur  $K_1 K_2$  et qui sont tangents au cercle  $l$ .

Si l'on attribue au cercle  $l$  un certain sens, les cycles sur les cercles  $k$ , qui le touchent sont les projections cyclographiques dans le plan  $M$  pour des points dans l'espace, qui décrivent une hyperbole équilatère  $h$ . Cette hyperbole est la courbe d'intersection du plan qui est perpendiculaire au plan  $M$  des figures considérées et passe par la droite  $K_1 K_2$ , avec le cône de révolution rectangulaire qui s'appuie sur le cycle  $l$  et dont le sommet est le point, dont la projection cyclographique est ce cycle  $l$ .

Tous les cercles dans le plan  $M$  par rapport auxquels le cercle donné  $k_2$  est dans la position de Poncelet peuvent être considérés comme les projections cyclographiques des points du hyperboloïde de révolution  $H$  à deux nappes qui touche le plan  $M$  au point  $K_2$ , dont l'axe passe par le point  $K_2$  et est perpendiculaire à  $M$ . Quand cet axe est l'axe  $z$  et  $K_2$  l'origine des coordonnées rectangulaires, son équation est

$$x^2 + y^2 - (z + r_2)^2 + r_2^2 = 0.$$

Si le cercle  $k_1$  et la centrale  $K_1 K_2$  sont donnés, et si l'on construit un cercle quelconque  $l$  qui touche le cercle  $k_1$  et la droite  $K_1 K_2$ , celle-ci au point  $K_2$ , le cercle  $k_2$ , qui a le centre au  $K_2$ , et est égal au cercle  $l$ , est un des cercles dans la position de Poncelet par rapport au  $k_1$ . On voit que le lieu des centres des cercles  $l$  est la parabole qui a  $K_1$  pour foyer, la perpendiculaire sur  $K_1 K_2$  au  $K_1$  pour l'axe et  $r_1$  pour paramètre. D'où vient que tous les cercles  $k_2$  qui sont par rapport au deuxième cercle  $k_1$  dans la position de Poncelet, sont les projections cyclographiques des points d'un parabololoïde de révolution sur le plan  $M$ . Le parabololoïde a son foyer dans  $K_1$  et il passe par le cercle  $k_1$ . Quand son axe est l'axe  $z$  et  $K_1$  l'origine des coordonnées rectangulaires, son équation est

$$x^2 + y^2 + 2r_1 z - r_1^2 = 0.$$

5. Considérons de nouveau comme dans l'art. 3. l'hyperbole équilatère  $h$  et le cercle  $k$  de rayon  $r$ . Ce cercle a son centre  $K$  sur l'hyperbole  $h$  et passe par son centre  $O$ . Les axes de cette hyperbole coupent  $k$  aux points  $L, L'$ , qui sont situés sur le diamètre du cercle  $k$  perpendiculaire à la tangente de l'hyperbole  $h$  au point  $K$ , car la perpendiculaire à un diamètre quelconque de l'hyperbole équilatère et le diamètre conjugué à ce diamètre sont anti-parallèles par rapport à ses axes.

Soit  $ABC$  un triangle quelconque circonscrit au cercle  $k$  et inscrit à l'hyperbole  $h$ . Décrivons à ce triangle le cercle  $k'$ , dont le centre soit  $K'$ . L'hyperbole équilatère circonscrite au triangle  $ABC$  qui passe par le centre  $K$  du cercle inscrit  $k$  a comme tangente au point  $K$  la droite  $KK'$ . Puisque cette hyperbole coupe  $h$  aux points  $A, B, C, K$  et au point de con-



cours des hauteurs  $H$  dans le triangle  $ABC$ , elle se confond avec  $h$ . Pour cette raison le centre  $K'$  est sur la tangente  $t$ . D'après cela on voit que tous les cercles  $k'$  qu'on a circonscrits aux triangles  $ABC$  inscrits à  $h$  et circonscrits à  $k$  ont leurs centres sur la tangente  $t$  et  $k$  est par rapport à tous les  $k'$  dans la position de Poncelet. Si on décrit le cycle  $l$  autour de l'un des points  $L, L'$ , par ex.  $L$ , et si ce cycle passe par le point  $K$ , tous les cercles  $k'$  sont exprimés par des cycles avec la centrale commune  $t$ . Ces cycles touchent le cycle  $l$  et sont les projections cyclographiques des points de l'hyperbole équilatère ( $u$ ) dont l'axe a la longueur  $2r$ . Rabattons son plan dans le plan  $M$ . Soit  $u$  la position dans laquelle vient ( $u$ ) après le rabattement. Les courbes  $h$  et  $u$  sont homologues; elles ont  $t$  comme axe et l'un ou l'autre axe de l'hyperbole  $h$  donne la direction de l'homologie, d'après le sens du rabattement. Dans cette position, aux segments perpendiculaires à  $t$  dans le système de la courbe  $u$ , appartiennent des segments de la même longueur et parallèles à  $KO$  dans le système de la courbe  $h$ . Par conséquent, au rayon  $KD'$  du cercle  $k'$  perpendiculaire à  $t$ , dont le bout  $D'$  est situé sur  $u$ , appartient sur  $h$  le point  $D$  pour lequel  $K'D \parallel KO$  et  $K'D = K'D'$ . Ainsi  $D$  est un point d'intersection de l'hyperbole  $h$  et du cercle  $k'$ . On voit que chaque cercle  $k'$  qui a son centre  $K'$  sur  $t$  et qui touche le cercle  $l$ , coupe  $h$  en quatre points; trois de ces points forment le triangle circonscrit au cercle  $k$ , le quatrième est situé sur la parallèle  $K'D$  par  $K'$  à la droite  $KO$ . Soit  $A$  un de ces points qui n'est pas situé sur  $K'D$ ; par ce point passe, outre le cercle  $k'$ , encore un cercle  $k''$  qui a son centre sur  $t$  et qui est en contact avec  $l$ ;  $k''$  peut être seulement le cercle qui a son centre au point où la parallèle menée par le point  $A$  à la droite  $KO$  coupe la tangente  $t$ . Si l'on inscrit à l'hyperbole un triangle qui est circonscrit à  $k$  et qui a un sommet en  $A$ , on sait, que le cercle circonscrit à ce triangle est en contact avec  $l$ . Ce triangle doit être inscrit soit au cercle  $k'$ , soit au cercle  $k''$ ; mais le point  $A$  sur le cercle  $k''$  est différent de ses points d'intersection avec  $h$ , qui peuvent appartenir au triangle inscrit à  $h$  et circonscrit à  $k$ .

Chaque point sur  $t$  est le centre de deux cercles  $k'$ . Si ce point se confond avec  $K$ , le rayon d'un de ces cercles  $k'_0$  est égal à  $2r$ ; pour cette raison le triangle correspondant  $ABC$  est équilatéral.

De là s'ensuit ce théorème:

„Les cercles qui ont leurs centres  $K$  sur une hyperbole équilatère et qui ont des rayons égaux aux diamètres de l'hyperbole qui passent par leurs centres  $K$ , coupent cette hyperbole aux sommets de triangles équilatéraux.“

Le second cercle  $k'$  au centre  $K$  dégénère en droites isotropes. Ces droites coupent  $h$  aux points doubles  $E_1, E_2$  de l'involution, dans laquelle l'hyperbole  $h$  est coupée par involution des angles droits autour  $K$ .  $E_1, E_2$  sont donc les bouts du diamètre de  $h$  conjugué à la direction



de la normale  $L L'$ . Ce diamètre est perpendiculaire au diamètre  $KO$ ; par suite il se confond avec la tangente  $o$  du cercle  $k$  au point  $O$ , et le triangle  $K E_1 E_2$  est aussi un des triangles  $ABC$ . Les sommets des triangles  $ABC$  forment sur l'hyperbole une involution cubique  $I^3$  et les points correspondants  $D$  forment une série ponctuelle projective à  $I^3$ ; car à chaque triple des points  $ABC$  correspond seulement un point  $D$  et réciproquement, comme on voit d'après les constructions données.

6. Faisons correspondre aux sommets de chaque triangle  $ABC$  le point de concours de ses hauteurs  $H$ . On voit que la série  $[H]$  des points  $H$  sur  $h$  est aussi projective à l'involution cubique  $I^3$ . A chaque triple des points  $ABC$  dans  $I^3$  correspond dans  $[H]$  seulement un certain point  $H$ . Il faut démontrer que réciproquement chaque point quelconque  $H$  sur  $h$  est le point de concours des hauteurs seulement d'un triangle  $ABC$  qui est circonscrit au cercle  $k$  et inscrit à l'hyperbole  $h$ . Construisons donc pour le point  $H$  le triangle correspondant  $ABC$ . L'involution  $I^3$  donne une projectivité entre  $k$  et  $h$ , si, à une tangente quelconque  $q$  de la courbe  $k$  on fait correspondre sur  $h$  le point  $Q$  auquel se coupent les tangentes menées à la courbe  $k$  par les points d'intersection de  $q$  et  $h$ , et réciproquement. Les couples des tangentes parallèles  $q, q'$  à  $k$  forment une involution sur  $k$  et les couples  $Q Q'$  des points correspondants  $Q$  forment une involution sur  $h$ . Si  $q, q'$  se confondent avec les tangentes que nous avons désignées par  $A_0 B_0$  et  $A^0 B^0$  (art. 3), les points  $Q Q'$  se confondent avec les points infiniment éloignés sur  $h$ . Donc, les droites  $(Q Q')$  qui joignent des couples  $Q Q'$  forment un faisceau de droites parallèles. Si  $q, q'$  se confondent avec les tangentes parallèles aux asymptotes  $a_2, a_1$ , les points  $Q, Q'$  se confondent avec  $A_0, B_0$ , ou avec  $A^0, B^0$ . Par cette raison  $(Q Q') \parallel A_0 B_0$ . Les droites  $(Q Q')$  sont donc parallèles à la normale  $L L'$  du point  $K$  et par conséquent, elles sont conjuguées au diamètre  $o$  de l'hyperbole  $h$ , qui touche le cercle  $k$ . Si l'on abaisse la perpendiculaire  $s$  par le point  $H$  sur les tangentes  $q, q'$ , on obtient un faisceau de droites  $[s]$  projectif à l'involution  $[q q']$ . Ce faisceau coupe  $h$  en une série  $(S)$  de points projective à l'involution  $[Q Q']$ . C'est seulement quand le point  $S$  de la série  $(S)$  se confond avec un point  $Q$  du couple correspondant de l'involution  $(Q Q')$ , que ce point est un des sommets d'un triangle  $ABC$  dont les sommets forment un triples dans  $I^3$ .

Le faisceau  $[s]$  est projectif aussi au faisceau  $[Q]$  des droites  $Q Q'$ , qui joignent les couples correspondants de l'involution  $(Q Q')$  et il forme avec  $[Q]$  une conique  $u$ . A la droite infiniment éloignée du faisceau  $[Q]$  correspond dans  $[s]$  la perpendiculaire à  $A_0 B_0$  et  $A^0 B^0$ , c'est à dire une droite parallèle à  $t$ ; d'où vient que  $u$  est aussi une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux droites  $L L'$  et  $t$ .

La conique  $u$  coupe  $h$  au point  $H$  et puis aux trois points  $A^* B^* C^*$ . La droite qui joint un quelconque des ces trois points, par ex. le point  $A^*$  au point  $H$ , est perpendiculaire à la droite  $q$  qui joint les points  $B, C$



dans lesquels les tangentes menées de  $A^*$  à  $k$  coupent encore l'hyperbole  $h$ . Les triangles  $A^*B^*C^*$  et  $A^*BC$  ont une hauteur  $A^*H$  commune et, comme cette hauteur coupe les deux hyperboles  $h$  et  $u$  au même point  $H$ , ce point est le point de concours des hauteurs commun à ces deux triangles. A la droite  $HB$  dans  $[s]$  correspond dans  $[q\ q']$  le couple contenant  $A^*C$  et à la droite  $HC$  le couple contenant  $A^*B$ . Pour cette raison les points  $B, C$  se confondent avec  $B^*$  ou  $C^*$ . Donc, au point  $H$  correspond univoquement le triple  $A^*B^*C^*$  dans l'involution  $I^3$ . Puisque les deux séries des points  $D$  et des points  $H$  sont projectives à l'involution  $I^3$ , elles sont aussi projectives l'une à l'autre. On voit d'ailleurs que la dernière projectivité est une involution.

Pour le triangle  $A_0 B_0 C_0$ , dans lequel  $C_0$  est un point infiniment éloigné sur  $h$ ,  $k'$  dégénère en la droite  $A_0 B_0$  et la droite infiniment éloignée du plan  $M$ ; le point correspondant  $D$  est le deuxième point  $C^0$  à l'infini sur  $h$ . Ce point est aussi le point de concours des hauteurs du triangle  $A_0 B_0 C_0$ . Cela posé, on voit que les séries projectives des points  $D$  et  $H$  ont  $C_0 C^0$  comme éléments de coïncidence. Si l'on décrit autour du point  $K$  comme centre le cercle  $k'$  dont le rayon est égal  $2r$ , le triangle correspondant  $ABC$  est, comme nous le savons, équilatéral. Son point de concours des hauteurs se confond avec  $K$  et le point correspondant  $D$  sur  $k'$ , nous le désignons par  $D_0$ , est le point diamétralement opposé au point  $K$ . L'invariant de l'homographie est le rapport anharmonique  $(C_0 C^0 D_0 K)$ ; sa valeur est donc  $-1$ . Par suite les séries des points  $D$  et  $H$  forment, en effet, l'involution aux points doubles  $C_0, C^0$ , et ayant le centre  $O$  comme pôle. Par conséquent deux points quelconques correspondants  $D$  et  $H$  sont diamétralement opposés sur  $h$ .

On conclut que les points  $D_0$  et  $K$  correspondants dans l'homographie considérée sont involutoires aussi de ce que le point  $D_0$  est le point de concours des hauteurs du triangle  $K E_1 E_2$ , et le cercle circonscrit à ce triangle se compose des droites isotropes qui sont menées par le point  $K$ , et le quatrième point d'intersection de ce cercle avec  $h$  se confond avec le point  $K$ . Dans l'homographie des faisceaux  $[s]$  et  $[Q]$  correspond à la droite  $s_0$  du premier faisceau parallèle aux droites du deuxième faisceau dans ce deuxième faisceau la droite  $q_0$ , qui est une asymptote de l'hyperbole  $u$ . Cette asymptote est un diamètre de l'hyperbole  $h$ , comme on démontre par la considération suivante.

Faisons parcourir aux points  $Q$  l'involution  $(i)$  qui a le point infiniment éloigné sur  $t$  comme pôle et par conséquent les points  $K$  et  $D_0$  comme les points doubles et  $C_0 C^0$  comme un couple d'éléments. Par l'homographie entre les points  $Q$  et les tangentes du cercle  $k$  à l'involution  $(i)$  correspond l'involution des tangentes sur  $k$  et aussi l'involution  $(i')$  de ses points de contact. Au point  $Q = K$  sur  $h$  correspond projectivement la tangente  $o \equiv E_1 E_2$  du cercle  $k$ . Puisque le point  $K$  est un point double dans  $(i)$ ,  $O$  est un point double dans  $(i')$  et au couple  $C_0 C^0$  dans  $(i)$  cor-



respond le couple  $A_1 A_2$  dans  $(i')$ ; par conséquent la perpendiculaire  $v$  menée par  $O$  à  $t$  est l'axe de l'involution  $(i')$ ; les tangentes aux points d'un couple quelconque dans  $(i')$  au cercle  $k$  se coupent sur  $v$ . Soit maintenant  $ABC$  le triangle circonscrit à  $k$  et inscrit à  $h$ , dont un côté  $AB$  est parallèle à  $t$ . Au couple des points  $AB$  dans  $(i)$  correspond dans  $(i')$  le couple des points dont les tangentes à  $k$  se coupent sur  $v$ . Mais aux points  $A, B$  correspondent, sur  $k$ , les tangentes  $BC, AC$  projectivement. Par cette raison le point  $C$  est situé sur la droite  $v$ , d'où l'on voit que dans l'homographie des faisceaux  $[s]$  et  $[Q]$  appartient au rayon  $v$  de celui-ci le rayon parallèle dans l'autre faisceau de manière que  $v \equiv q_0$  est l'asymptote de l'hyperbole  $u$ . Parce que les deux hyperboles  $u$  et  $h$  sont circonscrites au triangle  $ABC$  et ont en commun le point de concours de ses hauteurs, le triangle diagonale du quadrilatère  $ABCH$  est le triangle polaire commun aux deux hyperboles. Ce triangle a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$ , et le cercle  $f$  circonscrit à ce triangle est le lieu de centres de toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle  $ABC$ . Par conséquent  $f$  passe par le point  $O$  et coupe encore  $v$  au point  $U$ , qui est le centre de l'hyperbole  $u$ . Le cercle  $f$  est le cercle de neuf points par rapport au triangle  $ABC$ ; pour ce cercle et le cercle  $k'$  au centre  $K'$  circonscrit à  $ABC$  le point  $H$  est le centre extérieur d'homothétie, son rayon est égal au demi-rayon du cercle  $k'$ , son centre  $F$  est situé sur la droite  $K' H$  et divise le segment  $\overline{K' H}$  en deux parties égales. Pour cette raison le quatrième point  $G$  d'intersection du cercle  $k'$  avec  $u$  est le point diamétralement opposé sur  $u$  par rapport à  $H$ , et  $DG \parallel v$ . Comme  $DO = DH$ , les points  $O, K, F$  sont situés sur la droite parallèle à  $K'D$  et le cercle  $f$  touche le cercle  $k$  au point  $O$ .

L'ensemble des cercles  $f$  pour tous les triangles qui sont circonscrits à  $k$  et inscrits à  $h$ , forme un faisceau de cercles qui se touchent au centre de l'hyperbole  $h$ . Mais à un cercle quelconque  $f$  au centre  $F$ , appartenant à ce faisceau, correspondent deux points  $D$  sur  $h$ . On reçoit ces points, quand on mène par le point  $F_1$  sur  $KO$ , pour lequel  $\overline{KF_1} = 2\overline{FO}$ , la parallèle à la tangente  $t$ . Cette parallèle coupe  $h$  en deux points  $D$  et  $D_1$ , et les parallèles à  $OK$  menées par ces points coupent  $t$  en  $K'$  et  $K'_1$ . Le cercle au centre  $K'$  et au rayon  $K'D$  coupe l'hyperbole  $h$  aux sommets d'un triangle circonscrit à  $k$ , par ex.  $ABC$ , le cercle au centre  $K'_1$  et au rayon  $K'_1 D_1$  coupe  $h$  aux sommets d'un autre triangle  $A_1 B_1 C_1$ ; ces triangles sont ceux qui ont le cercle  $f$  comme le cercle commun de neuf points. Les pieds des hauteurs  $H, H_1$  pour ces triangles  $ABC, A_1 B_1 C_1$  sont situés sur la parallèle à  $t$  qui coupe  $OK$  au point  $F_0$  pour lequel  $KF_0 = 2KF$ .

7. Ces considérations sur l'hyperbole équilatère contiennent une démonstration du théorème de Feuerbach.

Si  $ABC$  est un triangle quelconque et  $k$  un des cercles au centre  $K$  inscrits ou exinscrits à ce triangle, de plus  $k'$  le cercle au centre  $K'$  circonscrit au triangle, on sait que par les points  $A, B, C, K$  passe l'hyperbole



équilatère  $h$  qui touche en  $K$  la droite  $KK'$ . Comme le triangle  $ABC$  est circonscrit au cercle  $k$  et inscrit à l'hyperbole  $h$ , on peut construire un nombre infini de tels triangles. Soient  $a_1, a_2$  les asymptotes de cette hyperbole et  $C_0, C^0$  leurs points à l'infini. Les tangentes du cercle  $k$  parallèles à l'asymptote  $a_2$  coupent  $h$  encore aux points  $A_0 B_0$ ; la droite  $A_0 B_0$  touche le cercle  $k$ , parce que  $A_0 B_0 C_0$  est un des triangles mentionnés.

Considérons le faisceau des cercles concentriques à  $k$  et menons à ces cercles les tangentes parallèles à l'asymptote  $a_2$ . Elles forment une involution qui coupe  $h$  en une involution de points, qui a les points  $K$  et  $C^0$  comme éléments doubles et dont  $A_0 B_0$  est un couple. Par conséquent le point d'intersection  $A_1$  de la droite  $t = KK'$  avec l'asymptote  $a_1$  est le pôle de cette involution et la droite  $A_0 B_0$  passe par lui. Comme les points  $A_0, B_0$  sont les points d'intersection de la tangente  $A_0 B_0$  au cercle  $k$  avec ses tangentes  $C_0 A_0$  et  $C_0 B_0$  qui sont parallèles entre elles, l'angle  $A_0 K B_0$  est droit; et d'après l'art. 1, la droite  $A_0 B_0$  est perpendiculaire à la tangente  $KK'$  de l'hyperbole  $h$  et le point  $A_1$  est le point de contact de la droite  $B_0 A_0$  avec  $k$ . Ainsi on voit que les bouts  $A_1, A_2$  du diamètre du cercle  $k$ , situés sur la droite  $KK'$  appartiennent aux asymptotes de l'hyperbole  $h$  et pour cette raison le centre  $O$  de cette hyperbole est situé sur  $k$ . D'où suit le théorème:

„L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle quelconque et qui passe par le centre du cercle inscrit où exinscrit à ce triangle a son centre sur ce cercle.“

Puis que ce cercle inscrit où exinscrit au triangle est lié à l'hyperbole  $h$ , de la manière considérée dans la partie précédente, le cercle de neuf points du triangle  $ABC$  est en contact avec le cercle  $k$  au point  $O$ ; ainsi on peut exprimer ce théorème:

„Les centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle donné, qui passent par les centres des cercles inscrits et exinscrits à ce triangle sont les points de contact de ces cercles avec le cercle de neuf points du triangle donné.“

8. Aux mêmes résultats mène la considération suivante.

Soit donné un triangle  $ABC$  et le cercle  $k$  au centre  $K$  inscrit ou ex-inscrit à ce triangle; menons l'hyperbole équilatère  $h$  par les points  $A, B, C, K$ . Les points qui divisent les côtés de tous les triangles inscrits dans  $h$  et circonscrits au  $k$  en deux parties égales, décrivent une courbe du quatrième ordre  $k^4$ , comme il suit de la considération suivante.

Sur une droite quelconque  $p$  on obtient une correspondance de points (2, 2) si l'on fait correspondre aux tangentes menées au cercle  $k$  par les points de  $p$  les points d'intersection de la droite  $p$  avec les diamètres de cette hyperbole  $h$  qui sont conjugués à ces tangentes, et réciproquement aux diamètres de cette hyperbole menés par les points de  $p$  les points d'intersection des tangentes à  $k$ , qui sont parallèles aux diamètres conjugués. Cette correspondance a quatre coïncidences qui sont des



points de la courbe  $k^4$ . Il suit de cette construction que les points  $C^0, C_0$  à l'infini sur  $h$  sont des points doubles de la courbe  $k^4$  et que le point  $O$  est son point de rebroussement. Car  $k^4$  est aussi le lieu des points qui divisent en deux parties égales les segments sur les tangentes du cercle  $k$ , limitées par les asymptotes  $a_1, a_2$  de l'hyperbole  $h$ . Si le point  $O$  était extérieur au cercle  $k$ , la courbe  $k^4$  aurait dans  $O$  un point double, qui devient un point de rebroussement quand le point  $O$  passe sur  $k$ . Puisque  $k^4$  est une courbe unicursale, le faisceau de coniques qui a au centre  $O$  un point de base, et dont les autres points de base ne sont situés sur  $k^4$ , coupe cette courbe en une involution de points du sixième ordre. Cette involution est déterminée par deux groupes, c'est-à-dire par deux coniques dans le faisceau.

Indiquons maintenant une telle involution tout spéciale. La courbe  $k^4$ , comme on voit d'après sa construction, est en contact avec le cercle  $k$  aux points communs de ces deux courbes; outre le point  $O$  encore trois points  $\alpha, \beta, \gamma$  et les points infiniment voisins  $\alpha', \beta', \gamma'$  sont communs aux deux courbes. Si l'on mène par ex. par  $\alpha$  la tangente au cercle  $k$ , elle coupe  $h$  en deux points  $B', C'$  et les tangentes menées par ces points au  $k$  se coupent au point  $A'$  sur  $h$ . Comme  $\alpha$  est sur  $k^4$ ,  $B'\alpha = \alpha C'$ . Le point de concours des hauteurs du triangle  $A' B' C'$  est situé sur la hauteur  $A'\alpha$  qui passe par le point  $K$  et sur l'hyperbole  $h$ , et par suite il se confond avec le point  $K$ . On en conclut que le triangle  $A' B' C'$  est équilatéral;  $k$  touche les côtés  $A'B', C'A'$  au points  $\gamma, \beta$  qui appartiennent à la courbe  $k^4$ . Pour le triangle  $ABC$  infiniment voisin à  $A' B' C'$  on obtient les points  $\alpha' \beta', \gamma'$ .

Le cercle  $k$  est le cercle de Feuerbach pour le triangle  $A' B' C'$  et pour le triangle infiniment voisin inscrit à  $h$  et circonscrit au cercle  $k$ .

Au diamètre  $i_1$  de l'hyperbole  $h$ , qui contient un point circulaire à l'infini, est conjugué comme diamètre la droite isotrope  $i_2$  contenant le deuxième point circulaire à l'infini. Les tangentes à  $k$  parallèles à  $i_2$  se confondent avec la droite isotrope  $j_2$  qui passe par le point  $K$ . Par suite la droite  $i_1$  est la tangente à  $k^4$  au point  $(i_1 j_2)$  et la droite  $i_2$  est la tangente à  $k^4$  au point  $(i_2 j_1)$ , quand  $j_1$  signifie la deuxième droite isotrope menée par le point  $K$ . Les droites  $j_1 j_2$  coupent la droite  $o$  aux points  $E_1 E_2$  du triangle  $KE_1 E_2$  qui est inscrit à  $h$  et circonscrit à  $k$ . Les droites  $i_1 i_2$  sont des tangentes de la courbe  $k^4$ ; leurs points de contact  $I_1, I_2$  sont situés sur la parallèle à la droite  $o$ , qui divise sa distance du point  $K$  en deux parties égales. Pour cette raison les droites  $i_1 i_2$  sont le cercle de Feuerbach pour le triangle  $KE_1 E_2$  et pour le triangle infiniment voisin, qui est circonscrit à  $k$  et inscrit à  $h$ . Par conséquent le couple  $i_1 i_2$  est le cercle de Feuerbach pour deux triangles  $ABC$  qui se confondent dans la limite; il joint les centres des côtés de ces triangles.

Les cercles  $k$  et  $(i_1 i_2)$  forment le faisceau des cercles qui se touchent au point  $O$ . Les cercles de ce faisceau découpent sur  $k^4$  l'involution du si-



xième ordre  $I_6$ . Chacun de ces cercles découpe un groupe de points de cette involution. Les trois points  $\alpha, \beta, \gamma$  et les points  $O, (i_1 j_2) (i_2 j_1)$  forment sur  $k^1$  encore une involution cubique  $I_3$ . On voit que chaque groupe dans  $I_6$  se divise en deux groupes de l'involution  $I_3$ . Car si une équation du troisième degré  $P = 0$  a pour racines les paramètres de trois points  $\alpha, \beta, \gamma$  et si une équation du troisième degré  $Q = 0$  a pour racines les paramètres de trois points  $O, (i_1 j_2) (i_2 j_1)$ , on peut exprimer un groupe quelconque de  $I_6$  par l'équation

$$P^2 - \lambda Q^2 = 0$$

qui se décompose en les équations  $P + \sqrt{\lambda} Q = 0$  et  $P - \sqrt{\lambda} Q = 0$ , d'où s'ensuit que chaque groupe dans  $I_6$  se décompose en deux groupes de l'involution  $I_3$ .

Enfin on voit que le cercle de neuf points pour chaque triangle circonscrit à  $k$  et inscrit à  $h$  touche le cercle  $k$  au point  $O$  et réciproquement, chaque cercle qui touche en  $O$  le cercle  $k$  est le cercle de neuf points pour deux triangles qui sont inscrits à  $h$  et circonscrits à  $k$ .

De cette manière nous sommes arrivés de nouveau aux résultats précédents et à une nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach.







ALOIS WIESNER, PRAGUE.



ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXIV<sup>e</sup> ANNÉE.

(1924.)

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

1924.







ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

(ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.)

---

# BULLETIN INTERNATIONAL.

RÉSUMÉS DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, NATURELLES  
ET DE LA MÉDECINE.

XXIV<sup>e</sup> ANNÉE.

(1924.)

PRAGUE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE TCHÈQUE DES SCIENCES.

1924.



Bureau of Standards

MAR 20 1925

28582a

W. A. W. A. W.  
W. A. W. A. W.  
W. A. W. A. W.

ALOIS WIESNER, PRAGUE.



## Table des Auteurs.

	Page
<i>Ph. Dr. Václav Hlavatý</i> : Les courbes sur les surfaces dans l'espace à quatre dimensions .....	1
<i>V. Veselý et K. Dvořák</i> : Sur les dinitronaphtalines isonucléaires ...	4
<i>Jos. Hanuš et Jílek</i> : Sur la réduction des sels de bismuth par l'hydrate d'hydrazine, et le titrage du bismuth métallique .....	6
<i>Dr. Jan Vilhelm</i> : Nouveau chara d'eau thermale et radioactive des bains de Píšťany en Slovaquie .....	8
<i>Dr. Vladimír Tůma</i> : La structure du nerf cubital (nervus ulnaris) de l'homme dans la flexure .....	11
<i>Dr. Vladimír Tůma</i> : Contribution à la connaissance de la morphologie et de la genèse des thrombocytes chez les oiseaux .....	13
<i>Dr. Silvestr Prát</i> : The Resorption of Nutrient Salts by Roots .....	18
<i>Dr. Václav Hlavatý</i> : Les courbes à triple courbure dans l'espace à quatre dimensions .....	20
<i>F. Rádl</i> : Sur un certain theoreme qui se rapporte à la résoultante des équations différentielles linéaires .....	23
<i>Vít. Veselý et Mil. Jakeš</i> : Sur quelques réactions de substitution du $\beta$ nitronaphtalène .....	25
<i>Alois Matějka</i> (Prague): Sur le Crétacé de la contrée riveraine de la Labe entre Jiřice et Lysá n. L. ....	26
<i>Dr. Karel Domin</i> : Contributions to the Morphology and Teratology of Plants .....	34
<i>Dr. Karel Domin</i> : Dichotomy and Chorisis .....	43
<i>Al. Wangler</i> : L'analyse de l'isotherme superieure à la critique .....	53
<i>MUDr. Jan Wolf</i> : De l'origine de la substance élastique dans le cartilage .....	65
<i>MUDr. Jan Wolf</i> : Contribution à la connaissance des canaux vasculaires dans le cartilage .....	72
<i>MUDr. Jan Wolf</i> : Sur les cavités et les endroits amollis dans le cartilage aryténoïde .....	74
<i>Vojtěch Jarník</i> : Sur la dérivée des fonctions d'une variable .....	76
<i>Jar. Petrbok</i> : The tertiary Naiades of Bohemia .....	80
<i>J. Janošík</i> : La question de la division de l'ovule non fécondé .....	82



	Page
<i>Dr. Georges Majcen</i> à Zagreb: Application d'une transformation de Bošković aux quadriques de révolution .....	83
<i>Odolen Kodym</i> : Restes des terrains crétacés des environs de Prague les plus avancés vers le sud .....	86
<i>Vojtěch Jarník</i> : Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable, qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction	97
<i>Karel Dušl</i> : Le théorème de Riemann-Roch pour les fonctions à multi- plicateurs (de F. Prym) .....	102
<i>Karel Dušl</i> : Sur les intégrales curvilignes du produit vectoriel $\mathfrak{P} \setminus dr$ .	104
<i>Miloš Kössler</i> : Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence .....	106
<i>Dr. Jan Vilhelm</i> : Etamines à limbe double dans les fleurs de <i>Mimulus</i>	109
<i>J. Heyrovský and P. Terechov</i> : The acidity of mannitol .....	113
<i>Dr. Frant. A. Novák</i> : Contributions to the Morphology and Teratology of <i>Lamium album</i> L. ....	118
<i>Dr. Otakar Matoušek</i> : A strip of Paleogene hitherto ignored and the structure of the southernmost part of the island of Veglia .....	128
<i>Otakar Matoušek</i> : The Geology of the Bay of Bescanuova on the Island of Veglia .....	136
<i>Odolen Kodym</i> : Contributions stratigraphiques à l'étude des couches de Daleje gß dans le Barrandien .....	149
<i>B. Machytka</i> : Problème de Steiner pour les polygones inscrits à une courbe plane d'ordre $m$ de genre 1 .....	157
<i>Dr. J. Moscheles</i> : On young crustal movements in the Carpathians	164
<i>V. Posejpal</i> : Variation de la réfraction spécifique des gaz avec la pression au-dessous d'une atmosphère .....	168
<i>Dr. Henry Křepelka</i> : A revision of Atomic weight of aluminum .....	178



# Les courbes sur les surfaces dans l'espace à quatre dimensions.

Par

Ph. Dr. VÁCLAV HLAVATÝ.

Présenté le 20 Avril 1923.

L'essentiel de l'article suivant est l'étude des courbures sur les variétés à deux dimensions  $V_2$  dans l'espace à quatre dimensions  $E_4$ , et les applications de ses résultats sur le point d'intersection de deux  $V_2$ . Pour point de départ, on se sert du travail du même auteur: „*Les variétés à deux dimensions dans l'espace à quatre dimensions*“.\*)

Le vecteur ayant pour le support la première normale d'une courbe quelconque sur  $V_2$  et pour la longueur sa première courbure  $K_i^*$ , s'appelle le *vecteur de courbure*  $\mathbf{K}_i^*$ , tandis que  $\mathbf{T}$  signifie le vecteur d'unité de la droite tangente de la courbe en question. — La courbe dont la première normale coïncide avec une normale quelconque de  $V_2$  s'appelle la *courbe normale*. Soit  $\mathbf{K}_i$  son vecteur de courbure et  $\Theta$  l'angle de deux vecteurs  $\mathbf{K}_i$  et  $\mathbf{K}_i^*$ . Ou démontre que

1. les courbures  $K_i^*$  de toutes les courbes ayant  $\mathbf{T}$  pour le vecteur tangent jouissent de l'équation  $K_i^* = \sec \Theta K_i$ ;

2. les vecteurs de courbure de ces courbes sont linéairement dépendants, puisqu'ils se trouvent dans un même plan ( $\mathbf{K}_i \text{ } ^0\mathbf{K}_i^*$ ) ( $^0\mathbf{K}_i^*$  est pour  $\Theta = 90^\circ$ );

3. les points extrêmes de tous ces vecteurs  $\mathbf{K}_i^*$  forment une variété réglée à deux dimensions du troisième ordre. On se sert d'elle pour résoudre le problème suivant: *Étant donnés trois vecteurs de courbure  $\mathbf{K}_{i1}^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et la direction du vecteur de courbure inconnu  $\mathbf{K}_i^*$ , on doit trouver les vecteurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{K}_i^*$ .*

Les vecteurs  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_i^*$  et  $^0\mathbf{K}_i^*$  étant linéairement dépendants, il s'en suit, que les vecteurs de courbure de toutes les courbes sur  $V_2$  (passant par le point en question) se trouvent sur une variété à trois dimensions enveloppée des plans. On trouve, que cette variété est un cône du troisième

\*) Publications de la faculté des sciences de l'université Masaryk, No 25.



ordre et on effectue sa construction à l'aide d'un cône quadratique de la deuxième espèce.

Remarque: On ajoute le théorème suivant de la géom. dif. des droites normales:

Pour couper une normale  $\mathbf{K}_{t_0}$  par une normale infiniment voisine, on doit s'avancer par les directions „ $t$ “ données par l'équation

$$(\mathbf{L} t_0 + 2 \mathbf{M} t_0 + \mathbf{N}) \cdot \begin{vmatrix} t^2 G \mathbf{N} \\ -t F \mathbf{M} \\ 1 E \mathbf{L} \end{vmatrix} = 0.$$

\* \* \*

Nous définissons la „ $k$ -ième courbe élémentaire“ (à deux ou une courbure) comme l'élément commun à deux courbes (à deux ou à une courbure) ayant le contact du  $k$ -ième ordre.

Cette façon de voir nous permet de poser le problème suivant: „Deux variétés  $V_2$  et  $V_2'$  ne se rencontrant que dans un nombre délimité des points, à quelles conditions se coupent-elles dans une  $k$ -ième courbe élémentaire?“

On trouve comme nécessaire et suffisant

$$\begin{array}{ll} \text{pour } k = 1 & \mathbf{T} = \mathbf{T}' \\ \text{,, } k = 2 & \mathbf{T} = \mathbf{T}', \mathbf{K}_t^* = \mathbf{K}_{t'}^* \\ \text{,, } k = 3 & \mathbf{T} = \mathbf{T}', \mathbf{K}_t^* = \mathbf{K}_{t'}^*, \mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{t'}, L_t = L_{t'}^* \end{array}$$

d'où l'on déduit les conditions analytiques pour  $k = 1, 2, 3$ . ( $\mathbf{B}_t$  est le vecteur d'unité sur la binormale). Si

$$\text{const } \mathbf{K}_t + \text{const } \mathbf{K}_{t'}' = \mathbf{K}_t^* = \mathbf{K}_{t'}^*$$

ou peut démontrer que

$$\mathbf{K}_t^* = \mathbf{N} + \mathbf{N}',$$

les  $\mathbf{N}, \mathbf{N}'$  étant deux vecteurs de courbure des courbes d'intersection des variétés  $V_2, V_2'$  et de deux plans tangents.

On trouve de même les conditions nécessaires pour le contact du deuxième ordre des courbes à une courbure:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}', \mathbf{K}_t^* = \mathbf{K}_{t'}^* = \mathbf{K}_t + \mathbf{P}_t = \mathbf{K}_{t'}' + \mathbf{P}_{t'}'$$

où les  $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$  sont équipollents aux  ${}^0\mathbf{K}_t^*, {}^0\mathbf{K}_{t'}^*$ , et  $\mathbf{P} : \mathbf{P}$  (resp.  $\mathbf{P}' : \mathbf{P}'$ ) signifie une fonction de la dérivée  $\frac{d\mu}{ds}$  et  $\frac{d\mu}{dt}$  \*).

Les variétés  $V_2$  et  $V_2'$  ayant le même plan tangent, on trouve quatre deuxièmes courbes élémentaires normales (sur chaque variété) dont deux à deux possèdent la même courbure et on fixe les conditions nécessaires de leurs coïncidences.

\*) Pour „ $L$ “ et „ $\mu$ “ voir publication dessus-citée, page 21 et 5.



L'article finit par démonstrations de deux théorèmes de Hachette appliqués dans l'espace à quatre dimensions:

1. *Le vecteur de courbure de la courbe d'intersection  $(V_2 V_3)$  est la résultante de deux vecteurs de courbure appartenant aux courbes  $(V_2 E_3)$  et  $(V_3 E_2)$ .*

2. *Le vecteur de courbure de la courbe d'intersection  $(^1V_3 \ ^2V_3 \ ^3V_3)$  est la résultante de trois vecteurs de courbure appartenant aux courbes  $(^iV_3 \ ^kE_3 \ ^lE_3)$ .  $[(i \gtrless k \gtrless l \dots 1, 2, 3)]$ .  $V_p$  soit une variété à  $p$ -dimensions,  $E_p$  son espace tangent.*

Louny, avril 1923.



# Sur les dinitronaphtalines isonucléaires.

Par

V. VESELÝ et K. DVOŘÁK.

Présenté le 12 janvier 1923.

Dans un mémoire antérieur\*) nous avons communiqué que nos essais de remplacer, dans la nitro-2-naphtylamine-1 et dans la nitro-1-naphtylamine-2, le groupe amino par le groupe nitro, n'ont fourni que les naphtaline-diazooxydes correspondants.

Après nous être convaincus que cette voie ne se prête pas à l'obtention du dinitronaphtalène-1.2, nous avons essayé, si l'on pourrait arriver à cette substance par déshydrogénation de l'ar-dinitro-1.2-tétrahydronaphtalène. En effet, nous avons eu l'avantage d'atteindre ce but, en faisant agir 2 mol. de brome sur 1 mol. de dinitrotétraline-1.2 à 100° et en chauffant l'ac-dibromo-ar-dinitro-1.2-tétraline formée à 160—180°; ce corps perd à cette température très facilement 2 mol. de HBr et se transforme en dinitronaphtaline-1.2.

Nous avons en outre utilisé cette même réaction pour la déshydrogénation de la dinitro-1.3-tétraline en dinitronaphtaline-1.3 qui, très rare jusqu'ici, devient ainsi bien accessible.

Le dinitronaphtalène-1.2 renfermant deux groupes nitrés adjacents, nous avons pu constater qu'il présente une analogie avec l'orthodinitrobenzène, possédant un groupe nitré mobile, et, que c'est dans les diverses réactions toujours le groupe en  $\alpha$  qui est transformé.

Lorsque nous avons enfin soumis les dinitronaphtalènes 1.2 et 1.3 à la réduction partielle, nous sommes arrivés aux résultats suivants:

Quoique la solution de chlorure stanneux attaque, en agissant sur le dinitronaphtalène-1.3, principalement le groupe nitro en  $\alpha$ , on arrive,

---

\*) Comptes Rendus de la „Česká Akademie pro vědy a umění“ à Prague, „Sur la réduction partielle des dinitronaphtalines“. 1922.



au moyen du sulfure d'ammonium, à la même amino-1-nitro-3-naphtaline, accompagnée d'une faible proportion d'amino-3-nitro-1-naphtaline.

En soumettant, par contre, le dinitronaphtalène-1.2 à la réduction partielle au moyen de  $\text{SnCl}_2$ , nous n'avons pu isoler que la nitro-1-naphtylamine-2, tandis que l'action du sulfure d'ammonium sur le même dinitronaphtalène déterminait la formation de produits goudronneux contenant du soufre.



# Sur la réduction des sels de bismuth par l'hydrate d'hydrazine, et le titrage du bismuth métallique.

par

JOS. HANUŠ et ANT. JÍLEK.

Présenté le 20 avril 1923.

Les auteurs signalèrent, dans les Rozpravy České Akademie XXIV (Mémoires de l'Académie tchèque des Sciences, année XXIV) un nouveau mode de réduction des sels de bismuth destiné à servir en analyse quantitative. Ce procédé, basé sur l'emploi de l'hydrate d'hydrazine, avait l'avantage d'être très commode et plus rapide que les modes de réduction employés jusque là.

Le bismuth obtenu à l'état métallique y était pesé. Il y a toutefois possibilité de le doser par voie manganométrique suivant l'équation



K u r t e n a c k e r et W e r n e r (Z. f. allg. u. anorg. Ch. 1922, 123, 166), étudiaient cette réaction en vue de l'utiliser pour le dosage titrimétrique du bismuth. En opérant sur des précipités séparés au moyen des réducteurs classiques, ils obtenaient des résultats variables, ce qui les fit conclure que leur bismuth était plus ou moins oxydé.

Dans le présent travail, nos auteurs tchèques se proposent de résoudre la question de savoir si le bismuth, séparé au moyen de l'hydrate d'hydrazine, donnera, oui ou non, des chiffres normaux, donc utilisables. Pour cela ils réduisent respectivement  $\text{Bi Cl}_3$  et  $\text{Bi OCl}$  (ce dernier après dissolution dans  $\text{HCl}$  dilué par son volume d'eau, et évaporation à siccité). L'opération se fait, à l'ébullition, dans dans un petit vase à filtrations chaudes d'Jéna, en ajoutant 5 cc de  $\text{NH}_2 \cdot \text{NH}_3 \text{ OH}$  (Merck). Le bismuth séparé est filtré sur un creuset de Gooch, et lavé à l'eau chargée de  $\text{CO}_2$ . Le creuset est ensuite placé dans une solution de  $\text{Fe Cl}_3$  dans  $\text{HCl}$ , à travers de laquelle on fait barboter du gaz carbonique. Le sel ferreux, formé par réduction, est titré au moyen d'une solution N/10 de  $\text{KMn O}_4$  suivant la procédé Rheinhardt et Zimmermann.



En opérant ainsi, ils obtiennent en moyenne 100·17% avec un écart moyen de  $\pm 0\cdot086$ . La réduction des sels de bismuth par l'hydrate d'hydrazine se montre donc avantageuse, car le bismuth séparé est exempt d'oxyde, et donne, par conséquent, des chiffres exacts au titrage manganométrique.

Les auteurs constatent, en outre, que la dite réduction par  $\text{NH}_2 \cdot \text{NH}_2 \cdot \text{ON}$  reste quantitative même dans les cas, où la proportion de plomb atteint 5 p. cent du bismuth présent, ce qui permet de doser ce dernier bien plus rapidement que si l'on le sépare à l'état de nitrate basique. Cette dernière séparation devient indispensable, lorsque la proportion de plomb dépasse la limite indiquée, mais elle n'exige pas tant de précaution, étant donné que la petite quantité de plomb, entraîné par le précipité de bismuth, ne saurait nullement compromettre les résultats du titrage.

*E. Votoček.*

---



# Nouveau chara d'eau thermale et radioactive des bains de Píšťany en Slovaquie.

Dr. JAN VILHELM,

Présenté le 8 juin 1923.

En automne de 1921 mon collègue M. E. Baudyš de Brno attira mon attention sur le Chara poussant dans les sources thermales des bains de Píšťany en Slovaquie.

Durant l'été de 1922 j'ai examiné toutes les eaux des sources de Píšťany et grâce à l'amabilité du directeur de l'établissement balnéaire M. Lajoš Winter il m'a été possible d'examiner tout ce qui pouvait m'intéresser.

L'efficacité des eaux thermales sulfureuses (60° C) était parait-il déjà connue des Romains.

Les établissements balnéaires et les sources thermales se trouvent sur une île, formée par la rivière Váh. Les sources thermales sont à proximité ou dans le lit même du bras le plus étroit du Váh, dont le cours varie sans cesse. Près de l'établissement „Irma“ qui est en connexion avec l'hôtel „Thermia“ se trouve un bassin spécial de réserve pour la vase argileuse gris clair, employée pour les bains.

La, à plus d'un mètre de profondeur le fond de l'eau chaude (30—40° C) est couvert d'une grande quantité de plantes de Chara et d'autres plantes encore; on y trouve en outre le Potamogeton crispus en fleur. Le 28 Août lorsque je faisais ma récolte de plantes, l'eau avait une température de 32° C. La localité est en pleine lumière.

Trois jour après le Chara pêché dans ce bassin, en vue d'études détaillées, était absolument flétri et se décomposait en très petites particules.

La constitution chimique de l'eau et de la vase de Píšťany fut analysée dans le Laboratoire de recherches chimiques de Budapest et le détail des résultats principaux des analyses se trouve dans le texte tchèque. La



radioactivité des sources de Píšťany, selon M. E. Cmunt, présente dans 1 l d'eau 2·0—3·2 unités de Mach.

Il m'a été impossible d'identifier l'espèce du *Chara* en question à aucune espèce ou forme connues, car sous l'influence de divers phénomènes (milieu, substratum, température et radioactivité de l'eau), ses propriétés caractéristiques ont changé. La nécessité s'impose donc d'en faire la description et de lui donner une nouvelle dénomination.

### *Chara pistianensis* sp. n.

#### *Diagnosis:*

Planta monoica statura et habitu omnino *Charam foetidam* vel *contrariam* aemulans, 25—30 cm alta, magis ramosa, mite incrustata, luteo-virens, sicca incrustatione cinerascens, fortiter fragilis. Caulis tenuis, flexibilis, internodiis ca. 1—6 cm longis, diplostiche corticatus, aequistriatus, seriebus cellularum primariis atque secundariis aequalibus, papillas minimas sparsas (1—2) gerentibus. Caulis nodis in parte inferiori bulbilliformibus et bulbillis radicalibus globosis candidis insignis. Corona stipularis sursum et deorsum bene evoluta, seriei superioris stipulis longioribus. Folia verticilli 8—9,  $1\frac{1}{2}$ — $2\frac{1}{2}$  cm et magis longis, articulis 5—7, corticatis 2—6, foliola et fructificationem gerentibus 1—2, ecorticatis 2—3, ultimo excepto elongatis. Corticatio foliorum irregularis; saepe verticilli ex foliis ecorticatis vel inaequale corticatis compositi. Foliola unilateralia, plerumque 4, intermedia lateralibus breviora, pluries cystocarpium longitudine superantia (2,5 mm — 3,5 mm longa). Antheridia matura solitaria, ca. 0,330 mm longa. Cystocarpia solitaria oblonga, 0,700—0,720 mm longa, flava, 12—13 gyrata, nucleo fusco, 0,450—0,480 mm longo; coronula 0,110 mm longa, 0,110 mm lata.

#### *Distributio geographica:*

Habitat in aqua termali et minerali lagunae apud aquas „Irma“ in Píšťany in „Repubblica československá“.

Il appartient au groupe Diplostidae et au sous-groupe Isocanthae. Les oosphères sont plus courtes que celles du *Ch. foetida*, et elles ont la dimension des oosphères de moyenne grandeur des formes du *Ch. contraria* poussant en Bohême. Les anthéridies sont plus grandes que chez le *Ch. foetida* et par cela plus semblables à celles de l'espèce *Ch. contraria*.

Cette nouvelle espèce au point de vue phylogénétique est donc plus proche du *Ch. contraria* que du *Ch. foetida*.

Dans cette espèce la présence d'organes végétatifs de reproduction mérite d'être signalée. Ce sont des globules sur les rhizoïdes et renflementt noueux au bas des tiges.

L'abaissement de la température de l'eau en hiver arrête le développement végétatif de ces plantes, mais celle dont nous nous occupons est vivace et ne périt pas tout à fait dans l'eau chaude.



C'est pourquoi elle produit des organes de reproduction végétatifs.

Les études du Chara de la localité en question, qui se feront dans la suite, permettront de donner des indications plus précises sur son existence.

M. Vlk, régisseur des bains, s'est engagé à considérer dorénavant une partie de ces plantes comme réserve et à suivre leur développement.

La nouvelle espèce ne peut être comparée au *Ch. dissoluta* qu'en leur proche parenté phylogénétique commune avec le *Ch. contraria*.

Migula a décrit le *Ch. foetida* f. *decipiens*\*) qui provient de la source (21° R) de Ganovce en Slovaquie, et qui présente sauf la tige de nombreuses anomalies de port. Cet auteur attribuait cette forme à l'influence de la température uniforme de l'eau; le manque de lumière a paraît-il une influence pareille.

Les feuilles de la nouvelle espèce de Píšťany présentaient aussi de nombreuses anomalies.

Des agents extérieurs n'ayant pas influencé le développement des tiges des deux espèces en question il s'en suit que le caractère spécifique principal s'y est conservé.

A mon avis les anomalies remarquées dans le développement des segments des feuilles de la nouvelle espèce doivent être attribuées au faible éclairage les plantes poussant assez bas sous le niveau de l'eau troublée par la vase. La température élevée de l'eau retarde aussi la croissance des feuilles ainsi que j'ai pu le constater lors de mes recherches faites sur les Charas en 1913—1914.

La radioactivité des sources de Píšťany influence cependant le développement du Chara, de sorte que dans l'eau chaude et minérale il pousse plus régulièrement que le *Ch. foetida* f. *decipiens* des sources de Ganovce où manque ce facteur influençant la croissance.

Cette étude n'est qu'une note préliminaire. Dans les années prochaines je me propose une étude plus approfondie de ce Chara et de l'accompagner d'expériences.

Je me permets de remercier ici M. Lajoš Winter, directeur des bains, pour son obligeance lors de mes recherches de la nouvelle espèce de Chara provenant des bains de Píšťany en Slovaquie.

---

\*) l. c. N. Filazsky: „Die Characeen“. (Budapest, 1913.) *Ch. foet. f. decipiens* Migula = *Ch. contraria f. Ganócziana Filar.* (syn. *Nitella Ganocziana Ullepitsch*).



# La structure du nerf cubital (nervus ulnaris) de l'homme dans la flexure.

Par le

**Dr. VLADIMÍR TŮMA,**  
assistant de l'Institut.

Travail de l'Institut d'histologie et d'embryologie  
du professeur Dr. O. Srdínko près de la Faculté de médecine à  
l'Université Charles de Prague.

(Avec 1 tableau.)

Présenté le 25 mai 1923.

J'essaierai de donner brièvement dans la communication présente le résultat des études faites sur la structure du nerf cubital de l'homme dans le voisinage du coude.

L'architectonique de l'os, du cartilage, des tendons a été déjà décrite en plusieurs travaux de Roux, Srdínko, Schiefferdecker et Kossel, Triepel, Wertheim etc., et quand aux tendons aussi la structure dans leurs flexures. Le but de cette travail était de trouver si aussi les nerfs périphériques, respectivement leur tissu conjonctif, ont une structure spéciale dans les régions, où s'exerce la pression, et en cas positif, de quelle façon est cette structure.

J'ai employé pour mes recherches la flexure du nerf cubital dans son trajet dans la gouttière épitrochléo-olécranienne; pour fixer le matériel histologique on s'est servi du sublimé concentré avec 5 p. c. de l'acide acétique glacial, du formol à 10 p. c. et du liquide de Zenker. Les coups à paraffin en séries ont été colorés par la méthode originale de Mallory, chez quelques-uns on a employé aussi de l'hématoxylin de Böhmer et de la solution de picrofuchsine ou le procédé de Weigert pour les fibres élastiques. De telle façon ont été examinés des 15 cas; dans la plupart de cas il s'agissait des hommes et des femmes de l'âge de 20—30 ans.



Les resultats des mes recherches sur la structure du nerf cubital de l'homme dans la flexure sont suivants:

1<sup>o</sup> La structure des flexures du nerf cubital dans son trajet au coude est différente de celle, où ce nerf court directement dans les parties molles.

2<sup>o</sup> Cette structure de flexion est plus ou moins caractéristique, mais elle n'est jamais tellement typique comme dans les flexures des tendons. Les forces mécaniques exercent aussi ici de l'influence plus delicate.

3<sup>o</sup> La lamelle circulatoire de l'épineurium est plus grosse à la surface de la pression. Les septes entre les fascicules secondaires sont évidemment plus grosses à la surface opposée et en majorité ils courent de la surface inférieure à la supérieure, en déclinant par leurs buts supérieurs du centre du profil du nerf. Dans quelques cas ces septes se réunissent par leur base à la surface inférieure (de la pression) avec le croisement partiel de leurs fibres.

4<sup>o</sup> Le tissu conjonctif perifasciculaire est évidemment plus gros dans les flexures vers la surface supérieure.

### Explications relatives aux illustrations.

Im. 1<sup>o</sup> Le coup transversale du nerf cubital de l'homme (26 ans) ca. 1 *cm* sous la flexure.

Im. 2<sup>o</sup> Le coup transversale du même nerf dans la flexure.

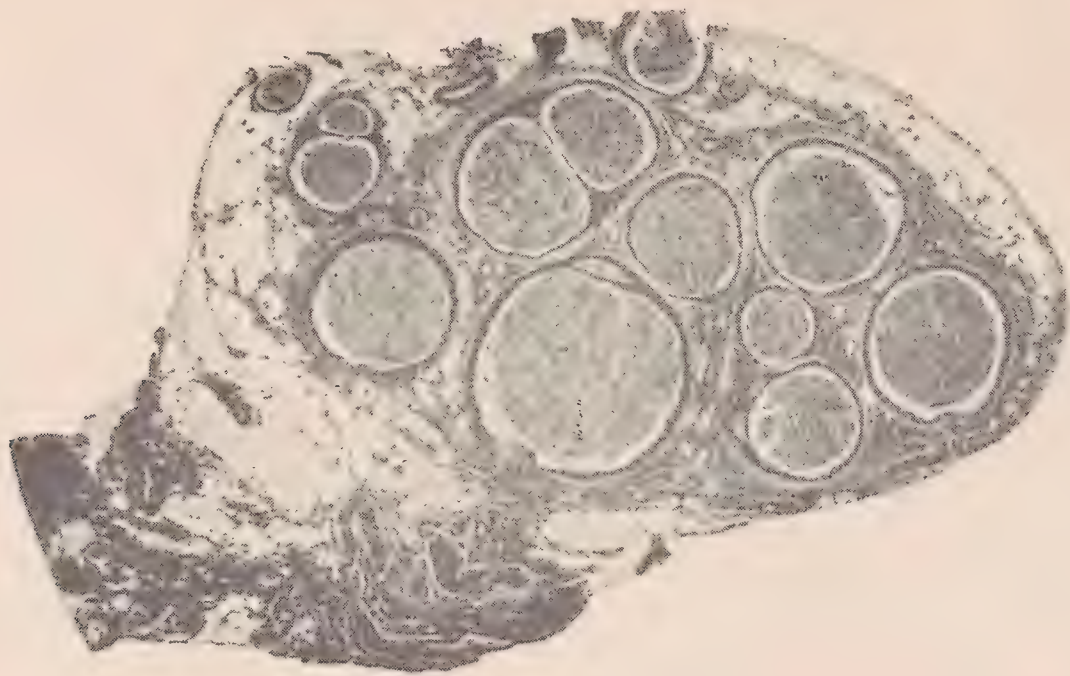
Im. 3<sup>o</sup> La partie basale de l'épineurium de l'im. 2<sup>o</sup> (grosissement plus haute).

Microfotografié avec le grand appareil microphotographique du Zeiss. Les préparations ont été co orés par la méthode originale du Mal ory. Im. 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> Zeiss planar sans ocul. (extr. 47 *cm*) et im. 3<sup>o</sup> Zeiss apòchromat 16 *mm*, oc. de projection No. 2. (extr. 70 *cm*). Le filtre de Zettnow.



Dr. VLADIMÍR TŮMA :

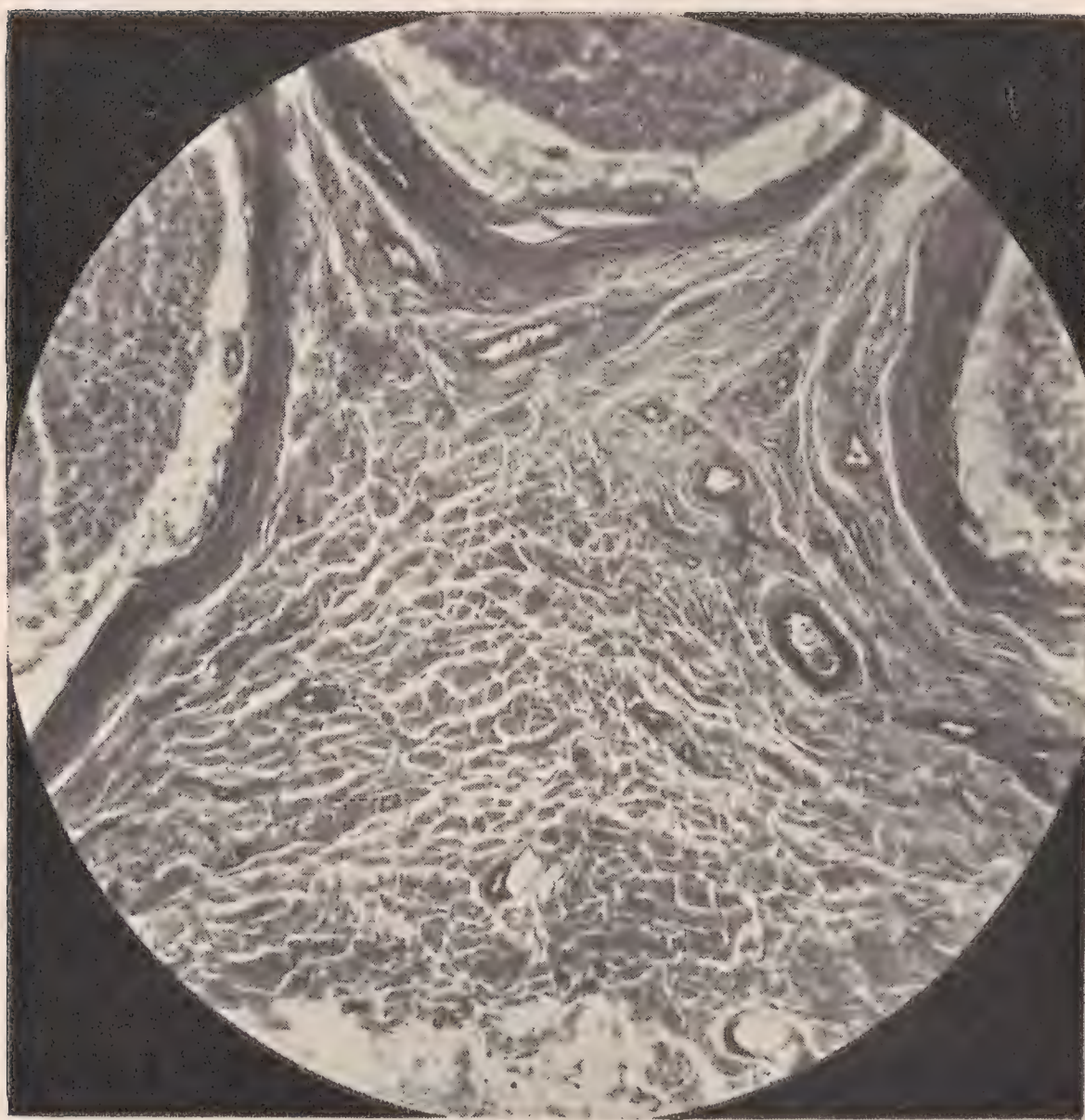
La structure du nerf cubital (nervus ulnaris) de l'homme dans la flexure.



*Fig. 1.*



*Fig. 2.*



*Fig. 3.*







# Contribution à la connaissance de la morphologie et de la genèse des thrombocytes chez les oiseaux.

Par le

Dr. VLADIMÍR TŮMA,  
assistant de l'Institut.

Travail de l'Institut d'histologie et d'embryologie du professeur  
Dr. O. S r d í n k o près la Faculté de médecine  
de l'université Charles à Prague.

(Avec 1 tableau en couleurs.)

Présenté le 26 janvier 1923.

Grâce à l'amabilité et aux conseils précieux du professeur Dr. O. S r d í n k o, il m'a été possible de m'occuper de la morphologie et de la genèse des thrombocytes des oiseaux à l'état embryonnaire. Pour le présent travail, nous nous sommes servis d'embryons de poulet aux différentes étapes de leur développement. En outre, à titre de comparaison, nous avons étudié aussi le sang de jeunes oiseaux d'âge différent, ainsi que celui de grenouilles. Ces comparaisons, la préparation de coupes et des enduits des organes hématopoétiques, les préparations natives et les résultats numériques feront l'objet d'un autre travail.

Pour obtenir des couches de sang aux différentes étapes embryonnaires de gallinacés, nous nous sommes servis d'oeufs de perdreau rouge de pure race (*Gallus domesticus* Briss.) se développant dans des couveuses. Après avoir ouvert les oeufs nous avons préparé quelques-uns de plus gros vaisseaux du sac vitellin sur une lamelle porte-objet placée à coté de l'oeuf et enduite de blanc d'oeuf. Après en avoir séché la surface avec du papier filtre et avoir humecté avec la solution d'Aynaud les vaisseaux déchirés, on après avoir porté avec un bâton de verre paraffiné un goutte de sang sur un porte-objet on un couvre-objet propres dans une goutte de fixateur d'Aynaud, avec laquelle on la mêle, on dispose le mélange en couches minces d'après la méthode courante. Ces couches ont



été d'abord colorées par les procédé de Pappenheim. Plus tard nous avons employé comme coloration préliminaire le mélange de Leishmann. Après séchage, les préparations ont été montées dans de la résine damar. L'avantage indiscutable que présente ce mode de coloration c'est que elle fait ressortir une abondance de chromatine dans les noyaux des thrombocytes à l'encontre des noyaux des petits lymphocytes qui sont de beaucoup plus pâles que les premiers, des sorte qu'il est plus aisé de faire la différence entre ces deux genres de cellules si difficiles à distinguer. Comme controle nous avons employé comme colorant le triacide d'Ehrlich et la solution de Manson.

Nous avons traité de cette façon en tout 48 étapes embryonnaires du perdreau rouge de pure race à partir du 7<sup>e</sup> jour après la mise en couveuse, ainsique quelques étapes du même gallinacé après l'éclosion.

Le septième jour du couvage et dans les heures suivantes, le sang présente un image des plus variées: parmi les érythrocytes plus de la moitié est formée d'érythroblastes présentant la teinte normale orange-rouge, plus gros que les érythrocytes et munis d'un noyau plus pâle. Dans la proportion de 2 : 50, on trouve parmi eux des érythroblastes polychromatofiles, de grosseur normale et de plus grands, qui, par la coloration de leur plasma, allant du rougeâtre au bleuâtre, rapprochent de la coloration du plasma des corpuscules rouges parfaits. Toutes les cellules sanguines sont plus arrondis que dans le sang adulte. Déjà à cette étape nous trouvons des thrombocytes, par où mes observations divergent de celles de Mme. D a n t s c h a k o f f, laquelle ne décrit l'apparition des thrombocytes qu'au 12<sup>e</sup> ou 13<sup>e</sup> jour du couvage. Les thrombocytes et les lymphocytes sont présents dans la même proportion (en moyenne 3 pour 100 érythrocytes). Les thrombocytes sont en général des cellules arrondies ou tant soit peu allongées avec un protoplasma pâle, faiblement basophile; sans granules, de la grosseur 4—5  $\mu$ ; le plasma autour du noyau est plus pâle. Le noyau est rond, mesure 3—4  $\mu$ , est riche en chromatine, rangée en monceau souvent tellement rasurrés que l'on n'y peut distinguer aucune structure. Exceptionnellement on peut trouver des thrombocytes dont le plasma prend une coloration tournant au rouge. Autre de boules d'hémoglobine sans noyaux, mesurant  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$  de la grosseur des normocytes, on voit des corpuscules rouges avec un noyau étranglé par le milieu, on avec deux et même avec trois noyaux.

Le 8<sup>e</sup> jour l'image présente est semblable. Les cellules fusiformes y piqués sont encore excessivement rares. La plupart de thrombocytes sont des cellules rondes possédant un gros noyau pyknotique, situé au centre, sans structure apparente; le protoplasma est homogène, faiblement basophile généralement plus pâle autour du noyau. Quelques-uns ont un plasma rose violet à la périphérie. Chez ces thrombocytes, déjà divergents par la coloration, nous trouvons exceptionnellement une ou deux granules azurées placées dans la zone centrale du plasma.



Dans ces deux étapes les lymphocytes apparaissent comme des cellules rondes avec un plasma homogène fortement basophile et dont la grosseur varie entre 5 et 10  $\mu$ . Le noyau, qui remplit presque tout la cellule, est beaucoup plus pâle que dans les thrombocytes et l'on peut quelquefois y constater un ou deux organismes semblables à des nucleoles. Souvent il est impossible de faire la différence entre un petit lymphocyte et un thrombocyte contenant un plasma simplement basophile et l'on peut trouver de nombreuses formes transitoires entre les deux.

Leur nombre moyen est soumis à de grandes variations individuelles. Il paraît probable que chez les embryons qui se sont développés à une plus haute température il se trouve plus de thrombocytes qui prennent la coloration rougeâtre.

Le 9<sup>e</sup> jour, l'image que présente le sang n'est pas si variée. Il y a sensiblement moins d'érythroblastes et toutes les cellules ont pris peu à peu une forme plus allongée que nous sommes habitués à la rencontrer dans le sang adulte. A cette étape, nous avons trouvé, dans deux cas, une polychromasie bien marquée des érythrocytes (peut-être grâce à la température plus élevée de la couveuse). Il apparaît toujours des corpuscules rouges à deux et même à trois noyaux. Les thrombocytes ont encore une forme allongée avec le plasma ramassé aux poles de la cellule. Chez quelques thrombocytes les pseudopodia ressemblaient à des prolongements qui les auraient collés aux érythrocytes voisins; l'était, semblait-il, un phénomène agonique. Les granules azurées se laissent plus souvent constater; les formes lymphocytaires, spécialement les grandes, augmentent en même temps.

Le 10<sup>e</sup> jour, presque tous les érythroblastes avaient disparu; d'ici de-là on pouvait trouver encore des macrocytes ou plasma plus orangé. Les érythrocytes à deux ou trois noyaux étaient fréquents. Les thrombocytes de forme adulte, avec des granules azurées, et sans elles, étaient nombreux et, là où ils étaient groupés, des filaments plasmatiques les reliaient. Dans ces amoncellements les thrombocytes étaient individuellement mal conservés, ils étaient sujets à la caryolyse et à la plasmolyse.

Du 10<sup>e</sup> au 16<sup>e</sup> jour aucun changement morphologique remarquable ne se fait voir dans les thrombocytes.

Du 16<sup>e</sup> au 20<sup>e</sup> jour croissent peu à peu en nombre les thrombocytes typiques en forme de fuseau, avec des granules azurées, jusqu'à ce que ceux-ci, après l'éclosion, dominant complètement le champ, de sorte que ce n'est que par exception que l'on peut trouver ensuite des thrombocytes arrondis.

---



## Resumé.

Les thrombocytes des oiseaux sont des cellules très mal différenciées, mais, malgré tout, il n'est pas discutable ici, que la façon de voir de Mme. D a n t s c h a k o f f d'après laquelle les thrombocytes des oiseaux proviendraient de petits lymphocytes, ne soit possible. Mais ces derniers ne sont pas sûrement la seule source d'où se forment les thrombocytes, mais ce sont aussi, dans une certaine mesure, les érythrocytes. Chez les érythrocytes des gallinacés la division directe du noyau en 2 ou plusieurs segments est assez fréquente à l'époque embryonnaire, ce qui donne naissance à des érythrocytes à 2 et même à 3 où exceptionnellement à un plus grand nombre de noyaux. Au cours de la segmentation du noyau, il se forme parfois des petits boules de chromatine, souvent décrites, mais qui ne sont pas de beaucoup aussi fréquentes dans le sang embryonnaire que la division régulière directe. Les globules rouges avec plusieurs noyaux se divisent en segments, leurs noyaux perdent la structure de noyau des érythrocytes et deviennent pyknotiques et leur plasma perd graduellement sa coloration hémoglobinique. Chaque segment croît, leur plasma se trouve successivement plus et plus aux pôles, nous trouvons déjà aussi une ou deux granules azurées et la cellule se change en thrombocyte.

En ce qui concerne le sang embryonnaire des gallinacés, on peut dire, qu'il ne possède pas d'appareil spécial pour former les thrombocytes, analogue à l'appareil mégakaryocytaire des mammifères, mais qu' *une certaine partie des érythrocytes* (de la rôle des lymphocytes je ne puis pas discuter ici) *s'adapte morphologiquement*; la proche parenté des thrombocytes avec les érythrocytes et possiblement aussi avec les lymphocytes rend leur reconnaissance difficile et souvent impossible chez leurs formes alternées.

## Explications relatives aux illustrations.

Zeiss. immersion hom.  $\frac{1}{12}''$ , oc. comp. 12, tube 170 mm.

Prép. 5. colorée d'après Manson; toutes les autres colorées comme décrit, d'après le procédé modifié de Leishman-Giemsa.

Im. 1<sup>o</sup> Erythroblaste avec noyau en train de se diviser.

Im. 2<sup>o</sup> Erythrocyte normal.

Im. 3<sup>o</sup> Erythroblaste d'embryon de gallinacé, 16 jour de couveuse.

Im. 4<sup>o</sup> Erythroblaste avec noyau divisé en trois parties. Embryon de gallinacé, 10 jour de couveuse.

Im. 5<sup>o</sup> Erythroblaste à 2 noyaux. Le noyau supérieur pyknotique et relié par un filament avec le noyau inférieur normal. 10<sup>e</sup> jour.

Im. 6<sup>o</sup> Erythrocyte normale.



Dr. VLADIMÍR TŮMA:  
 Contribution à la connaissance de la morphologie et de la genèse  
 des thrombocytes chez les oiseaux.









- Im. 7<sup>o</sup> Differentes divisions d'erythrocytes.  
Im. 8<sup>o</sup> Petites boules d'hémoglobine. 10<sup>e</sup> jour.  
Im. 9<sup>o</sup> Petits lymphocytes.  
Im. 10<sup>o</sup> et 11<sup>o</sup> Formes lymphocytaires transitoires.  
Im. 12<sup>o</sup> Thrombocyte parfait avec des granules azurées. 14<sup>e</sup> jour de couveuse.  
Im. 13<sup>o</sup>—16<sup>o</sup> Formes transitoires depuis l'érythrocyte jusqu'au thrombocyte parfait  
14<sup>e</sup> jour de couveuse.  
Im. 17<sup>o</sup> Amas de thrombocytes. 18<sup>e</sup> jour de couveuse.



# The Resorption of Nutrient Salts by Roots.

Dr. SILVESTR PRÁT.

(Institute of Plant Physiology of Bohemian University in Prague-Praha.)

Présenté le 12 janvier 1923.

1. The measurement of electrical conductivity is a very good method of investigating the changes in concentration of nutrient solutions and this method makes it possible to follow the alterations also in solutions in which plants are growing.

*Pisum sativum*, *Triticum vulgare*, *Pharbitis hispida* and *Zea Mais* were used as indicators. The seedlings, after having been washed with water and culture solution, were placed in the nutrient solutions in small glass tumblers. Comparative studies of the growth of tops and roots and of changes in the concentration of solution were made.

2. The reduction in concentration of Knop nutrient solution occurred steadily and continually, without fluctuations.

3. The greatest reduction in concentration was observed, where the greatest growth occurred.

4. The resorptions of salts by roots is independent of the absorption of water; a very strong transpiration stream exerts a slightly accelerating effect on the entrance of salts.

5. The effect of taking away one cotyledo (*Pisum*) or the whole endosperm (*Zea*) on the resorption of salts is very slight.

6. The reduction in concentration occurred equally when fresh solutions were employed every 24 or 48 hours.

7. In diluted Knop's solutions the percentual reduction in concentration increases in proportion to the dilution.

8. The resorbtion of NaCl and KCl (M/100 solut.) corresponds with the absorption of water, the resorption of MgCl<sub>2</sub> and CaCl<sub>2</sub> is much less.



9. *Polytrichum commune* resorbs nutrient salts like filterpaper, the entrance is dependent on the absorption of water.

10. The branches of *Buxus* and *Tradescantia* without roots take in nutrient salts a quantity which corresponds to the quantity of water transpired by the plants. After the roots have been growing in *Tradescantia*, the resorption increases very considerably.

The writer desires to thank Profesor Dr. Boh. Němec for helpful advice.



# Les courbes à triple courbure dans l'espace à quatre dimensions.

Par

Dr. VÁCLAV HLAVATÝ.

Présenté le 20 Avril 1923.

Prenant les équations  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ ,  $t = t(s)$  pour celles d'une courbe à triple courbure, on déduit les équations de leurs espaces osculatoires\*) à „ $k$ “ dimensions à la forme d'une matrix

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z, & T - t \\ x^{(k-2)} & y^{(k-2)} & z^{(k-2)} & t^{(k-2)} \\ x^{(k-1)} & y^{(k-1)} & z^{(k-1)} & t^{(k-1)} \\ x^{(k)} & y^{(k)} & z^{(k)} & t^{(k)} \end{vmatrix} = 0$$

prenant pour  $x^{(m)} = \frac{d^m x}{ds^m}$  et supprimant celles des lignes dont les indices sont  $< +1$ .

On construit quatre directions perpendiculaires  $T_0 N_1 N_2 N_3$  dont les cosinus directeurs satisfont à

$$T_0 \dots \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 : \delta_0 = x' : y' : z' : t';$$

$$N_1 \dots \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 = x'' : y' : z : t''.$$

$$N_2 \dots \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ \begin{vmatrix} y' & z' & t' \\ y'' & z'' & t'' \\ y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} z' & t' & x' \\ z'' & t'' & x'' \\ z''' & t''' & x''' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t' & x' & y' \\ t'' & x'' & y'' \\ t''' & x''' & y''' \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = M_2.$$

\*) La courbe et l'espace osculatoire à „ $k$ “ dimensions possèdent les  $(k + 1)$  points communs infiniment voisins.



$$N_3 \dots \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 : \delta_3 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = M_3.$$

En prenant les quatre droites perpendiculaires  $T_0 N_1 N_2 N_3$  on obtient le système coordonné de Serret.

A l'aide de ce système on déduit les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_0}{ds} = \alpha_0' &= \alpha_1 k_1 & \alpha_1' &= -k_1 \alpha_0 - k_4 \alpha_2 & \alpha_2' &= k_4 \alpha_1 - k_3 \alpha_3 & \alpha_3' &= k_3 \alpha_2 \\ \beta_0' &= \beta_1 k_1 & \beta_1' &= -k_1 \beta_0 - k_4 \beta_2 & \beta_2' &= k_4 \beta_1 - k_3 \beta_3 & \beta_3' &= k_3 \beta_2 \\ \gamma_0' &= \gamma_1 k_1 & \gamma_1' &= -k_1 \gamma_0 - k_4 \gamma_2 & \gamma_2' &= k_4 \gamma_1 - k_3 \gamma_3 & \gamma_3' &= k_3 \gamma_2 \\ \delta_0' &= \delta_1 k_1 & \delta_1' &= -k_1 \delta_0 - k_4 \delta_2 & \delta_2' &= k_4 \delta_1 - k_3 \delta_3 & \delta_3' &= k_3 \delta_2 \end{aligned}$$

où les  $k_1, k_2, k_3, k_4 = +\sqrt{k_2^2 - k_3^2}$  nous représentent la première, deuxième, troisième et la quatrième courbure (la courbure totale  $k^2 = k_1^2 + k_4^2$ ). Dans ces équations on a supposé l'arc de courbe pour paramètre.

On trouve facilement les relations suivantes

$$k_1^4 k_4^2 = M_3^2; \quad k_1^6 k_4^2 = M_2^2; \quad k_4^2 k_3 = \frac{D}{k_1^3}, \quad k_1^2 = S x''^2$$

$$\text{où } D = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' & x^{IV} \\ y' & y'' & y''' & y^{IV} \\ z' & z'' & z''' & z^{IV} \\ t' & t'' & t''' & t^{IV} \end{vmatrix}$$

On en déduit:

$$k_2^2 = \frac{M_3^2}{k_1^4} + \left( \frac{D}{M_3^2} \right)^2 k_1^2, \quad k_3 = -k_1 \frac{D}{M_3^2}; \quad k_4^2 = \frac{M_3^2}{k_1^4}; \quad k_1^2 = \frac{M_2^2}{M_3^2}.$$

On voit, que  $D = 0$  ( $k_3 = 0$ ) est la condition d'une courbe à double courbure, tandis que  $M_3^2 = 0$  ( $k_2 = k_3 = 0$ ) est caractéristique pour la courbe de plan.

En examinant la courbe donnée au voisinage du point  $s = 0$  on vient aux équations:

$$\begin{aligned} x &= s - \frac{k_1^2}{3!} s^3 - \frac{3 k_1 k_1'}{4!} s^4 + \dots \\ y &= \frac{k_1}{2!} s^2 + \frac{k_1'}{3!} s^3 - \frac{1}{4!} [(k_1^2 + k_4^2) k_1 - k_1''] s^4 + \dots \\ z &= -\frac{k_1 k_4}{3!} s^3 - \frac{1}{4!} (2 k_1' k_4 + k_1 k_4') s^4 + \dots \\ t &= \frac{k_1 k_3}{4!} s^4 + \dots \end{aligned}$$



Ayant les trois équations intrinsèques  $k_1 = f_1(s)$ ,  $k_2 = f_2(s)$ ,  $k_3 = f_3(s)$  d'une courbe quelconque, on parvient aux équations paramétriques à l'aide d'intégration comme suit:

$$x = \int \frac{\xi_1}{\sqrt{s \xi_1^2}}, \quad y = \int \frac{\xi_2}{\sqrt{s \xi_2^2}}, \quad z = \int \frac{\xi_3}{\sqrt{s \xi_3^2}}, \quad t = \int \frac{\xi_4}{\sqrt{s \xi_4^2}}$$

$$(s \xi_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \xi_i^2 + \tau_i^2)$$

les  $(\xi_i \eta_i \xi_i \tau_i)$  étant des intégrals particulières du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = \eta f_1 \\ \eta' = -\xi f_1 - \xi f_4 \\ \xi' = \eta f_4 - \tau f_3 \\ \tau' = \xi f_3 \end{array} \right.$$

Louny, décembre 1922.



# Sur un certain théorème qui se rapporte à la résultante des équations différentielles linéaires.

Par

F. RÁDL.

Présenté le 8 Juin 1923.

Etant données deux expressions diff. lin.

$$f(y) = p_0 y^n + \dots + p_n y, \quad \varphi(y) = q_0 y' + q_1 y,$$

soit la valeur

$$R = \frac{f(\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda = e^{-\int \frac{q_1}{q_0} dx}$$

appelée la *résultante* des expressions diff.  $f$ ,  $\varphi$ . En transformant l'équation  $f(y) = 0$  par la relation  $y_1 = \varphi(y)$  à l'équ.  $f_1(y_1) = 0$  et de même l'équ.  $\varphi(y) = 0$  par la relation  $y_1 = f(y)$  à l'équ.  $\varphi_1(y_1) = 0$ , soit

$$R_1 = \frac{f_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

la résultante des expressions  $f_1$ ,  $\varphi_1$ , où  $\lambda_1$  est l'intégrale de l'équ.  $\varphi_1(y_1) = 0$ . Il s'agit de trouver la relation entre  $R$ ,  $R_1$ .

Ecrivons l'équ.  $f$  à l'aide du système

$$\left(\frac{p_0}{q_0} y_1\right)^{n-1} + a \left(\frac{p_0}{q_0} y_1\right)^{n-2} + h_0 y^{n-2} + \dots + h_{n-2} y = 0, \quad y_1 = q_0 y' + q_1 y$$

ou dans la forme d'un autre système

$$q_0 Y' + q_1 Y + k_0 y^{n-2} + \dots + k_{n-2} y = 0, \quad Y = \left(\frac{p_0}{q_0} y\right)^{n-1} + a_{-1} \left(\frac{p_0}{q_0} y\right)^{n-2};$$

par l'élimination de  $y_1$  resp.  $Y$  on obtient l'équ.  $f$ , de sorte que l'on peut déterminer les valeurs  $a$ ,  $a_{-1}$ . L'élimination de  $y$  dans le premier système donne l'équation transformée  $f_1(y_1)$ .

D'après ces deux systèmes appartiennent à l'expression  $f(y)$  du  $n^{\text{me}}$  ordre deux expressions du  $n - 2^{\text{me}}$  ordre

$$h_0 y^{n-2} + \dots + h_{n-2} y = h^1(y), \quad k_0 y^{n-2} + \dots + k_{n-2} y = k^1(y)$$



et par l'analogie à l'expression  $h^1(y)$  du  $n - 2^{me}$  ordre appartiennent deux expressions  $h^2(y)$ ,  $k^2(y)$  du  $n - 4^{me}$  ordre, généralement à l'expr.  $(h^i y)$  du  $n - 2i^{me}$  ordre appartiennent les expr.  $h^{i+1}(y)$ ,  $k^{i+1}(y)$  du  $n - 2i - 2^{me}$  ordre.

Si l'on désigne les valeurs analogues à l'équ.  $f_1(y_1)$  par  $h_1^i(y_1)$ ,  $k_1^i(y_1)$ , on peut démontrer le théorème préliminaire: que  $h^i(y)$ ,  $k_1^i(y_1)$  sont liées par la même relation  $y_1 = \varphi(y)$  que  $f(y)$ ,  $f_1(y_1)$ .

Pour obtenir la relation entre  $R$ ,  $R_1$ , désignons par  $R_1^i$  la résultante des expressions  $k_1^i$ ,  $\varphi_1$  et recherchons les différences

$$R_1^i - R_1^{i+1} = A_i, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \text{ pour } n \text{ pair}$$

$$i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2} - 1 \text{ pour } n \text{ impair};$$

il a lieu  $R_1^0 \equiv R_1$  et l'on peut exprimer  $R_1^{\frac{n}{2}}$  (évent.  $R_1^{\frac{n-1}{2}}$ ) par  $R$ , de sorte que la somme des ces différences donne précisément  $R_1 - R$ .

Pour le deuxième membre  $A_0$  il a lieu la relation

$$A_0 = R_1 - R_1^1 = \frac{1}{\phi_0^{n-2}} \left( \phi_0^{n-1} \cdot \frac{\lambda_1^{n-1} + a_1^0 \lambda_1^{n-2}}{\lambda_1} \right)'$$

et les relations analogues pour  $A_i$  généralement;  $\phi_0^{n-2}$ ,  $\phi_0^{n-1}$  désigne les puissances.

Le théorème obtiendra la forme définitive

$$R_1 - R = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} A_i, & \text{pour } n \text{ pair} \\ \sum A_i + (h_0^{n-2})' & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$A_i = \frac{1}{(h_0^i)^{n-2i-2}} \left[ (h_0^i)^{n-2i-1} \cdot \frac{\lambda_1^{n-2i-1} + a_1^i \lambda_1^{n-2i-2}}{\lambda_1} \right],$$

$$a_1^i = \frac{h_1^i}{h_0^i} - (n-2i-2) \frac{h_0^{i'}}{h_0} - (n-2i) \frac{q_0'}{q_0} - \frac{q_1}{q_0};$$

$h_0^i$ ,  $h_1^i$  sont deux premiers coefficients de l'expression  $h^i(y)$ .



# Sur quelques réactions de substitution du $\beta$ -nitronaphtalène.

Par

VÍT. VESELÝ et MIL. JAKEŠ.

Présenté le 12 janvier 1923.

En faisant agir un mélange d'acide azotique avec de l'acide sulfurique sur le  $\beta$ -nitronaphtalène dissous dans de l'acide acétique anhydre, nous avons trouvé qu'il se forme les dinitronaphtalènes 2.5 (1.6) et 2.8 (1.7). La bromuration du  $\beta$ -nitronaphtalène fournit un bromonitronaphtalène fondant à 131°. Comme il était à supposer que le brome se mette en position 5, nous avons remplacé, dans la nitro-2-naphtylamine-5, le groupe  $\text{NH}_2$  par le brome et nous avons pu constater que cette réaction donne naissance au même bromonitronaphtalène qui, en conséquence, représente le nitro-2-bromo-5-naphtalène.

Dans un mémoire précédant, nous avons établi des règles de substitution dans le noyau naphtalénique, permettant de prévoir, avec une grande probabilité, les positions des nouveaux atomes ou groupes favorisés par le premier substituant OH, NHAc, Cl, Br, I. Dans le présent travail, nous avons étendu nos règles aux positions prédisposées par les groupes  $\text{NO}_2$ ,  $\text{SO}_3\text{H}$ ,  $\text{CO}_2\text{H}$ , CHO.

---



# Sur le Crétacé de la contrée riveraine de la Labe entre Jiřice et Lysá n. L.

Par

ALOIS MATĚJKA (Prague).

Présenté le 20 Avril 1923.

Dans cet essai il est question du Crétacé s'étendant entre Jiřice et Starý Pěrov, sur la rive gauche de la Labe. Il n'y est pas question de la partie décrite antérieurement<sup>1)</sup> et quant au Crétacé de la rive droite on ne décrit que la partie qui se trouve sur la carte au 75.000<sup>e</sup> de la feuille Prague. Voici l'étendue des zones crétacées: sur la rive gauche affleurent les zones I—III, sur la rive droite la III<sup>e</sup> zone n'apparaît qu'en un seul point, tandis que le reste est occupé par la IV<sup>e</sup> zone.

\* \* \*

Les dépôts d'eau douce de la I<sup>ère</sup> zone (couches de Peruc selon Krejčí-Frič) se terminent en biseau sur la ligne allant par Veleň et Myškovice pour passer au Nord de Přezletice et Dřevčice jusqu'à Brandýs n. Labem. Cette ligne forme la limite sud-ouest et sud de la région élevée qui ne fut recouverte que par la transgression de la II<sup>e</sup> et de la III<sup>e</sup> zone.

Au nord de cette ligne les affleurements de la I<sup>ère</sup> zone, les plus proches, se trouvent entre Sluhý et Mratín. La plus grande puissance des couches mises à nu, y atteint à peu près 6 m. Leur constitution est surtout visible dans la coupe naturelle qui se trouve dans une petite forêt au Sud de Sluhý; là elles sont surmontées par la II zone.

---

<sup>1)</sup> A. Matějka: Contribution à la connaissance du Crétacé sur la feuille Prague. Bulletin 1922.



Terre végétale.

I <sup>ère</sup> zone.	8.	Grès à glauconie en plaques minces jusqu'à.....	150 cm
	7.	Conglomérat gréseux à glauconie — grès à grain gros micacé avec cailloux de lydite .....	20 „
	6.	Grès très argileux avec intercalations de grès.....	50 „
	5.	Grès ferrugineux à grain gros:.....	20—25 „
	4.	Grès très argileux avec cailloux de quartz et intercalations de grès .....	40—50 „
	3.	Grès jaune compacte à mica .....	25 „
	2.	Grès très argileux s'émiettant avec nombreux fragments des grès de la I <sup>ère</sup> zone .....	30 „
	1.	Conglomérats gréseux et kaolineux avec cailloux de quartz et de lydite et fragments de grès de la I <sup>ère</sup> zone .....	20 „
I <sup>ère</sup> zone.	4.	Schiste argileux gris-rouge micacé avec intercalations de grès .....	35 „
	3.	Grès parallélépipédique kaolineux à grain fin et à gros grain, par endroits presque .....	450 „
	2.	Schiste argileux gris-foncé avec de petits fragments de bois carbonisé .....	30—40 „
	1.	Grès jaune à grain fin .....	30 „

Le reste des couches n'affleure pas.

En raison de l'inclinaison des couches crétacées, au Nord les grès kaolineux n'affleurent plus qu'en partie à M r a t í n. Les schistes argileux rougeâtres qui ne sont qu'une intercalation locale n'y sont pas développés.

Dans les grès kaolineux se trouvant entre Sluhy et Mratín J. Petrbo k a trouvé les plantes suivantes décrites par E. Bayer:<sup>1)</sup> *Dicksonia punctata* Heer, *Crannera mirabilis* Corda, *Ficus mratinensis* Bayer, *Bombax argillaceum* Vel., *Eucalyptus Geinitzi* Heer, *Carpolithes petrbo kii* Bayer, *Pustularia perucensis* Bayer.

A l'Ouest, au Sud-Ouest et Nord-Ouest de ces localités seule la II<sup>e</sup> zone ou la III<sup>e</sup> zone unique sont transgressives par rapport à l'Algonkien. Il découle du caractère de la transgression du Crétacé entre la Labe et la Vltava que les couches de la I<sup>ère</sup> zone près de Sluhy et Mratín se sont déposées dans un canal qui s'étendait de K o b y l i s y traversant T ř e b o r a d i c e, vers Sluhy et M r a t í n et de là vers le N. N. E.

Entre B r a n d ý s, O s t r o v et T o u š e ň les couches de la I<sup>ère</sup> zone sont visibles en des affleurements d'une puissance de 12—13 m. La plus belle coupe naturelle de ces couches est celle des carrières situées au Nord du hameau S t r á n k y.

#### Carrière supérieure.

Limon pléistocène.

11.	Grès argileux à intercalations de petites couches d'argiles sableuses avec petites couches ferrugineuses; puissance variant selon l'intensité de la dénudation, en moyenne .....	50 cm
10.	Grès à grain fin, en plaquettes .....	50 „
9.	Grès parallélépipédique kaolineux.....	230 „

<sup>1)</sup> E. B a y e r a J. P e t r b o k: Příspěvek k fytopaleontologii českého ceno-manu. Časopis musea král. čes. Tom. XCIII.



Carrière inférieure:

8. <i>Schistes argileux</i> se terminant insensiblement en biseau .....	190 <i>cm</i>
7. <i>Grès kaolineux</i> à grain fin .....	30 „
6. <i>Schistes argileux</i> .....	15 „
5. <i>Grès kaolineux</i> à grain fin, en plaquettes .....	65 „
4. <i>Schistes argileux</i> , noirs, micacés, sableux en partie, d'à peu près...	180 „
3. <i>Grès parallélépipédique kaolineux</i> à grain fin::.....	160—170 „
2. <i>Schiste argileux</i> noir micacé, ayant dans son milieu une intercalation de grès kaolineux à grain fin qui se termine en biseau et atteint l'épaisseur de 5 à 15 <i>cm</i> ::.....	30 „
1. <i>Grès parallélépipédique kaolineux</i> à grain fin.....	200 „

Le reste des couches n'est pas visible.

Dans les carrières situées au Sud du hameau mentionné, il n'existe plus de schistes argileux ou bien il ne sont pas accessibles. Les couches supérieures de la I<sup>ère</sup> zone d'une puissance atteignant même 4 *m* comprennent des grès très argileux passant aux argiles sableuses alternant avec de petites couches de grès compactes à grain fin. Elles sont déjà surmontées par les grès à glauconie de la II<sup>e</sup> zone. Il s'y trouve aussi sous les grès parallélépipédiques (couche 9) une couche de conglomérat à cailloux de quartz et de lydite d'à peu près 50 *cm* d'épaisseur.

Au Sud de T o u š e ň la I<sup>ère</sup> zone n'affleure plus et à l'Ouest de S t r á n k a elle disparaît sous les limons pléistocènes. Dans le vallon s'étendant au Sud d'O s t r o v des sources ferrugineuses prennent naissance dans les grès de cette zone y déposant un peu de *limonite*. Des sources semblables alimentant les bains d'O s t r o v et de T o u š e ň proviennent de la I<sup>ère</sup> zone crétacée.

\* \* \*

**La II<sup>e</sup> zone** (couches de Korycany selon Krejčí-Frič) se trouve dans le toit de la I<sup>ère</sup> zone ou repose directement sur l'Algonkien.

Entre B r a n d ý s, O s t r o v et T o u š e ň la II<sup>e</sup> zone est partout formée de *grès verts à glauconie*, généralement peu accessibles. Ils sont le mieux visibles dans une carrière abandonnée près de T o u š e ň où affleurent les couches suivantes:

II <sup>e</sup> zone	3. <i>Grès à glauconie</i> à grain fin; puissance incomplète .....	80 <i>cm</i>
	2. <i>Grès argileux à glauconie</i> avec intercalations de grès compactes .....	50 „
	1. <i>Grès argileux à glauconie</i> avec cailloux de quartz .....	20 „
I <sup>ère</sup> zone	2. <i>Argiles sableuses</i> grises avec intercalations gréseuses fermes..	30 „
	1. <i>Grès parallélépipédiques kaolineux</i> .	

Dans la partie de la II<sup>e</sup> zone sur la rive gauche de la Labe entre B r a n d ý s et J i ř i c e et à l'Ouest de cette contrée ce sont les *grès à grain fin à glauconie* qui prévalent, tandis que l'étendue des roches calcareuses est relativement plus petite.

Au S. E. de M a r t i n o v, au. S. E. de la gare de P o l e h r a d ý et à l'Ouest de la station du chemin de fer de M ě š i c e des *grès et conglo-*



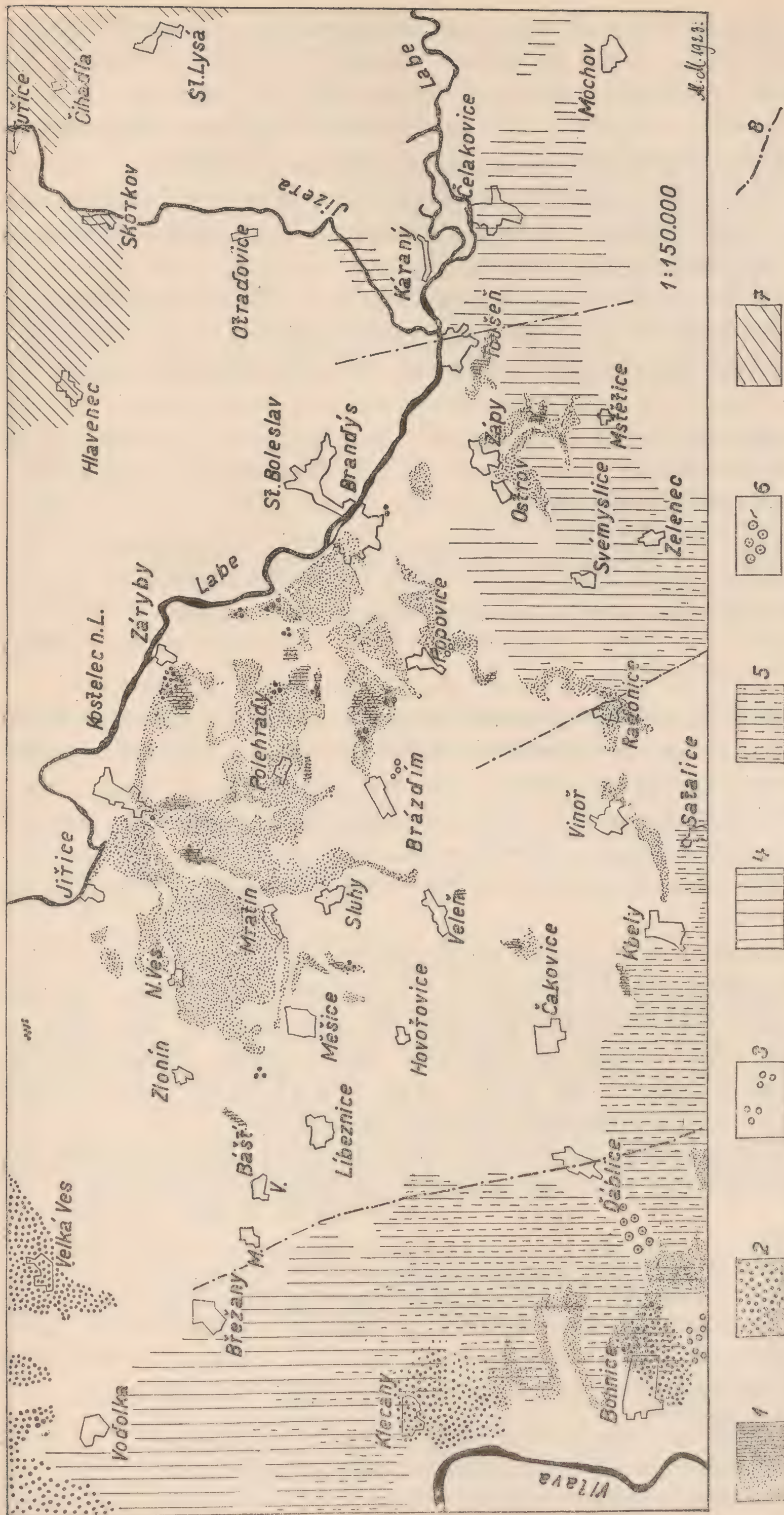


Fig. 1. Etendue des facies de la II<sup>e</sup> et la III<sup>e</sup> zone de la région riveraine entre Čelakovice et Jiřice.

1 = facies sableux et sablo-argileux de la II<sup>e</sup> zone, 2 = facies calcaireux de la II<sup>e</sup> zone, 3 = conglomérats littoraux de la II<sup>e</sup> zone, 4 = facies marneux de la III<sup>e</sup> zone, 5 = facies sablo-marneux de la III<sup>e</sup> zone, 6 = facies récifal de la III<sup>e</sup> zone sur le Ladví près de Dáblice, 7 = IV<sup>e</sup> zone, 8 = affaissements.



*mérats calcaireux* affleurent et là ils sont transgressifs par rapport à l'Algonkien. Entre Sluhy et Mratín dans le toit de la I<sup>ère</sup> zone ce sont des *grès à glauconie à plaquettes* qui prévalent ; ils ont à leur base une couche de *conglomérat sableux et argileux* d'une épaisseur d'un  $\frac{1}{2}$  m. A Sluhy des intercalations peu épaisses des *conglomérats* se terminant en biseau, se trouvent aussi dans les parties supérieures de la II<sup>e</sup> zone. A Sluhy la puissance totale des couches visibles de la II<sup>e</sup> zone est d'à peu près 510 cm et à Mratín elle dépasse de peu 4 m.

Au Sud-Est de Měšice les couches de la I<sup>ère</sup> zone se terminent en biseau dans le mur de la II<sup>e</sup> zone de sorte que celle-ci y est transgressive par rapport à l'Algonkien. Près de la cote 208 affleurent les couches suivantes :

Terre végétale et limon .....		150—200 cm
III <sup>e</sup> zone	2. Marne jaunâtre .....	60 „
	1. Marne verdâtre à glauconie .....	30 „
II <sup>e</sup> zone	3. Argile vert foncé à glauconie .....	50 „
	2. Grès calcaireux avec fragments de schistes algonkiens et cailloux de quartz ou calcaire gréseux .....	30—50 „
	1. Grès fin à glauconie à base de conglomérat avec schistes, cailloux de quartz et de lydite à peu près.....	200 „
Algonkien invisible.		

Dans la II<sup>e</sup> zone l'intercalation d'argile vert foncé apparaît aussi au Sud et au Sud-Ouest de Kostelec n. Labem et près de Zárby. Elle forme toujours la couche supérieure de la II<sup>e</sup> zone. Au S. de Kostelec où elle forme le toit des grès parallélépipédiques calcaireux, elle contient un grand nombre d'*Exogyra columba* et peu de *Belemnites* sp., près de Zárby de nombreux fragments du *Pecten* sp., d'*Ostrea* sp. et d'*Exogyra columba*.

Au Sud-Ouest de Kostelec les grès de la II<sup>e</sup> zone sont calcaireux ; il en est de même près de Zárby. Mais cependant dans le voisinage immédiat de la ville ce ne sont plus que des grès normaux, sans calcaire, qui affleurent. Les couches de cette zone sont le mieux visibles près du pont jeté sur le ruisseau dit Mratínský potok et aussi au Nord de la sucrerie où elles affleurent sur la rive de la Labe.

Coupe naturelle de la II<sup>e</sup> zone près de Kostelec n. Labem non loin du pont jeté sur le Mratínský potok (près de la cote 174).

Terre végétale

10. Grès à glauconie en minces plaquettes contenant à sa base de nombreux restes de l' <i>Exogyra columba</i> et des fragments de l' <i>Ostrea</i> sp.	100 cm
9. Sable jaune et fin légèrement argileux avec fragments de grès...	45 „
8. Argile foncé avec intercalations de sable .....	15—25 „
7. Grès glauconieux à grain fin en plaquettes avec concrétion de grès calcaireux à glauconie.....	75 „
6. Argile gris foncé alternant avec de petites couches de grès argileux	35 „
5. Grès glauconieux à grain fin dont la base renferme une grande quantité de restes de l' <i>Exogyra columba</i> .....	65 „



4. <i>Argile foncé</i> alternant avec de petites couches de grès argileux..	10 cm
3. <i>Grès parallélépipédique glauconieux</i> à grain fin .....	110 „
Invisible.	
1. <i>Grès glauconieux</i> à grain fin .....	30 „

La *concrétion de grès calcaireux* se trouvant dans la 7<sup>e</sup> couche ne diffère des grès normaux que par la présence du ciment calcaireux et d'une micro-faune. De telles *concrétions* sont phénomène courant dans la II<sup>e</sup> zone à la limite entre le facies sablonneux et calcaireux mais dans la contrée en question je n'ai pu le constater que près de K o s t e l e c. Dans d'autres localités où sont développés les dépôts calcaireux et où il est possible de suivre leur passage en grès normaux, ce passage se fait par simple diminution dans le ciment de la proportion de  $\text{CaCO}_3$ , ce dernier n'y donnant pas naissance à des concrétions à la limite des deux facies. De même, des *intercalations d'argile* ne furent constatées que dans cette coupe naturelle. Dans la II<sup>e</sup> zone, des environs de Prague, elles sont très rares, cependant elles sont absolument identiques aux argiles très fréquentes dans la I<sup>ère</sup> zone, dont les couches se sont déposées d'eau douce, tandis que les intercalations argileuses habituelles de la II<sup>e</sup> zone sont toujours caractérisées par une abondance de glauconie et sont vert foncé.

Au Nord de la sucrerie, la puissance des couches de la II<sup>e</sup> zone qui y affleurent, est moindre. La coupe naturelle visible au-dessus des alluvions de la Labe contient les couches suivantes.

Gravier et sable pléistocène.

4. <i>Grès à glauconie</i> en plaquettes, leur puissance varie selon l'intensité de la dénudation, en moyenne .....	100 cm
3. <i>Sable argileux</i> avec fragments de grès .....	25 „
2. <i>Grès fin</i> jaunâtre à limonite .....	12—15 „
1. <i>Grès parallélépipédique</i> gris vert à glauconie .....	160 „

Le reste des couches est caché sous les alluvions.

Le *conglomérat de base* de la II<sup>e</sup> zone contient, près de S l u h y, des *fragments de grès de la I<sup>ère</sup> zone*, dont les couches se sont déposées d'eau douce. Ceci nous prouve que par endroits lors de la transgression de la II<sup>e</sup> zone, l'étendue de la mer était plus petite que le territoire occupé par les dépôts de la I<sup>ère</sup> zone. Ces dépôts dépassant alors le niveau de la mer furent exposés à la dénudation et contribuèrent à la constitution du conglomérat de la base de la II<sup>e</sup> zone.

Cependant dans les environs de K o s t e l e c n. L a b e m au milieu de la II<sup>e</sup> zone se trouve une couche de *sable argileux* avec des *fragments de grès*, quelques-uns d'entre eux, contenant de la glauconie, *appartiennent donc à la II<sup>e</sup> zone*.

Ceci prouverait, qu'à l'époque où, dans quelques endroits, les couches de la II<sup>e</sup> zone se déposaient, les dépôts de cette zone, émergeant au-dessus du niveau de la mer, par suite de *regressions locales*, furent partiellement dénudés. Les deux cas cités prouvent les *mouvements verticaux locaux* de



la côte dès la fin de la sédimentation des couches de la I<sup>ère</sup> zone et pendant la sédimentation des couches de la II<sup>e</sup>. Il me semble logique d'expliquer par ces mouvements, la présence des couches argileuses foncées dans la II<sup>e</sup> zone près du Kostelec n. L.

\* \* \*

**La III<sup>e</sup> zone** (couches de Bílá Hora selon Krejčí-Frič) est formée par *deux niveaux* désignés par Č. Z a h á l k a <sup>1)</sup> sous les noms de *niveau de Břvany III a* et *niveau de Bílá Hora III b*.

Le *niveau de Břvany* est formé par des *argiles, marnes et argiles marneuses*. Les couches marneuses jaunissent toujours par l'altération. Par places, elles contiennent de la glauconie, ce qui leur donne une couleur verdâtre. Leur puissance totale ne dépasse pas 5 m.

Au Nord du r u i s s e a u V a l c h a elles affleurent en îles de couches préservées de la dénudation au toit de la II<sup>e</sup> zone ou bien elles sont transgressives par rapport à l'Algonkien. Au Sud du r u i s s e a u V a l c h a la III zone affleure en une bande continue qui commence au S. E. de R a d o n i c e et s'étend dans la direction E. N. E. vers T o u š e ň, Č e l a k o v i c e, S t a r ý P ř e r o v et M o c h o v. Le niveau III a rarement visible forme son terme inférieur.

Les restes du niveau III a, préservés de la dénudation, et situés au toit de la II<sup>e</sup> zone affleurent au S. E. de M ě š i c e et M r a t í n et encore dans les environs de K o s t e l e c, de là ils s'étendent assez loin sous les alluvions pléistocènes de la Labe dans la direction S. E. vers Z á r y b y. Les argiles et les marnes de ce niveau sont transgressives par rapport à l'Algonkien près de L í b e z n i c e, à l'Est de V e l k ý B á š ť et au S. E. de V e l k ý B r á z d í m. Près de V e l k ý B á š ť elles contiennent de nombreuses spicules de spongiaires ainsi que de grands fragments anguleux de lydite et sont sableuses surtout à la base renfermant des cailloux de quartz.

Dans les environs de P r o s e k et de S a t a l i c e le *niveau de Bílá Hora* (III b) est constitué par des *marnes gréseuses avec intercalations de bancs ou de concrétions de calcaires siliceux*, c'est-à-dire par des roches caractéristiques par le *facies sablo-marneux* de ce niveau. Près de Č e l a k o v i c e, M o c h o v, M s t ě t i c e ainsi que sur la rive droite de la Labe où des sondages ont recoupé le niveau de Bílá Hora il est développé en *facies marneux* et ne comprend que des *marnes d'un bleu gris*. Des couches intermédiaires entre les deux facies affleurent par ex. au S. W. de Z e l e n e č.

D'après le sondage fait près de L y s á n. L. la puissance totale du facies marneux de la III<sup>e</sup> zone seirait de 54—56 m.

Sauf une exception unique, tous les affleurements de la III<sup>e</sup> zone crétacée se trouvent sur la rive gauche de la Labe. Sur la rive droite, la III<sup>e</sup> zone n'affleure que près de N o v ý V e s t e c, sur la rive de la Jizera.

<sup>1)</sup> Č. Z a h á l k a: Východočeský útvar křídový. Část severní s Kladskem a Slezskem. Roudnice 1921.



Partout ailleurs elle est cachée sous les graviers et les sables pléistocènes, qui sont très étendus au confluent de la Labe et de la Jizera, de sorte qu'en raison de l'inclinaison des couches, les premiers affleurements du Crétacé que nous rencontrons sur la rive droite de la Labe sont ceux de la IV<sup>e</sup> zone.

\*       \*       \*

**La IV<sup>e</sup> zone** est constituée par des *marnes sableuses* avec *intercalations de bancs ou concrétions de calcaires siliceux*, donc par des roches semblables à celles du facies marno-sableux de la III<sup>e</sup> zone. Mais même là il y a des différences, surtout par la plus grande proportion de glauconie. Les couches inférieures de la IV<sup>e</sup> zone correspondant au niveau IV *a*, affleurent dans la ville même de Lysá n. L., ainsi que dans le village Hlavenec. Les affleurements se trouvant sur les rives de la Jizera près de Tuřice, Předměřice, Stará Lysá et Lysá n. L. furent déjà décrits en détail antérieurement par M. Č. Zahálka.<sup>1)</sup> Le reste des affleurements, par ex.: celui situé près de Skorkov etc, leur sont identiques.

**Tectonique.** La pente générale des couches crétacées de la rive gauche de la Labe est Nord-Est, leur inclinaison est très douce:  $\frac{1}{2}^0 - \frac{3}{4}^0$ . Elle est surtout visible sur les affleurements où, n'étant interrompues par aucune élévation antécédente, les couches crétacées s'étendent à de grandes distances.

En ce qui touche les dislocations postérieures au Crétacé il a pu être constaté sur la rive gauche de la Labe deux affaissements importants, où les massifs Est se sont affaissés, par rapport au massifs ouest. Un de ces affaissements passe par Radonice, où se rencontrent à la dislocation, d'un côté les zones I et II (à l'Ouest) et le niveau III *b* (à l'Est). Cet affaissement se continue ensuite vers le S. S. E. et passe par Kartouzy près de Horní Počernice. Vers le Nord il s'étend de Radonice jusque vers Podolánka où il est visible dans une carrière creusée dans les couches de la I<sup>ère</sup> zone. La grandeur de l'affaissement n'y atteint qu'un  $\frac{1}{2} m$ , il est donc évident que l'importance de cette dislocation diminue vers le Nord.

Le second affaissement passe par Toušev et se continue vers le Sud-Sud-Est et même vers le Sud. Le niveau III *b* situé à l'Est de la dislocation y est aussi en contact avec les zones I et II du côté ouest. Vers le Sud la dislocation disparaît dans la bande continue de la III<sup>e</sup> zone et vers le Nord elle se perd sous les alluvions modernes et pléistocènes de la Labe. Sur la rive droite de la Labe, selon les données des sondages, elle paraît accompagnée d'affaissements de moindre importance.

*Service géologique  
de la République Tchécoslovaque.*

<sup>1)</sup> Č. Zahálka: Pásmo III. a IV. křídového útvaru v Pojizeří. Věstník kr. č. spol. nauk v Praze 1902.



# Contributions to the Morphology and Teratology of Plants\*.)

By

Dr. KAREL DOMIN.

With 4 text - figures.

Presented at the meeting on May 25, 1923.

The detailed study of plant abnormalities, which in our country is founded on the classical works of L a d. Č e l a k o v s k ý, has shown that there is no sharp limit between abnormalities and normal forms. Anomalies in plant organs are essentially of two kinds. On the one hand we may have the deforming of the plant body or a part of it without any correspondance to certain morphological laws, which pathogenous abnormalities, as they are called by V e l e n o v s k ý (Srovn. Morfol. I. 16, 1905), caused by insects, fungi, wounds or the penetration into the plant of noxious chemical matter, may be designated very appropriately as *monstrosities* („Missbildung“). The term monstrosity, however, should not be used, as unfortunately even O. P e n z i g uses it in the second edition of his fundamental work „Pflanzen-Teratologie“, to designate also anomalies that either are in correspondance with morphological laws, not disturbing the harmony in the composition of the plant body, or at least have not the character of pathological forms, the study of which belongs to fytopathology. For these deviations from the normal form, the interpretation of which is extremely important not only for comparative morphology but also for systematic botany, the term *abnormity* should be used exclusively.

Today we do not look at plant abnormalities as freaks of nature but we endeavour to make use of them scientifically and enlarge our knowledge of the metamorphosis of plant organs as well as of the phylogenesis

---

\*) For details see the Czech text.



of plants, and in so far as it is possible we search for the causes of these abnormalities.

Teratology in the widest sense of the word is the science treating of monstrosities and abnormalities and brings together material that in the case of abnormalities is indispensable for the morphologist and systematic botanist, and in the case of monstrosities for the phytopathologist.

Abnormalities (excluding monstrosities) may be divided into a number of categories, according to different points of view. Such a system, however, would be artificial and unnatural, because on the one hand our knowledge is not always sufficient to enable us to judge every abnormality from a given standpoint (for instance from the causal standpoint), and on the other hand there are not even any definite limits between the various types, not to speak of the fact that not unfrequently abnormalities of different natures and different significance appear together (for example in the same virescent flower). In the first place it must be emphasized that often it is not possible to establish a definite boundary between variations and abnormalities, as is correctly pointed out by O. Penzig (l. c. p. 4). We may therefore speak of *variational* resp. *numerical abnormalities*, which may be very conspicuous when they represent the extremes of variational curves of great amplitude. Further, highly important are *atavistic abnormalities*, as well as all abnormalities that change the functions of any organs, often giving them back a more primitive form, as in the case of the well-known *virescence* of lower parts. *Biological abnormalities* are those in which the deviation in form is clearly in causal connection with the function (for instance androgynodioecy). If the anomaly is caused by some ecological agent or by a number of simultaneously acting factors, we may speak of an *ecological abnormality*. We know, however, of many abnormalities caused by *exuberant growth*, which may be of extremely various characters, as well as abnormalities caused by the season (*seasonal abnormalities*), etc., but all this classification is imperfect already because the designation of abnormalities part of the time conforms to the causes calling them forth, and part of the time to the changes in the plant organs.

In a series of articles I intend to publish various teratological and morphological observations, founded on the material from our own country as well as my hitherto unpublished observations on plants from foreign countries, especially England and tropical southern Asia.

\* \* \*

1. **Coleophylly in *Ranunculus bulbosus* L.** (Fig. 1.) On the stem leaves of the above-mentioned buttercup, especially when it grows in damper localities, from the margin of the sheath there originate as a rule green, assimilating, often long-petiolate segments, sometimes imitating whole leaves. The formation of these segments resp. leaflets



from the margin of the sheath I designate as *coleophyllly*. The leaf of *Ranunculus bulbosus* is — as in many Ranunculaceae — essentially composed of two members, that is, it is divided into the sheath representing the mechanical part and the lamina as the assimilatory part. Of course there are numerous cases (f. i. Gramineae) in which besides its mechanical function the sheath also assumes the function of assimilation, which undoubtedly is very advantageous for the plant because of the economy



Fig. 1. Coleophyllly in *Ranunculus bulbosus* L. — 1, normal basal leaf, 2—9, stem leaves with segments or leaflets originating from the margin of the sheath.

of construction material in such cases when the blade-bearing sheath depends for its duration on the duration of the lamina. The sheath fulfills the mechanical function sooner than the lamina attains its full growth as an assimilatory organ. Later of course the sheath as a protective organ would not have any significance for the fully developed plant, though its preservation is indispensable for the undisturbed function of the lamina. From this point of view, with regard to the functional non-simultaneousness of the sheath and blade, it is an ideal state for the plant when the two members of the leaves become independent of each other so that the duration of one does not require the duration of the other. We then see this evolution realized in the circumstance that the true sheath shortens, forming free sheath-auricles that finally after the abortion of the sheath remain as independent organs, the so-called stipules. This evolution of leaves with regard to stipular organs I explained in detail in



the year 1911. \*) Undoubtedly from the phylogenetical and morphological points of view we can value as true stipules only the remaining sheath-auricles after the abortion of the sheath itself. Pseudostipules, however, sometimes originate through the circumstance that segments of the lower part of the lamina or the basal leaflets of a compound leaf assume the appearance and function of stipules, though of course they are of a different morphological value.

Sometimes the division of the leaf into members is very definite, but sometimes only very imperfect. The blade, petiole, sheath and stipules are of course only parts of the leaf and may in certain cases have a different function than their usual one (f. i. assimilating stipules or petioles). Also from this point of view it is comprehensible that even a sheath as the lower member of the leaf performing a mechanical function may exceptionally — preserving its character as a mechanical ungreen organ — form segments that imitate even whole petiolate blades! The above mentioned form of buttercup is entirely normal except for the great development of the stem leaves, in accordance with the conditions of its habitat, and displays this phenomenon in truly classical form. In some Umbelliferae I also observed a number of cases in which green segments originated from the sheath, but never to such an extent as in *Ranunculus bulbosus*.

In the Czech text I analyse cases of leaf abnormalities observed in different species of *Ranunculus*, as far as they have been published.

2. **Gynodimorphic flowers in *Ranunculus polyanthemus* L.** were observed by myself in July of the year 1918 on Velká Hora near Karlův Týn in central Bohemia. The whole clump bore exclusively female flowers without stamens and the petals were less than half as large as usually. This correlation between the abortion of one sex and the size of the flowers resp. corollas is a frequent phenomenon, though it is not stabilized in all cases. With the suppression of the androeceum as a rule goes the reduction in size of the corolla, as I observed repeatedly in *Dianthus caesius* (Závist, Štěchovice), *Dianthus praecox* (the Alps of Bela in Slovakia), *Geranium silvaticum* (the Rudohoří range in Bohemia and the Polonines in Subcarpathian Russia), *Geranium sanguineum* (central Bohemia, southern Moravia), *Dictamnus albus* (Radotín), *Salvia pratensis* (very frequently), *Thymus ovatus* (the Brdy range), *Thymus praecox* (in the ravine of St. Procop near Prague), *Thymus chamaedrys* (= *alpestris*) (the Krkonoše range, Carpathians), *Echium vulgare* (Č. Krumlov) etc., etc. In some species may be observed floral trimorphy (androgynodioecy), that is, besides individuals with hermaphrodite flowers of medium size there are also purely male forms with large-sized corollas and small-flowered fe-

\*) K. D o m i n in Ann. Jard. Bot. Buitenzorg, 2<sup>e</sup> Série, IX. 117—326, see also Rep. I. Congress Czechoslov. Botan. 64 (1923)



male forms (as for instance in *Thymus ovatus* and *Salvia pratensis*). In *Thymus ovatus* I observed besides in the Brdy range near Příbram (see below!) a form with perfectly sterile flowers with exceedingly small corollas still much smaller than in the gynodynamic form, so that in this case *floral quadrimorphy* was developed.

As a rarity I observed further gynodynamic small-flowered forms in *Hypericum perforatum* in the year 1916 near Příbram, and in *Soldanella hungarica* on the peak Ďumbir in the Low Tatras. In the first case the stamens were rudimentary (without fertile anthers) and in the latter completely suppressed.

**3. Morphological observations on seedlings of *Pinus silvestris* L.** (Fig. 2). In the Brdy range I observed on young 2—5-year old plants various morphologically interesting features, f. i.:

a) Primary leaves in the form of needles, that differ from the definite leaves in their position (being alternate) as well as anatomically and morphologically.\*)

b) Abnormally long (even 12 cm) and strong needles of the brachyblasts from the second and third years and their position (they are horizontally spreading).

c) In exceptional cases I found seedlings bearing on the main stem, especially beneath the apex, a great number of otherwise normal but three-leaved brachyblasts. According to O. Penzig (l. c. III. p. 494, 1922), who refers to the observations of Jaeger, Stenzel, Kronfeld, Reichardt and A. Ludwig, three- and four-leaved brachyblasts are a frequent phenomenon in the forest pine, which circumstance I cannot confirm for the territory of our Republic. It seems to me that the number of needles in the brachyblasts of adult pines (*Pinus silvestris*) is very stable and that exceptions are extremely rare. I may here call attention to the variation in the number of needles in the brachyblasts of *Pinus cembra*, which I observed in August 1919 in the High Tatras near the lake „Zelené pleso“; here I found in solitary cases brachyblasts with three or four needles instead of five.

d) In one case I found the complete longitudinal coalescence of both needles in the brachyblast, which otherwise is normal in the variety *monophylla* (Webster 1896).

e) On the seedlings the brachyblasts not infrequently grow instead of from out of the axils bracts out of the axils of needles, which have the character of primary leaves.

f) In a number of cases a strong winter bud grew from out of the axil of a very large, abnormally wide and long needle, enlarged at the base.

\*) See the literature on the subject f. i. Kirchner in Lebensgesch. Blütenpfl. Mitteleur. I., 1 p., 180—181 (1904).



g) Primary leaves are formed in the first and second years on the main stem. I observed repeatedly, however, that also the lowest lateral branches began with crowded alternate primary needles. I mention this fact because according to the literature on the subject\*) *Pinus silvestris*



Fig. 2. Three-year old seedling of *Pinus silvestris* L.; to the right a brachyblast with the axis grown out, to the left a three-leaved brachyblast.

(as well as *P. cembra* and *P. strobus*) differs from *P. montana* and *P. nigra* in having alternate primary needles only on the main stem, whereas the latter two have these needles also on the lateral stems.

h) On the seedlings of *Pinus silvestris* that have undeformed tops we find all the transitions from brachyblasts with two needles and a suppressed apex to brachyblasts on which the axis grows out in branches of different length. Especially interesting were the cases in which the apex, between two very strong, prolonged needles, enlarged at the base,

\*) See Schröter and Kirchner l. c. p. 216.



formed a shoot with a number of spirally crowded, short but strong and wide needles and ended in a winter bud, which during its further development grew into a branch with normal brachyblasts, issuing from the axils of bracts.

4. **The evolutions of leave in *Sambucus nigra* L.** (Fig. 3.) As a supplement to my former paper,\*) I describe two manners of leaf evolution in *Sambucus nigra*. Normal winter buds begin with bracts

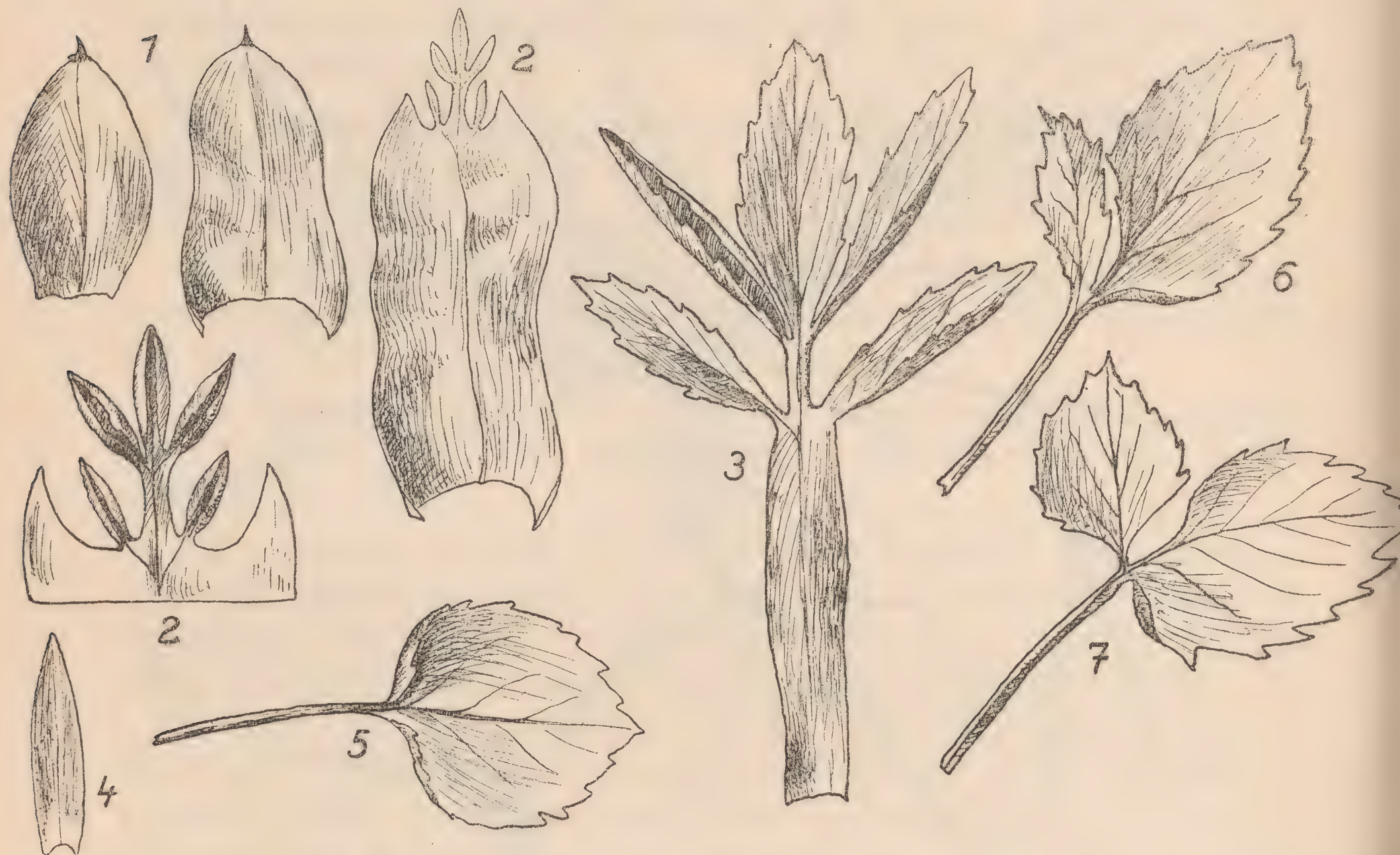


Fig. 3. The evolution of leaves in *Sambucus nigra* L.

(= sheaths), on which subsequently without any transition appear divided laminae (fig. 1—3), whereas on the adventive buds after the bracts follow simple leaves, whose blades gradually are transformed by incision to trifoliate and then pinnate form (fig. 4—7).

5. **Heterophylly in *Salvia glutinosa* L.** This heterophylly is especially striking on stems growing from out of old prostrate axes, bringing to mind the well-known heterophylly on the shoots of many of our woody plants.

6. **The evolution of leaves in *Ononis spinosa* L.** (Fig. 4) The development of the two-membered leaves in the *Papilionaceae* takes place essentially in two different ways. Either the lower member (sheath) is preserved even in the adult assimilative leaves (as a rule in the form of so-called „stipulae adnatae“, that is a sheath with free

\*) K. Domin in Bull. Acad. Sc. Bohême 1911.



lateral auricles) or the sheath itself shortens in the adult leaves to zero and the sheath auricles remain as „free stipules“. I described and illustrated various examples of this evolution already in my above-mentioned paper from the year 1911. In *Ononis spinosa*, besides, the circumstance is of interest that this xerophilous plant, utilising the humidity of spring, in that season forms large leaves and assimilating sheaths, and thus accumulates nutritious matter, which it uses up during the dry and warm summer season, when it forms only small leaves.

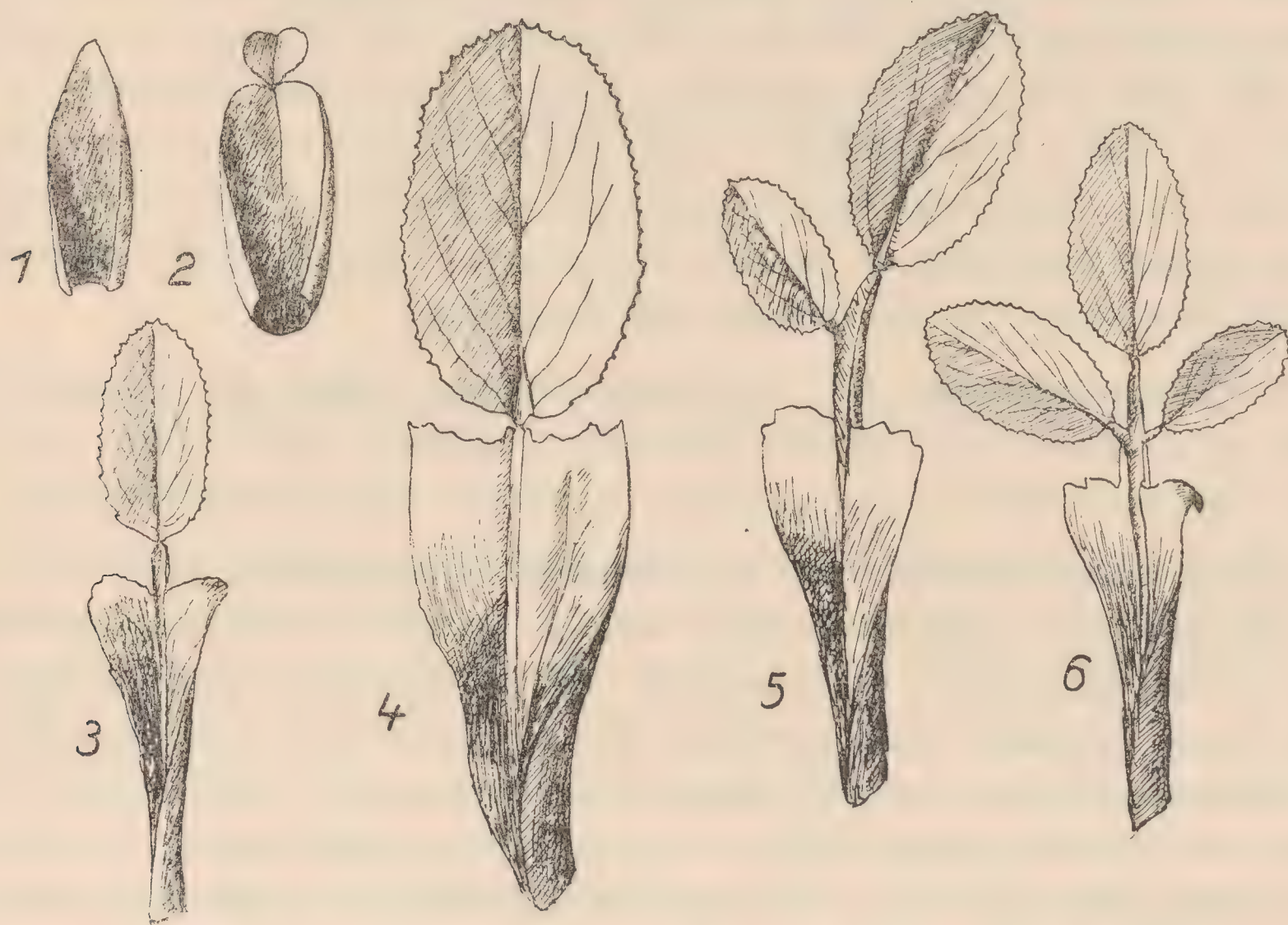


Fig. 4. The evolution of leaves in *Ononis spinosa* L.

7 **A simple-leaved form of *Potentilla arenaria* Borkh.** On the cretaceous slopes near Veltrusy I found in the abundance of *P. arenaria* growing there one specimen with exclusively simple, broad, lobed, long-petiolate leaves; this interesting form I designated as f. (vel mut.) *monophylla*. This form corresponds to that of *Potentilla verna*, described by myself in 1908 from Moravia (see K. Domin, Studien zur Entstehung der Arten durch Mutation in Beih. z. Bot. Centralbl. XXIII. II. p. 18—22, fig. 1, 1908).

8. **An interesting ecological form of *Thymus ovatus* Mill.** In the last days of March this year I observed on a forest slope near Příbram (in the Brdy range) among innumerable richly flowering clumps of *Viola collina* some specimens of *Thymus ovatus* in flower. These plants were robust, prostrate, fairly dense and of a strikingly dark green hue. The flower-bearing stems were branched and the inflorescences at the ends of the main stem and the lateral branches were densely clustered in seeming spikes. Often the flower-bearing stems of the year



before bore on their ends dry fruiting calyces that readily fell off, whereas the lower lateral branches were terminated by fresh flower-heads. The flowers were extremely small, hardly 3 *mm* long, with a normal but very reduced corolla, shorter than the upper calyx-lip. In the corolla there was not the slightest trace of stamens or pistil, the flowers being perfectly sterile. This form is very interesting, for as an evergreen plant it did not interrupt its growth even during winter and its old summer and autumn inflorescences continued in early spring in the formation of new flower-heads, very densely crowded, small-flowered and with shorter pedicels in comparison with those of the year before. It is probable that this form has some connection with the peculiar character of the locality. It was a forest almost completely destroyed by *Liparis monacha*, in which the ground was richly manured by the excrements of this moth. The described phenomenon in this *Thymus* is biologically the more noteworthy because it has no benefit for the plant.

9. **The coalescence of the flower-bearing stems of *Ficaria verna* Huds.** was observed by myself between Černošice and Roblín; at first glance it seemed that it was a case of a simple stem dichotomically cleft.

10. **A simple sympodium in *Capsella bursa-pastoris* L.** On a number of exuberant plants along a wall in Prague I observed in March this year an interesting phenomenon: the axillar stem pushes aside the main stem, already coming into flower, and continues to grow in its direction. During the following weeks I observed the further development of these plants, which was not always the same. In all there were three different cases. Rarely the sympodium remained preserved and the elongated lateral stem, growing perfectly vertically, formed the direct continuation of the main stem, which was turned aside at an angle of about 45°. In other cases both stems, the parent and the filial, formed a fork, deviating from the vertical at approximately the same angle. Very interesting, however, was the third modification: the main flower-bearing stem, at first completely pushed aside, in the course of the further development began to assume its former direction and gradually pushed aside the lateral but vertical stem, till a fork was formed by the two. This was not the final stage, however; in the course of the further development the parent stem returned completely to the vertical and the filial to the lateral position, so that the original sympodium was again transformed into a typical and normal monopodium. This is of course an illustration of the fact that the various types of holoblastic ramification are not always stabilized, but that they may vary even in the same species.



# Dichotomy and Chorisis.

## A Morphological Study.

By

**Dr. KAREL DOMIN.**

Presented at the meeting on April 20, 1923.

The term dichotomy in botany is often not used in an accurate, morphologically clearly defined sense. The older authors designated as dichotomous embranchment almost every case in which some plant organ, especially of course the stem, divides into two approximately equal branches, forks, or parts. Not only this, however. Even cases of dichasial branching were unhesitatingly designated as dichotomy, and so it is not to be wondered at that a not inconsiderable number of flowering plants bear the specific designation „dichotomus“, though dichotomous branching is here out of the question.

When we exclude all these obviously incorrect categories of dichotomous branching and division, there still remain under the dichotomous type numerous cases of entirely different morphological character and weight. Morphologists (among the Czechs especially Čelakovský and Velenovský) paid a great deal of attention to the branching of stems; but nevertheless the rich material of facts has not yet been worked up from a uniform standpoint, and no accurate terminology has been established, which is to be seen even from the fact, to give an example, that the term „true dichotomy“ is applied equally to the branching of the stems of Pteridophyta, with its definite orientation to the leaves, and to the forking of the thalli of many algae and liverworts, or even to the forcate division of the tips of leaves, which occurs frequently in ferns and is not exactly a rare abnormality in flowering plants.

The ramification of the stems of vascular plants can be of only two types. Either the side stems emerge beneath the vegetative apex, in the axils of the leaves, or the vegetative apex divides into two equal parts



that grow into homologous secondary stems, theoretically representing the two halves of the vanished parent stem. The current morphological term for the first type is *monopodium*, for the second *dichopodium* (also dichotomy or dichotomium); besides these a third type is often distinguished as *sympodium*, which, however, is scientifically unjustified, because a sympodium can originate either in a monopodium or a dichopodium. In view of these facts I introduced for the first type the term *holoblastic* branching, and for the second *hemiblastic* branching, which designations are wider as well as expressive of the characters of the respective types.

In the widest sense of the word we speak of branching or division in every case where some organ of the plant's body or the whole body gives origin to an organ or body of the same kind. In the narrower sense, however, we can speak of the branching of *a)* the stems of vascular plants, *b)* the thalli of Thallophyta. Even these two categories are not morphologically homologous, because the bodies of Thallophyta, even when differentiated into seeming leaves and stems, are mere analogies of vascular plants with their bodies divided and branched according to certain laws. For general orientation I give the following synopsis, which should be regarded as a schema only in so far as the branching of the stems and the succession of shoots in vascular plants are concerned, and otherwise viewed in the light of a mere presentation of analogous phenomena.

#### Ramification in the widest sense of the word:

##### A. The branching of the thalli of Thallophyta.

K. G o e b e l,<sup>1)</sup> who treats ramification mainly from the point of view of ontogeny and growth, rightly affirms that it is impossible to apply the laws ascertained in the higher plants to the lower plants, and that it is necessary to judge each group independently. At the same time, of course, the fact cannot be overlooked that ramification is an important characteristic even in individual groups of spore-bearing Asiphonogama. In some cases, of course, it is the unfixedness and variability of the embranchment that is a significant characteristic, as for example in some groups of Algae, while in other cases the mode of ramification is more or less fixed (for example in *Charophyta*, *Sphagnales*). The ramification even of these plants is designated as monopodial or dichotomic (*Dictyota dichotoma* was long considered a classical example of true dichotomy!), though I would recommend the use of other terms, as an indication that there is no question of the branching of parts homologous to those in vascular plants. The main types of ramification here are:

*a)* **Unfixed or irregular ramification**, showing a variety of transitions not in accordance with any certain laws.

<sup>1)</sup> K. Goebel, Organographie der Pflanzen I., 2. Ausg. 1913, p. 75.



b) **Lateral ramification**, which is an analogy of monopodial branching in vascular plants. This type includes a number of essentially different variations, of which are particularly interesting the modifications in the groups containing highly organized types with the thallus differentiated into a seeming stem and leaves, as in the mosses and Charophyta. The mosses are distinguished by lateral („monopodial“) ramification, and the relation of the position of the side branches and buds to that of the leaves is interesting. Some authors (especially Velenovský)<sup>1)</sup> have attempted to prove that the branching of stems and growth of lateral buds in mosses is throughout monopodial and that the side branches and buds originate in the median in the axiles of the leaves on the stem, whereas other authors (especially Schönau and Goebel) emphatically deny this axillar position. In the case of Charophyta, however, the growth of side branches only from the axiles of leaves is undisputable and of great significance for the phylogenetic appreciation of this highly organized type.

c) **Dibrachial** (respectively *pleo-* and *polybrachial*) **ramification** which up till now was designated as dichotomic, is fixed in some Algae and in others forms transitions to lateral ramification. This unfixedness is also a characteristic of the liverworts, in which we find lateral and dibrachial as well as irregular ramification. „True dichotomy with the angular leaf“ is described in the folious liverworts by M. Servit (Beih. Bot. Zentralbl. 1907) though it is of course here impossible to speak of any homology to the Pteridophyta. Of interest are the complicated modes of branching in some liverworts and likewise in the Sphagnales (Kavina 1912), where the ramification is explained as a dichotomic sympodium.

**B. Ramification** in the narrower sense of the word, that is, the branching of the stems and succession of shoots in vascular plants.

Whereas in the spore-bearing Asiphonogama the type of ramification is rarely fixed throughout whole groups, we find in the overground and underground axes of vascular plants a regular system of branching that is a fixed characteristic, important even for phylogenesis. Many authors, especially anatomists and organographers, consider as a whole the ramification of all plants, spore-bearing and seed-bearing, in their axes as well as in all other parts of their bodies, and so arrive at the conclusion that all types of branching are connected by numerous transitions. Therefore it is the affair of comparative morphology and the task of morphologists to ascertain which types of ramification occur in the several groups of the vegetable kingdom and to emphasize the significance of holo- and hemiblastic branching from the point of view of evolution. The regular ramification of the axes of vascular plants is accompanied by a fixed order in the succession of branches; we find an ana-

<sup>1)</sup> J. Velenovský, Comparative Morphology I., 107 (1908).



logical (but by no means homologous) phenomenon in some of the highly organized Thallophyta, for example in the Charophyta, but in most cases it is impossible to compare the regular and fixed holoblastic and hemiblastic succession of branches to the lateral and dibrachial ramification of thalli, which sometimes alternate on the same individual and can be called forth by certain conditions in cultivation.

The ramification of axes is of two kinds:

1. **Holoblastic ramification**, in which the side branches originate beneath the vegetative apex in the axils of leaves. According to the further development of the parent and side branches — as regards their respective directions and strenght — holoblastic ramification is subdivided into two types, which of course are connected by transitions.

a) **Pleuroblastic ramification**, in which the main axis remains the strongest and continues growing in its original direction.

To this category belongs the familiar *monopodium*, which is either *racemose* or *cymose*.

b) **Acroblastic ramification**, in which the side branch forces the parent branch to one side and continues growing in the original direction of the parent branch.

Through repeated acroblastic ramification there originates an axis seemingly simple but in reality composed of the successive lateral branches, forming the familiar *holoblastic sympodium*, in which the seeming lateral branches (the terminations of the parent branches) appear opposite the leaf insertions.

Holoblastic ramification occurs (except for extremely isolated exceptions) in all seed-bearing plants. Both of the types mentioned, most often designated as monopodium and sympodium, are connected by various transitional forms, in the vegetative parts and especially in the inflorescence. Already L. Č e l a k o v s k ý, besides other authors, called attention to this in his work „Ueber einige dem phytostatischen Gesetze unterliegende Fälle von Verzweigung“,<sup>1)</sup> in which he shows that the terms monopodium and monopodially branched system are ambiguous and therefore discards them entirely, introducing instead of them the terms *pleuroblastic*, *acroblastic* and *dichoblastic*. As dichoblastic ramification he designates those cases in which the lateral branch forces aside the parent branch only partially, so that both the branches in question deviate from the longitudinal median at the same angle and form a fork. Thus originates a seeming dichopodium, which is now designated as a *pseudodichopodium*. Into the conception pseudodichotomy, however, are often included cases of an entirely different character, namely the cases in which the main terminal stem or the apex of growth is suppressed and the opposite axillar

<sup>1)</sup> Jahrb. für wiss. Bot. XXXII., pages 323—360 (1897).



branches appear to be a fork dichotomically ramified. Such cases can occur in dichasial inflorescences with entirely suppressed terminal flowers, as I once observed in *Radiola linoides*. A very instructive example is illustrated and described also by Goebel (l. c. 100, ill. 92, 93) on the inflorescence of *Begonia vitifolia*.

2. **Hemiblastic ramification**, in which the vegetative apex divides into two new apices, that give origin to branches of the same strength at least in the beginning. The main types of hemiblastic ramification are the following.

a) **Homobrachial ramification**, in which both new branches permanently are alike in strength and deviate from the vanished (divided) parent branch at a certain angle.

To this category belongs the familiar *dichopodium* in the narrower sense of the word, which has been studied in detail in many of the Pteridophyta. The leaf on the parent branch that is nearest to the dichopodial ramification often assumes such a position that it divides the angle of the fork. V e l e n o v s k ý (l. c. 209) calls this leaf the *angular leaf* and considers it a permanent character of the dichopodia of the vascular Cryptogams. The presence of the angular leaf is of course a highly important morphological characteristic, for it indicates a regular interdependence between the dichotomic branching and the leaves. Therefore I consider it useful to designate the cases of dichotomic ramification in which the angular leaf is present by a special term (eudichopodium or eudichotomy).

A special form of the dichopodium is the tetrachopodium, which V e l e n o v s k ý describes under the genus *Selaginella*.

It was long maintained the the true dichopodium exists only in the Pteridophyta, but later J. C. S c h o u t e<sup>1)</sup> ascertained an eudichopodium in the case of the palm *Hyphaene thebaica*, while V e l e n o v s k ý<sup>2)</sup> describes another palm (*Chamaedorea Martiana*) as having both monopodial and eudichotomic ramification.

b) **Heterobrachial ramification**, in which one of the new dichopodial branches is stronger than the other, forces the weaker homologous branch of the fork to one side and continues growing in the direction of the vanished (divided) parent branch.

Repeated heterobrachial ramification gives origin to the *hemiblastic sympodium*, also called the dichotomic sympodium.<sup>3)</sup> It is natural that every sympodium, whether holo- or hemiblastic, looks at first glance like

<sup>1)</sup> J. C. Schoute, Über die Verästelung bei monokotylen Bäumen 1909.

<sup>2)</sup> J. Velenovský, Vergleich. Morphol. IV. (1913), 114—116.

<sup>3)</sup> In my opinion the term *dichopodium* is not very appropriate for this type of sympodium, because most authors consider dichopodium and dichotomy as synonymous expressions.



a monopodium and therefore the hemiblastic sympodium is sometimes designated as the *pseudomonopodium*, though of course this term in itself conveys nothing about the true character of the succession of branches. In the Pteridophyta both types of hemiblastic ramification are connected by various transitions, the proofs of which may be found in the voluminous literature<sup>1)</sup> on the subject. Also the „umbellate monopodium“ of the Equisetaceae, which differs from the true monopodium already in the circumstance that the side branches do not issue from out of the axils of the leaves, grown together in a vagina, but always fall exactly between two leaves, is explained by V e l e n o v s k ý as a special case of hemiblastic sympodium.

Besides the normal hemiblastic ramification of axes according to one type or the other there occurs in seed-bearing plants as an abnormality the case of

**Dichotomic division of axes.** True examples of this kind are rare; more often it happens that two neighbouring axes completely grow together in their lower part and thus it appears that one axis divides. In the year 1921 I observed frequent cases of such growing together in the pedicels of apple-blossoms (*Malus silvestris*) and could quote a great number of others from various writings. The true dichotomic division of the axis, which is really identical to Fermond's *diplasy* and which P e n z i g<sup>2)</sup> cha-



Fig. 1. Dichotomic division of the flower peduncles in *Viola collina* (see text).

<sup>1)</sup> See Aug. Bayer, Zur Morphologie der Rhizome von *Pteris aquilina* in Sitz. Kgl. Böhm. Ges. der Wiss. 1903, No X.

<sup>2)</sup> O. Penzig, Pflanzen-Teratologie I., 2. Ausg. (1921).



racterizes as „Spaltung eines Axenorganes in zwei Theile“, was described and illustrated on *Sequoia sempervirens* in the year 1888 by J. V e l e n o v s k ý.<sup>1)</sup> On the specimen of this tree cultivated in the green-house of the botanical garden the author observed numerous cases in which the scaly peduncles of the male cones divided dichotomically and each branch of the fork was terminated by a cone. V e l e n o v s k ý does not consider this division as abnormal, because he found it in almost every other cone; in one case he even found that one branch of the fork divided again dichotomically! This division occurs without any certain orientation to the leaves and V e l e n o v s k ý compares it to the dichotomic ramification of the branches bearing the spikes of sporangia in the club-mosses (*Lycopodium*). Later, however, he affirmed that this mode of division had not been sufficiently investigated and no longer regarded it as dichotomous.

Towards the end of March this year I observed another highly interesting case of the dichotomic division of the axis in *Viola collina* on the sunny wooded slope called „na Vartě“ in Příbram. On one very sturdy and profusely flowering clump of this violet there were a number of flower peduncles growing each from out of the axil of a normal leaf that were furcately divided into two branches, each of which terminated with a normal flower with the usual two prophylla. As often happens in dichopodial forking, both these branches were not of the same strength, but one was weaker or at least retarded in development. Especially on one of the flower peduncles, as may be seen on the accompanying illustration, one of the arms of the fork was very weak. The branched peduncles bore no other forms of leaves than the normal bractea underneath the flowers. It is superfluous to remark that there could be no question of the growing together of two flowers, but that the peduncle of a single flower, growing normally from out of the axil of a leaf, was dichotomically divided.

C. **The ramification of roots** is essentially monopodial or dichopodial in type. The essential difference- not considering the endogenous growth of roots-consists in the circumstance that roots bear neither leaves nor bracts and that therefore their ramification has no orientation in regard to leaves.

D. **Chorisis**, or the *division and multiplication of phyllomes*. Some authors speak also of the ramification of leaves, though the morphologist certainly must distinguish between the ramification of axes, which has as a consequence a certain succession in the growth of branches, and the complete or incomplete, true or congenital division of leaves, vegetative as well as reproductive. We define chorisis in the widest sense, namely in the sense of O. P e n z i g, who writes about chorisis („Spaltung“) as

<sup>1)</sup> Sitzungsber. Kgl. Böhm. Ges. Wiss. 1888, p. 368—369.



follows: Ursprünglich nur für den Fall gebraucht, in welchem an Stelle eines Phyllomes zwei andere vollständige auftreten, wird dieser Ausdruck vielfach auch ganz allgemein für Spaltung (sowohl laterale als seriale) angewandt. Choris in this wide conception includes cases of two kinds, namely:

1. **Cleavage** in the narrower sense of the word, that is, such cases in which parts originating from the same primordium appear as components of the same whole.

2. **Deduplication**. By deduplication is meant the congenital division of phyllomes when the parts originating from one primordium are entirely independent and have the character of a whole phyllome.

For the division of leaves it is possible to present a great number of cases, ranging from incomplete division to complete separation into two parts, which is not infrequently accompanied by the division of the bud or axis in question. In another study I mean to bring together the various examples of the division of leaves and in part even of axes that I have observed in the course of years and of which I consider especially interesting the division of leaves in a *Hydrangea*, on a specimen of which, cultivated in the botanical garden of Kew, I found all the transitional forms between leaves partially excised on one side and leaves with the entire lower part divided off on one side, which in further stages became an independent leaf and finally appeared at a certain distance on the branch from the parent leaf and assumed the character of an independent and complete leaf, though morphologically equivalent to only a section of a leaf lamina! This mode of division in the lamina I designate as *pleurotomic division* (pleurotomy); in a similar manner triplet leaves often originate from a single simple leaf or leaflet. On the other hand I designate all cases of the so-called „dichotomic“ division of phyllomes as *acrotomic division* (acrotomy). This division may give origin to only a double leaf-tip, but sometimes is complete and so forms double leaves („Doppelblätter“) which already belong to the conception of deduplication. It is natural that the two types of choris, cleavage and deduplication, are not sharply divided but connected by very numerous transitions.

The explanations proffered of double-tipped and double leaves differ extremely. Some authors, as for instance *Delpino*, assume that they originate by division, but others (for example *Jaenicke* and *Klein*) attempt to prove the exact opposite, affirming that they originate in the growing together of two leaves placed side by side; other morphologists (for instance *Alex. Braun* and *Buchena*) incline toward the opinion that they arise partly through division and partly through growing together, while *Čelakovský* attempts to prove in detail an opinion that at first glance seems paradoxical, that the double leaves



„zugleich der Theilung eines Blattes und der Verschmelzung zweier Blätter seine Entstehung, seine Formen und seinen inneren Bau verdanken“.

The division of leaves is of many characters. The division of the tip (acrotomy) is either forked or multiple and at the same time often irregular (as is shown by the numerous examples of these types known in the Pteridophyta). Sometimes phyllomes (both vegetative and floral) divide also tangentially and thus originate the familiar double-laminate leaves that have been the subject of so many botanical studies.

Some authors, especially V e l e n o v s k ý, explain even opposite leaves and leaves in whorls as one leaf doubled or multiplied, that is, they hold that the joint of the axis bearing opposite leaves or a whorl of leaves in reality bears but one leaf, divided into parts entirely resembling whole leaves and also having buds in their axils. In my opinion, however, opposite and verticillate leaves are true and whole leaves. I do not consider their joint of the axis as divided, but as undivided and belonging to one of the leaves in the pair or whorl. The position of the other leaves may be explained by the shortening to zero of the joints of the axis belonging to them. We have many examples that demonstrate to us how the progressive shortening of the joints of the axis is to be observed in the position of alternate, decussate and verticillate leaves.

A frequent phenomenon is of course the division and especially the deduplication in the most various forms (collateral and serial, normal and abnormal, doubling and multiplication) in flowers, in the sepals and petals as well as in the reproductive leaves. Finally it must be emphasized that both division and deduplication may appear on a plant without any transitions to the normal form (suddenly) or accompanied by such transitions (gradually), which as a rule explain to us the origin of the deduplication. Of course there are phyllomes that are seemingly divided but in reality a result of the opposite process, that is, growing together. In some cases, however, it is very difficult to decide whether a form is an outcome of division or of growing together, because both processes are very frequent in the vegetable kingdom and may occur even combined together.

\* \* \*

Comparative morphology has the task of studying the laws governing the construction of the bodies of plants. The clear and exact definition of all the phenomena in question and the distinguishing of analogy from homology, which latter is often of no significance for the organograph, must be its foundation. In the foregoing short study I have endeavored to show that, as regards ramification and chorisis, morphology often contented itself with the same valuation and designation of phenomena essentially different, at most analogous but not by any means homologous.



It would also be possible to point out a number of principles that appear in the ramification of axes. L. Č e l a k o v s k ý already in the year 1876<sup>1)</sup> enunciated the so-called „law of reversed development in time and space“ („Gesetz der zeitlichräumlichen Verkehrung“), which he later discusses again in his work „New proofs of the sympodial construction of the axes of the Vitaceae“ (1883),<sup>2)</sup> and explains as the law „according to which the stronger of two parts formed at the end of any plant organ is always formed in the original direction of that organ (and earlier), while the weaker part is from the very beginning formed to one side (and later“).

It would be possible, however, to point out also other principles, for example the *principle of the corelation of ramification and the size of leaves* as well as the *corelation of ramification and the vagination of leaves*. That is, we observe that the axes of plants with large leaves usually are either unbranched or branched in only a small degree (for instance tree-ferns, palms, *Musa*, *Cycas*, in a certain measure even the *Araliaceae*, and others) and also that types with leaves that have prolonged cylindrical vaginae (like the *Gramineae*, *Cyperaceae*, *Zingiberaceae* and others) often show a tendency to restricted branching.

Rich material for the study of chorisis is contained, of course, in the morphology of flowers and also teratology in general; here we meet with the terms *pollaplasy*, *sphaerochorisis*, *pleiophylly*, *pleiotaxy*, *multiplication* and others, which also fall under the conception of chorisis.

Finally I would like to emphasize the fact that it was especially the *Czech authors* who contributed most to the right morphological valuation of the different types of ramification and particularly L a d. Č e l a k o v s k ý, who published very numerous works on the problem of ramification and also an exhaustive and noteworthy study on double leaves; likewise J o s. V e l e n o v s k ý devoted his attention mainly to the study of the vascular Cryptogams and later (Comparative Morphology) to all questions in connection with the subject, while K. K a v i n a (especially Sphagnales and Hepaticae), J. V i l h e l m (Charophyta), M. S e r v í t (Muscineae), J. P o d p ě r a and others were also active in this field.

<sup>1)</sup> L. Čelakovský, Ueber terminale Ausgliederungen, Sitzungsber. Kgl. Böhm. Ges. Wiss. 1875, p. 30.

<sup>2)</sup> Zprávy král. české společnosti nauk from the Year 1883.



# L'analyse de l'isotherme supérieure à la critique.

Par

AL. WANGLER.

Présenté le 9 mars 1923.

1. L'isotherme supérieure à la critique et non pas trop rapprochée de l'isotherme critique peut être bien énoncée par l'équation

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c \quad (1)$$

dans laquelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont les constantes convenablement déterminées pour chaque température à part.

Le but de ce travail est de faire l'analyse des isothermes d'une manière faisant possible de déterminer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  appartenant à chaque isotherme expérimentale et de trouver ainsi leur dépendance de la température. Rien n'y sera supposé d'avance, donc ni  $c = RT$ . Pour conserver la connexion avec l'état des gaz idéaux il est cependant avantageux de poser

$$c = R\tau,$$

où  $R$  désigne la constante absolue (déterminée par la choix des unités) de l'équation des gaz idéaux et  $\tau$  analogue à  $a$  et  $b$  une fonction, inconnue provisoirement, de la température.

Ecrivons puis l'équation (1) en forme de

$$p = R\tau \left( \frac{1}{v - b} - \frac{a}{Rb} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{b}{v^2} \right)$$

et définissons

$$\tau_B = \frac{a}{Rb}$$

de sorte que

$$p = R\tau \left( \frac{1}{v - b} - \frac{\tau_B}{\tau} \cdot \frac{b}{v^2} \right) \quad (2^a)$$



ou, si l'on choisit un arrangement convenable à exprimer les déclinaisons de l'état des gaz idéaux

$$p v = R \tau \left( \frac{v}{v - b} - \frac{\tau_B}{\tau} \frac{b}{v} \right). \quad (2^b)$$

Par la mise des constantes  $\tau_B$ ,  $b$ ,  $\tau$  au lieu de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , l'équation est devenue plus expressive physiquement. Il est évident que  $\tau_B$  et  $\tau$  ont la dimension de la température,  $b$  celle du volume. Si l'on conserve la forme homogène de l'équation (2<sup>b</sup>) même dans les expressions dérivées, leur signification se montre plus distinctement. Et si l'on trouve la dépendance de  $\tau_B$ ,  $b$ ,  $\tau$  de la température, celle-ci sera évidemment connue même pour  $a = R b \tau_B$  et  $c = R \tau$ .

2. Pour trouver tout d'abord, comment  $b$  dépend de la température, formons d'après (2<sup>a</sup>) et (2<sup>b</sup>)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} &= -R \tau \left[ \frac{1}{(v - b)^2} - 2 \frac{\tau_B}{\tau} \frac{b}{v^3} \right] \\ &= -\frac{R \tau}{(v - b)^2} \left[ 1 - 2 \frac{\tau_B}{\tau} \frac{b}{v} \left( 1 - \frac{b}{v} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial (p v)}{\partial v} &= -R \tau b \left[ \frac{1}{(v - b)^2} - \frac{\tau_B}{\tau} \frac{1}{v^2} \right] \\ &\quad - \frac{R \tau b}{(v - b)^2} \left[ 1 - \frac{\tau_B}{\tau} \left( 1 - \frac{b}{v} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

d'où résulte

$$\frac{\partial (p v)}{\partial p} = \frac{\frac{\partial (p v)}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}} = b \frac{1 - \frac{\tau_B}{\tau} \left( 1 - \frac{b}{v} \right)^2}{1 - \frac{\tau_B}{\tau} \cdot 2 \frac{b}{v} \left( 1 - \frac{b}{v} \right)^2}. \quad (5)$$

A  $v = 2 b$  la valeur appartenante de cette dérivée

$$\left[ \frac{\partial (p v)}{\partial v} \right]_{v=2b} = b \frac{1 - \frac{\tau_B}{4 \tau}}{1 - \frac{\tau_B}{4 \tau}} = b \quad (6)$$

et cela indépendamment, quelle fonction de la température est  $\tau_B$  et  $\tau$ . Be n'y que le cas

$$\tau = \frac{\tau_B}{4}, \quad (7)$$

qui exige une recherche particulière, que de faire, il sera possible plus tard quand  $\tau_B$  et  $\tau$  seront connus comme fonctions de la température.

D'après (6) il existe donc dans le diagramme  $p v - p$  sur l'isotherme un point, dans lequel

$$\frac{p v}{p} = v = 2 b = 2 \frac{\partial (p v)}{\partial p}.$$



Ce point que nous appellerons, pour la suite, brièvement le point „2“ et dont nous designerons les coordonnées par  $p_2$ ,  $v_2$ ,  $(p v)_2$ , on peut le trouver sur l'isotherme expérimentale et par cela même déterminer à chaque température le  $b$  appartenant.

Les équations (2<sup>a</sup>) et (2<sup>b</sup>) se réduisent quand on y pose  $v = 2 b$ , à

$$p_2 = \frac{R \tau}{b} \left( 1 - \frac{\tau_B}{4 \tau} \right) \quad (8)$$

$$(p v)_2 = 2 R \tau \left( 1 - \frac{\tau_B}{4 \tau} \right). \quad (9)$$

D'une façon bien connue, de l'équation (2<sup>b</sup>) nous déduisons\*) que

$$(p v)_1 = (p v)_{\min} = R \tau_B \left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} - 1 \right) \quad (10)$$

et l'appartenant

$$p_1 = \frac{R \tau_B}{b} \left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} - 1 \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} \right) \quad (10^b)$$

$$v_1 = \frac{(p v)_1}{p_1} = \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}}}. \quad (10^c)$$

Le rapport

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{\frac{\tau}{\tau_B} \left( 1 - \frac{\tau_B}{4 \tau} \right)}{\left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} - 1 \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} \right)} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\left( 4 \frac{\tau}{\tau_B} - 1 \right)}{\left( 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} - 1 \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} \right)} = \frac{1 + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}}}{4 \left( 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} \right)} \end{aligned}$$

et il est  $> 1$ , ou  $p_2 > p_1$ , si

$$1 + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} > 4 \left( 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} \right)$$

$$\text{e'. a. d.} \quad 6 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}} > 3$$

$$\frac{\tau}{\tau_B} > \frac{1}{4}, \quad \tau > \frac{\tau_B}{4}.$$

Mais pour  $\tau < \frac{\tau_B}{4}$ ,  $p_2$  aussi bien que  $(p v)_2$  est négatif, le point „2“ ne se trouve pas donc dans la partie correspondant à l'isotherme expérimentale et le cas  $\tau = \frac{\tau_B}{4}$  est de nouveau une condition (7).

\*) (Même pour les pages qui suivent): Rozpravy České Akademie. Roč. XXXII. Tř. II. Čís. 7 (1923).



Il faut donc chercher le point „2“ dans cette partie de l'isotherme, où  $p v$ , ayant dépassé le minimum croît à l'infini. Dans cette partie se trouve aussi le point d'inflexion (jusqu' auquel  $\frac{\partial p}{\partial v}$  croît étant positif).

La dérivée

$$\left[ \frac{\partial^2 (p v)}{\partial p^2} \right]_2 = \frac{\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 (p v)}{\partial v^2} - \frac{\partial (p v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}}{\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)^3} \quad (11)$$

$$= \frac{R}{2 p_2^2} \cdot \frac{\tau_B}{4} *)$$

étant positive ( $\tau_B = \frac{a}{R b}$  est l'essentiel positif), il est évident que le point „2“ est situé devant lui:

$$p_1 < p_2 < p_{\text{inflex.}}$$

Si l'on dresse d'après les mesures d'Amagat,<sup>1)</sup> un tableau des valeurs  $p v$ ,  $2 \frac{\Delta p v}{\Delta p}$  et  $\frac{p v}{p} = v$  pour  $\text{CO}_2$ , \*) on voit que dans cet intervalle de pression se trouve, en effet, le lieu, où

$$\frac{p v}{p} = 2 \frac{\partial (p v)}{\partial p},$$

et à l'aide de l'interpolation, nous déterminons\*) pour

$\text{CO}_2$ de	40° C	.....	$v_2 = 2 b = 0.00286-7$
	de 60° C	.....	= 286-7
	de 70° C	.....	= 284-5
	de 80° C	.....	= 286
	de 100° C	.....	= 286
	de 137° C	.....	= 287-8
	de 198° C	.....	= 287-8
pour $\text{C}_2\text{H}_4$ de	30° C	.....	$v_2 = 2 b = 0.00393$
	de 40° C	.....	= 394
	de 50° C	.....	= 395
	de 60° C	.....	= 393-4
	de 70° C	.....	= 396-7
	de 80° C	.....	= 396-7
	de 90° C	.....	= 397
	de 100° C	.....	= 398-9
	de 198.5° C	.....	= 399-400.

\*) L. c.

<sup>1)</sup> E. H. A m a g a t, Annal. Chim. et phys. (6) XXIX. p. 68, 1893.



Dans les limites de l'exactitude expérimentale et d'interpolation,  $2b$  est constant et cela

$$\text{pour } \text{CO}_2 \quad 2b = 0.00286 \pm 0.00002 \quad (< \frac{3}{4} \%)$$

$$\text{pour } \text{C}_2\text{H}_4 \quad 2b = 0.003965 \pm 0.000035 \quad (< 1\%)$$

De la même manière, nous trouvons

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \text{O}_2 \text{ de } 0^\circ \text{C} & 2b = 0.002245, \\ \text{de } 15.65^\circ \text{C} & = 224, \\ \text{de } 99.50^\circ \text{C} & = 220 \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad v_2 = 2b = 0.00222 \pm 1\%;$$

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \text{N}_2 \text{ de } 0^\circ \text{C} & 2b = 0.00271-2, \\ \text{de } 16.03^\circ \text{C} & = 2715, \\ \text{de } 99.45^\circ \text{C} & = 268-9 \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad v_2 = 2b = 0.00270 \pm \frac{3}{4}\%.$$

Quant à  $\text{H}_2$ , où les mesures ont été faites dans les intervalles de 100 atm. dévient  $2 \frac{\Delta p \cdot v}{\Delta p}$  irrégulièrement et c'est pourquoi les valeurs, qui resultent

$$\begin{array}{ll} \text{à } 0^\circ \text{C} & 2b = 0.00129 \\ \text{à } 15.4^\circ \text{C} & = 0.00123-129 \\ \text{à } 47.3^\circ \text{C} & = 0.00124 \end{array}$$

$$v_2 = 2b = 0.00126 \pm 0.00003$$

sont très imprécises et incertaines.

Prenant pour base les résultats expérimentaux d'Amagat, nous arrivons donc à cette conséquence:

$b$  dans l'équation (1) resp. (2) est indépendant de la température.

3. Des conditions connues du point critique  $\left(\frac{\partial p}{\partial v} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0\right)$  il résulte

$$v_c = 3b.$$

Le point „2“ trouvé sur l'isotherme arbitraire, il est possible de déterminer le volume critique ou la densité critique.

L'unité du volume fixée par Amagat, étant le volume réel de la matière dans des conditions normales, il'est

$$d_c : d_0 = 1 : v_c$$

$d_0$  désignant la densité normale,  $d_c$  la densité critique et  $v_c$  le volume critique dans unités d'Amagat, de sorte que

$$d_c = \frac{d_0}{v_c} = \frac{d_0}{3b} = \frac{2}{3} \frac{h_0}{v_2}$$



Si l'on pose au lieu de  $v_2$  les valeurs moyennes, déjà déterminées, on obtient pour  $CO_2$

$$d_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.0019768^1)}{0.00286} = 0.461,$$

Amagat<sup>2)</sup> indique  $d_c = 0.464$ ;  
pour  $C_2H_4$

$$d_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.001252^1)}{0.003965} = 0.210,$$

Cailletet et Mathias<sup>3)</sup> indique  $d_c = 0.21$ ;  
pour  $O_2$

$$d_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.0014296^1)}{0.00222} = 0.429,$$

Kamerlingh Onnes<sup>3)</sup> indique  $d_c = 0.4299$ ;  
pour  $N_2$

$$d_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.0012514^1)}{0.00270} = 0.309,$$

Dewar<sup>3)</sup> indique  $d_c = 0.3269$

Happel<sup>3)</sup> indique  $d_c = 0.315$

Kamerlingh Onnes<sup>5)</sup> indique  $d_c = 0.311$ ;  
pour  $H_2$

$$d_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{0.00008987}{0.00126} = 0.047,$$

Dewar<sup>3)</sup> indique  $d_c = 0.033$

Kamerlingh Onnes<sup>4)</sup> indique  $d_c = 0.0310$ .

L'accord avec la mesure directe est parfait, excepté l'hydrogène où ne pourrait déterminer qu'avec trop peu d'approximation le point „2“.

Il faut faire remarquer que les mesures, suivant lesquels la densité critique a été déterminée à l'aide de la méthode du point „2“, ont été pratiquées dans des intervalles considérablement amples (25 à 50 atm., pour  $H_2$  100 atm.). Si aux environs du point „2“, l'isotherme était fixé avec plus de détail, il serait possible, à l'aide de cette méthode-ci, de déterminer  $d_c$  bien précisément, quand même le point „2“ serait, quant à la pression ainsi qu'à la température, bien éloigné du point critique.

Ensuite il serait possible de déterminer  $\tau_B$  d'après (11).

<sup>1)</sup> Landolt-Börnstein: Physikal.-Chem. Tabellen, IV. ed. 1912. Tab. No. 63a.

<sup>2)</sup> L. c.

<sup>3)</sup> Landolt-Börnstein: Tab. No. 129.

<sup>4)</sup> Kamerlingh Onnes: Verslagen der Afdeeling Natuurh. D. XXVI. p. 124, 1917/18.

<sup>5)</sup> Kamerlingh Onnes et Dorsman: Leiden Comm. 145b.



4. On peut trouver la dépendance de  $\tau_B$  et  $\tau$  de la température d'après l'équation (8)

$$p_2 = \frac{R\tau}{b} \left( 1 - \frac{\tau_B}{4\tau} \right)$$

ou

$$\frac{\tau_B}{4} = \tau - \frac{p_2 b}{R}, \quad (12)$$

dans laquelle  $p_2$  désigne les coordonnées des points, où, dans le diagramme  $p - v$ , la droite  $v = 2b$  coupe les isothermes. Parce que cette équation contient les deux constantes il faut, pour les déterminer, prendre encore un autre point caractéristique de l'isotherme, savoir un point, dans lequel  $p v$  a une valeur minimale. Nous l'appellerons brièvement le point „1“ et nous désignerons ses coordonnées par l'index „1“. D'après (10<sup>c</sup>) est

$$v_1 = \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}}} \quad \text{ou} \quad \tau_B = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2}. \quad (13)$$

En éliminant  $\tau$  de (12) et (13) nous obtenons

$$\frac{\tau_B}{4} = \frac{p_2 b}{R} \cdot \frac{1}{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2 - 1} \quad (14)$$

comme la valeur que  $\frac{\tau_B}{4}$  doit avoir pour que l'équation (2<sup>a, b</sup>) corresponde, à l'expérience dans les points „1“ et „2“.

Si l'on se sert des valeurs d'Amagat  $(p v)_1$  et  $p_1$ <sup>1)</sup>  $\left(v_1 = \frac{(p v)_1}{p_1}\right)$ , on obtient pour  $\frac{\tau_B}{4}$  des résultats<sup>2)</sup> (arrangés au tableau № 1), qui balancent inégalement dans limites étroites.

Tableau № 1.

$t$	CO <sub>2</sub>		C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>		$T$
	$\frac{\tau_B}{4}$	$\tau$	$\frac{\tau_B}{4}$	$\tau$	
30° C	.	.	228.1	283.8	303 <sup>0</sup>
40° C	.	.	215.7	284.4	313
50° C	.	.	209.7	290.9	323
60° C	211.7	280.9	208.4	303.1	333
70° C	205.4	289.0	217.8	325.5	343
80° C	206.3	303.3	206.2	326.3	353
90° C	211.9	322.7	203.5	336.5	363
100° C	210.7	335.6	204.9	351.0	373
137° C	210.1	385.2	215	410	410
198° C	201?	459.7	207	480?	471

<sup>1)</sup> L. c. Tableau No. 19.

<sup>2)</sup> Les dates détaillées voir: Rozpravy České Akademie, r. XXXII., č. 7.(1923).



Pour porter un jugement sur les déclinaisons, il faut prendre en considération que l'exactitude, avec laquelle  $p_1$  est déterminée, n'est pas grande (les faits d'Amagat de 1893<sup>1)</sup> différent jusqu'à de 5% de ceux de 1881<sup>2)</sup> et que la formule (14) pour les températures plus rapprochées de la critique devient sans cesse de plus en plus sensible (les points „1“ et „2“ s'approchent l'un de l'autre et

$$\lim_{v_1 \rightarrow b} \frac{\delta \frac{\tau_B}{4}}{\delta v_1} = \frac{p_2 b}{R} \cdot \frac{8 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right) \frac{b}{v_1^2}}{\left[4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2 - 1\right]^2} = \infty$$

P. ex. pour  $C_2H_4$  de 30°  $v_1 = 0.00448$  et  $\frac{\tau_B}{4}$  (y appartenant) = 228. Si l'on suppose  $v_1 = 0.00453$ , donc plus grand de 1% environ, l'appartenant  $\frac{\tau_B}{4} = 205$ , donc plus petit de 10% environ. La première de valeurs est beaucoup plus grand, la seconde déjà beaucoup plus petite que la valeur moyenne.

Pour températures encore inférieures que celles pour lesquelles le tableau est réalisé, la formule (14) est inapplicable quant à la pratique.

*Vu cela, il faut aussi  $\frac{\tau_B}{4}$  tenir pour indépendant de la température.*

5. Si l'on élimine de (12) et (13)  $\frac{\tau_B}{4}$ , on obtient

$$\tau = \frac{p_2 b}{R} + \frac{\tau_B}{4} = \frac{p_2 b}{R} \frac{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2}{4 \left(1 - \frac{b}{v_1^2}\right)^2 - 1}. \quad (15)$$

Le tableau №. 1 contient même ces valeurs. Il se montre que  $\tau$  n'est pas égal à la température absolue. Pour les températures supérieures, la différence de  $T - \tau$  est petite, mais avec la température baissante elle croît. Si nous nommons  $\tau$ , énuméré pour chaque température suivant la formule (15), la température individuelle, on peut le résultat total de l'analyse énoncer ainsi:

*„L'équation de van der Waals,  $b$  et  $\tau_B$  (resp.  $a$ ) étant constants, saisit, dans le domaine surcritique, l'expérience, si nous y remplaçons la température absolue par la température individuelle.*

Il est évident que  $\tau_B$  désigne la température individuelle de Boyele. Car, d'après (10<sup>e</sup>)

$$\lim_{\tau = \tau_B} v_1 = \lim_{\tau = \tau_B} \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{\tau}{\tau_B}}} = \infty$$

<sup>1)</sup> L. c. tableau No 19.

<sup>2)</sup> Amagat, Ann. chim. phys. (5) 22, p. 353, 1881.



après (5)

$$\lim_{\substack{v = \infty \\ \tau = \tau_B}} \frac{\partial (p v)}{\partial p} = 0.$$

Pour températures supérieures que celle de Boyle, la formule (15) n'a pas de bon.

5. Si l'on pose  $\tau_B$  d'après (14) et  $\tau$  d'après (15) dans (2<sup>a</sup>) et (2<sup>b</sup>), on obtient

$$p = p_2 b \frac{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2}{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2 - 1} \left[ \frac{1}{v - b} - \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2} \frac{b}{v_2} \right] \quad (16^a)$$

$$p v = p_2 b \frac{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2}{4 \left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2 - 1} \left[ \frac{v}{v - b} - \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{v_1}\right)^2} \cdot \frac{b}{v} \right] \quad (16^b)$$

comme équation de l'isotherme du 3<sup>e</sup> degré, construite de façon qu'au domaine des points „1“ et „2“, elle soit d'accord avec l'expérience.

6. Pour les isothermes trop rapprochées de la critique,  $v_2$  n'est pas constant, comme les résultats pour l'isopentan le font voir d'après la mesure de Young:<sup>1)</sup>

A	176°	$v_2 = 2 b = 2.703 \text{ cm}^3$	2)
	180°	= 2.737	„
	183°	= 2.752	„
	185°	= 2.765	„
	187.8° ( $T_c$ )	= 2.775	„
	190°	= 2.773	„
	195°	= 2.790	„
	200°	= 2.780	„
	205°	= 2.815	„
	210°	= 2.844	„
		$2 \cdot \frac{v_c}{3} = 2.844$	„

$v_2$  croît d'abord jusqu'à une certaine température, d'où il reste constant. Cette température marque évidemment la limite de température des environs du point critique, dans lequel la fonction dérangeante (troublante) d'après Kamerlingh Onnes et W. H. Keesom<sup>3)</sup> cause une déformation des isothermes. Au dessus de cette limite l'équation (2) est une équation de l'état,  $b$  et  $\tau_B$  étant constants. Au dessous d'elle, cette équation n'a que

1) S. Young, Zeitschrift phys. Chem. 29, p. 193 (1899).

2) L'énumération voir\*).

3) Die Zustandsgleichung. Comm. Leiden Vol. XI. Suppl. No. 23. § 50<sup>b</sup>



signification d'une équation non interrompue. Mais il est possible de démenter qu'elle détermine un déplacement du point critique de l'équation non interrompue vers le point critique véritable quantitativement également que Kamerlingh Onnes et T. C. Jolles<sup>1)</sup> ont trouvé d'après l'équation de 25 constantes individuelles.

Des conditions connues pour le point critique  $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$ , il résulte d'après (2<sup>a</sup>)

$$\tau_B = \frac{27}{8} \tau_c', \quad \frac{R \tau_c'}{p_c' v_c'} = \frac{8}{3} \quad (17)$$

et donc

$$\tau_B = \frac{9 p_c' v_c'}{R},$$

( $p_c'$ ,  $v_c'$ ,  $\tau_c'$  désigne les coordonnées du point critique de l'équation non interrompue). Quand on pose

$$p_c' = 1.06566 \cdot p_c, \quad v_c' = 1.0379 v_c,$$

comme les auteurs mentionnés ont trouvé ( $p_c$ ,  $v_c$ ,  $T_c$  les coordonnées du point critique véritable) et si l'on pose

$$\frac{RT}{p_c v_c} = 3.60 = s, \quad ^2)$$

on obtiendra pour CO<sub>2</sub>

$$\tau_B = \frac{9}{s} \times 1.0379 \times 1.06566 T_c = 840,$$

$$\frac{\tau_B}{4} = 210,$$

ce qui est la valeur la plus vraisemblable d'après le tableau 1.

Au contraire, les équations (17) déterminent

$$\tau_k' = \frac{8}{27} \tau_B = \frac{8}{3} \frac{p_c' v_c'}{R} = 248.9$$

comme température critique non interrompue<sup>3)</sup> mais individuelle, appartenant à la température critique non interrompue mais absolue

$$T_c' = T_c \cdot 1.01595^4) = 307.3.$$

7. Pour que l'équation (2<sup>a, b</sup>) soit une équation de l'état, il faut encore exprimer analytiquement la dépendance entre  $\tau$  et  $T$ . Il se montre (voir fig.)

<sup>1)</sup> Leiden Comm. suppl. No. 14 p. 5.

<sup>2)</sup> J. P. K u e n e n: Die Eigenschaften der Gase, 1919, p. 234.

<sup>3)</sup> = appartenant à point critique de l'équation non interrompue.

<sup>4)</sup> K a m e r l i n g h O n n e s et T. C. J o l l e s, Leiden Comm. Suppl. No. 14 p. 5.



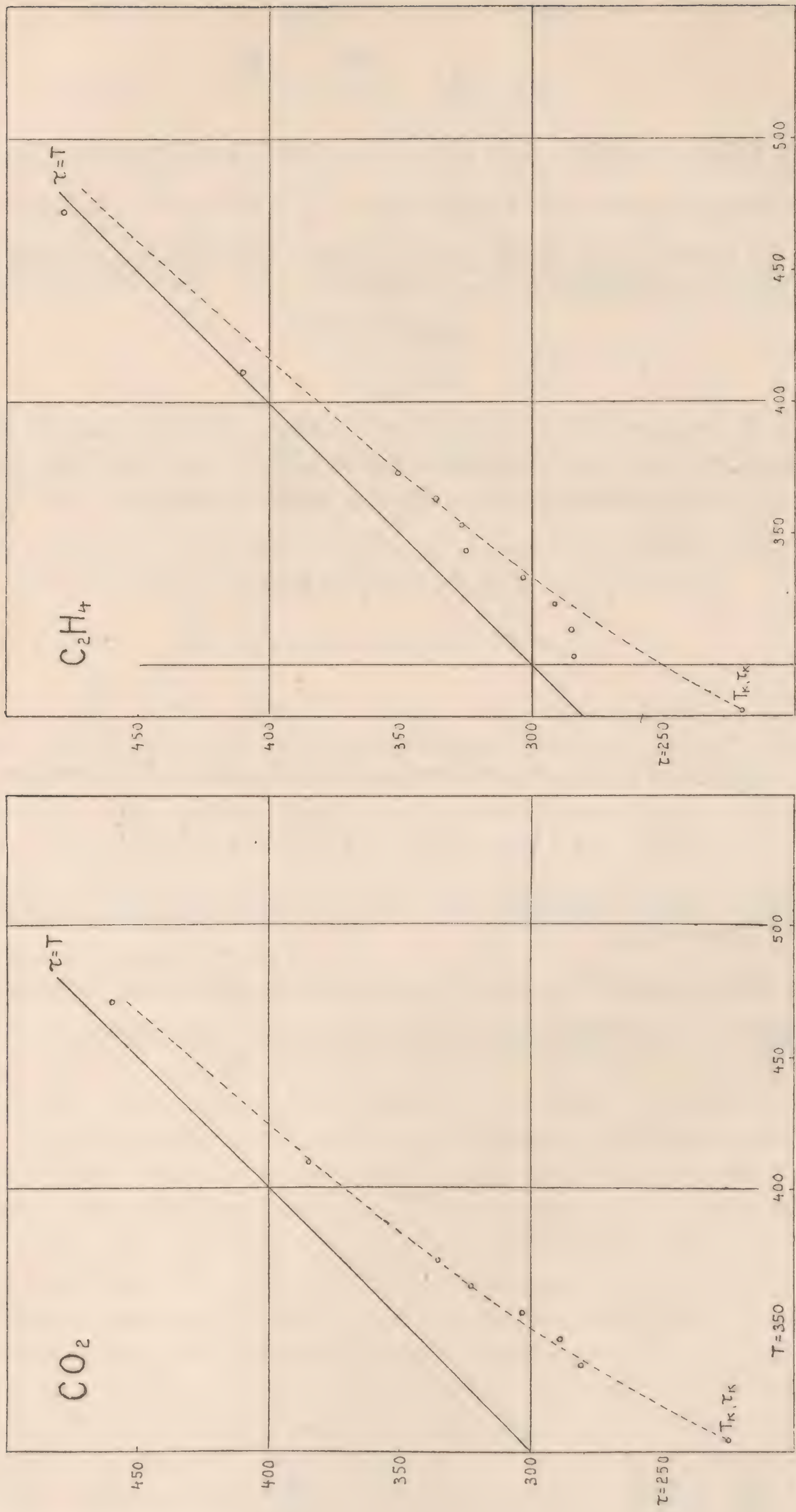


Fig. 1.



que les points des coordonnées  $T$ ,  $\tau$  (appartenant l'une à l'autre d'après le tableau N° 1) sont situés dans le voisinage de la courbe

$$\tau = T \left( 1 - \frac{K^2}{T^2} \right) \cdot e^{\frac{k^2}{T^2}}, \quad (18)$$

où pour  $\text{CO}_2$   $K = 233.2$ , pour  $\text{C}_2\text{H}_4$   $K = 209.7$ .  $\tau$  déclinent de la courbe dans la même direction que l'appartenant  $\frac{\tau_B}{4}$  décline de la valeur constante. Le constante  $K$  de la fonction a été déterminée de façon que  $\tau_c$  appartenant à  $T_c$  satisfît à l'équation

$$\frac{R \tau_c}{p_e v_c} = s.$$

U. B. Boyton et Artur Bramley<sup>1)</sup> ayant pris pour base la formule de Compton<sup>2)</sup> pour la dépendance des chaleurs spécifique des matières solides de la température, sont arrivés à cette modification de l'équation de van der Waals

$$\begin{aligned} \left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) &= R \frac{T}{1 + \frac{\psi^2}{T^2}} \\ &= R T \left( 1 - \frac{\psi^2}{T^2} \dots \right). \end{aligned} \quad (19)$$

L'équation (1) en combinaison avec (18) amène à l'équation

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R T \left( 1 - \frac{K^2}{T^2} \right) \cdot e^{\frac{k^2}{T^2}}. \quad (20)$$

(19) et (20) ne diffèrent que dans les termes, que l'on peut négliger pour le  $T$  plus grand.

8. Du tableau N° 1, de (17) et même de (18) il est évident que  $\tau$  n'est égal à  $\frac{\tau_B}{4}$  qu'à une température inférieure à la critique.

<sup>1)</sup> The Physical Review (2) XX. No. 1. (1922).

<sup>2)</sup> The Physical Review (2) VI. p. 337 (1915).



# De l'origine de la substance élastique dans le cartilage.

Par

MUDr. JAN WOLF,

assistant de l'institut de l'histologie et de l'embryologie.

Travail de l'institut de l'histologie et de l'embryologie de la Faculté de médecine de l'université Charles à Prague. Chef prof. Dr. O. Srdínko.

Présenté le 25 mai 1923.

Pour l'étude de l'origine de la substance élastique dans le cartilage convient le mieux le cartilage aryténoïde à cause de sa transition de la partie élastique en partie hyaline. Cette transition se marque surtout chez le cheval et le boeuf par une richesse morphologique des éléments élastiques ainsi que par une présence considérable d'albumoïde formant la transition à la substance élastique. Par conséquence on s'est servi pour la dite étude du cartilage de cheval et de boeuf.

Parcourant dans la pensée le plan en gros de la transition élastique de l'apophyse vocale dans le corps hyalin de ce cartilage, nous obtenons le tableau suivant: aux filaments énormément forts de la corde vocale inf. suit la zone, dans la quelle ces filaments se croisent avec ceux du péri-chondre; la couche suivante contient des filaments forts parcourant en toutes directions. La zone suivante est caractérisée par des formations irrégulières, composées des filaments élastiques fins liés à la manière du feutre et situés çà et là dans les espaces interterritoriels. Dans les zones suivantes les fibres élastiques plus fortes diminuent très vite; mais au lieu de celles-ci une autre formation de la substance élastique fait apparition en nombre frappant; ce sont les capsules élastiques autour des cellules, et des grains libres plus ou moins grands dans la substance intercellulaire. Des capsules élastiques ne se montrent alors que dans les zones pauvres de filaments; de même le perichondre en est dépourvu. Une fois elles se présentent comme des anneaux à peine visibles, une autre fois on les trouve comme des cercles épais entourant les cellules. Elles peuvent être



même incomplètes ou doubles, plus ou moins bien contourées. Elles sont composées de grains qui tous, sont caractérisés par une tendance plus ou moins marquée de se ramifier en forme d'étoile. Il en est ainsi chez les grains dispersés librement dans la substance intercellulaire. Ils se trouvent pour la plupart dans les espaces interterritoriaux en groupes et diffèrent considérablement par leur grandeur l'un de l'autre; dès plus petits à peine visibles, jusqu'aux plus grands presque d'une forme floconneuse, qui nous rappellent pour ainsi dire des précipités. La ramification des grains y possède les mêmes formes comme ceux dans les capsules, voir une forme arborescente, mousseuse stellaire; en quelques lieux nous sommes même embarrassés s'il s'agit encore du grain ramifié ou déjà d'un filament. Toutes ces formes montrent des transitions innombrables.

Les fibres élastiques sont très rares dans le corps du cartilage, où il s'agit des fibres fines de traits caractéristiques, c'est à dire la plupart en est couverte de toutes formes des grains élastiques, surtout en forme d'étoile, dont on a parlé plus haut. Vers l'apophyse vocale ces fibres diminuent en nombre (de même que les grains élastiques libres, et ceux qui forment les capsules), tandis que les fibres lisses typiques augmentent en nombre.

Quant à l'albumoïde, que Hansen considère pour la matière originaire de la substance élastique, il y a des relations suivantes.

L'albumoïde est représenté dans le cartilage aryténoïde du cheval d'une part en forme diffuse, comme dissolu dans la substance intercellulaire, de l'autre part en formes de grains et de filaments.

L'albumoïde formé a tantôt la forme des grains qui montrent une tendance vers la ramification décrite ci-dessus quand même faible, et qui forment dans le corps du cartilage des grands espaces noir au cours de coloration spécifique;\*) tantôt il se compose de grains, qui par leurs qualités morphologiques et tinctoriales et pendant la digestion se rapprochent des formes analogues d'élastine. Le rapport mentionné entre les grains et les filaments élastiques se manifeste aussi chez l'albumoïde. De l'autre côté il s'agit des grains d'albumoïde produisant des capsules incomplètes d'albumoïde autour des cellules dans l'apophyse vocale; ceux-ci n'ont point de rapport aux fibres élastiques, qui forment justement dans ces lieux à la surface des cellules (avec leurs capsules) des formations typiques en corbeille à la manière des dendrites. Ils ne montrent non plus.

---

\*) Pour distinguer l'albumoïde d'élastine on se servait des reactions suivantes: le fuchsine de Weigert et orcéine teint l'élastine, tandis que l'albumoïde reste incolore (ent tout qu'on ne pousse pas la coloration trop loin). La méthode du contact (v. Wolf: O tinkčnách schopnostech elastické chrupavky v kontaktním barvení lístkovým, Biol. listy, roč. 1923, seš. 1.) à l'hématoxyline teint l'élastine ainsi que l'albumoïde en noir bleuâtre intense sans teindre la chondromukoïde et le collagène mais si l'on digère la substance élastique dans la coupe par la trypsine, on reçoit par la méthode de contact des images surprenantes qui démontrent bien la participation de l'albumoïde dans la construction du cartilage.



des tendances vers la ramification, en rapellant plutôt les formes des coques.

Des boules d'albumoïde enfin dans les cellules, event. les cavités cellulaires remplies complètement des masses d'albumoïde accomplissent le tableau de la différenciation de cette substance. Les filaments du caractère d'albumoïde très fins, forment çà et là des reticules denses et sont quelque fois dans le rapport analogue aux grains d'albumoïde comme il en est de même chez l'élastine.

Au fond de l'étude du caractère morphologique des éléments élastiques dans le cartilage aryténoïde, de même que de l'étude de leurs rapports topographiques en relation de fonction, nous pouvons constater quelques faits bien importants. D'abord il faut accentuer la ressemblance frappante de quelques grains élastiques avec des précipités artificiels. Un autre fait non moins important est la transition continuelle de ces précipités typiques aux grains, chez les quels la ramification commence à prédominer et puis le passage continu de ceux-ci vers les filaments qui portent évent, dans leur parcours ininterrompu des formations plus ou moins filamenteuses, de forme stellaire. Le fait troisième très important est le comportement des fibres élastiques d'un côté et des grains de l'autre côté, quant aux relations topographiques. D'autant plus les fibres élastiques deviennent plus nombreuses et plus épaisses, d'autant plus des grains élastiques diminuent en nombre (vers l'apophyse vocale), et *vice versa*, naturellement jusqu'à une certaine limite. Enfin la différenciation morphologique, la ressemblance chimique et les formes des transitions des deux substances montrent une origine analogue de toutes les deux. On peut alors juger du mode de la formation de l'albumoïde à celui de l'élastine, qui lui est certainement analogue.

De ces faits on peut s'exprimer au caractère principal de la formation de la substance élastique. Nous supposons que la substance élastique se trouve dans la substance fondamentale du cartilage en état liquide et dilué; cette substance produite par les cellules, en infiltrant la substance intercellulaire toute entière, fournit à celle-ci des matériaux pour la construction de la substance élastique formée. C'est aussi des influences mécaniques spécifiques que dépend leur forme, leur quantité et leur direction. C'est le cartilage aryténoïde qui nous donne une preuve classique de cette conception par sa transition de la partie élastique dans la partie hyaline. Dans ces parties, qui sont spécifiquement fatiguées et alors forcées à former des fibres élastiques, celles-ci se forment de la matière qu'elles ont à leur disposition, c'est à dire de la substance élastique, qui pénètre la substance fondamentale et qui est usée complètement pour la construction des fibres (la partie périphérique de l'apophyse vocale). Aussitôt que nous arrivons dans la zone transitoire à des parties où le cartilage n'est plus fatiguées si fortement et alors non plus obligé à une formation des fibres si intense, nous y trouvons déjà aussi la deuxième forme de la substance élastique —



c'est à dire — des grains étoilés soit en modification floconneuse, ramifiée ou mousseuse, comme une manifestation d'une précipitation de la substance superflue, que les influences formatives mécaniques ne sont plus capables de transformer en fibres. Cette hypothèse est confirmée par toute une série des formations transitoires passant des précipités floconneux par les ramifiés jusqu'aux formations en présence des quelles on ne peut bien décider, s'il faut les prendre encore pour des grains floconneux ou bien déjà pour des filaments; enfin jusqu'aux fibres d'étoiles ou bien aux fibres élastiques typiques.

En déterminant la source de la substance élastique nous devons accentuer quatre points de la description supérieure. Ce sont des capsules élastiques des cellules qui montrent la source ou même directement le centre de la production de la substance élastique — la cellule proprement dite. Dans le même sens nous apprécions les filaments élastiques en forme de corbeille et de dendrites parcourant à la surface de la cellule (avec sa capsule). Le troisième moment soutenant l'hypothèse que la cellule soit la source de la substance élastique, est la découverte des boules élastiques dans le centre des formations cellulaires, qui se trouvent dans des lieux du cartilage riches en substance élastique, soit qu'il s'agit de l'action vitale d'une surproduction de la substance élastique, de sorte que le colorant la prouve dans la cellule même, ou plutôt qu'il s'agit d'une certaine forme la dégénération élastique. Enfin il faut mentionner l'analogie si proche de l'origine de la substance élastique à celle d'albumoïde dont la production par la cellule ne peut être contestée, si l'on voit des cellules entières transformées en des masses albumoïdes.

Quant à la question de la formation des fibres élastiques proprement dites, c'est à dire si elles se forment au dépens des grains rangés en chapelet ou tout de suite comme des formations fibrillaires notre observation nous force à nous décider pour la deuxième éventualité. Car, voyant d'un côté des fibres les plus fines se former sans le stade précédant des grains (dans l'apophyse vocale) et de l'autre côté (vers le corps du cartilage) des filaments couverts de formations étoilées et floconneuses, nous ne voyons pourtant jamais et nul part une integration des formations étoilées isolées.

En comparant enfin la proportion de la substance élastique à l'albumoïde nous trouvons une parenté frappante de ces deux substances quant dans le sens morphologique tant dans le sens chimique (coloration, digestion) qui se montre dans la transition continue d'une substance en l'autre. Néanmoins il n'en suit point que la substance élastique prenne l'origine de l'albumoïde ou contrairement. Des deux éventualités tantôt que l'albumoïde est la matière fondamentale d'élastine ou à l'envers, tantôt que toute une quantité des matières définitives est produite par les cellules à la fois et à cause de cette fabrication commune montrent les caractères transitoires décrits ci-dessus, nous nous décidons pour la seconde hypothèse. Dans la zone par ex., où il y a autour des cellules des corbeilles des fibres



élastiques lisses se trouvent entre celles-ci des masses de petits grains du caractère albumoïde sans la moindre trace d'une ramification ou de continuité avec des fibres, ce qu'il se faudrait trouver si l'élastine se formait aux dépens d'albumoïde. De même la disproportion entre l'albumoïde et la substance élastique dans le cartilage de différents animaux à l'âge différent conteste l'origine de l'élastine aux dépens de l'albumoïde.

Si la parenté et ces transitions sont incontestables, il n'en suit pas qu'une matière servirait à l'origine de l'autre, mais qu'en même temps toute une série des substances semblables est produite par les cellules dans le cartilage élastique substances, dont chacune se précipite de sa manière propre typique en passant de l'état liquide en état compact.

Alors le balancement entre la forme du type floconneux ou granuleux et du type filamenteux resp. de la fibre proprement dite dépend non seulement de la qualité de la substance de telle ou telle série, mais aussi bien de l'influence formative de la fonction spécifique.

Eh bien la substance élastique du cartilage ne nous semble pas du matériel de construction particulier, tout à fait nouveau, qui ne paraîtrait que dans le cartilage élastique, mais elle nous représente une des formes spéciales d'albumoïde, un membre le plus éloigné des représentants de la série continue de sa famille.



## Explication des figures.

### I.

1. Le centre du corps du cartilage arytaenoïde du cheval. Les capsules élastiques des cellules. L'orcéine.

*a)* deux cellules-soeurs avec des anneaux peu développées.

*b)* une cellule avec l'anneau plus développé.

*c)* une cellule avec l'anneau élastique très épais.

*d)* une cellule avec l'anneau élastique mal contouré.

*e)* une cellule avec l'anneau élastique bien contouré.

*f)* une cellule avec l'anneau élastique incomplet.

*g)* une cellule avec l'anneau élastique secondaire incomplet.

*h)* débris granulaire au lieu d'une cellule.

2. Une cellule avec les granulations élastiques typiques. La même préparation.

3. Une cellule avec les granules élastiques peu développées. La même préparation.

4., 5., 6. Des cellules avec leurs anneaux de granulations élastiques en formes diverses. Ces granulations sont dans la fig. 4 peu, dans la fig. 5 plus, dans la fig. 6 éfilées. La même préparation.

7. Une cellule avec une capsule élastique très développée. La même préparation.

8. Des granulations d'albumoïde „en forme de cocque“, formant un anneau autour de la cellule. L'apophyse vocale du cartilage arytaenoïde du cheval. Méthode du contact à l'hématoxyline.

9., 10., 11. Les cellules de l'apophyse vocale du cartilage arytaenoïde du cheval avec des fibres élastiques parcourant au-dessous des capsules cellulaires. L'orcéine.

12. Une cellule de l'apophyse vocale du cartilage arytaenoïde du boeuf avec des boules élastiques dans son corps.

### II.

1. Une grande boule élastique dans le corps du cartilage arytaenoïde du cheval, composée. L'orcéine.

2. Des petites boules élastiques de la même préparation.

3. Des formations élastiques fibrillaires et étoilées de la même préparation.

4. Une forme curieuse des graines élastiques rangées en formations sinueuses.

5. Des graines et des boules élastiques dans le corps du cartilage arytaenoïde du boeuf. *a)* formes mousseuses, *b)* formes arrondies, en goutte, mais avec les parties périphériques étoilées. L'orcéine.

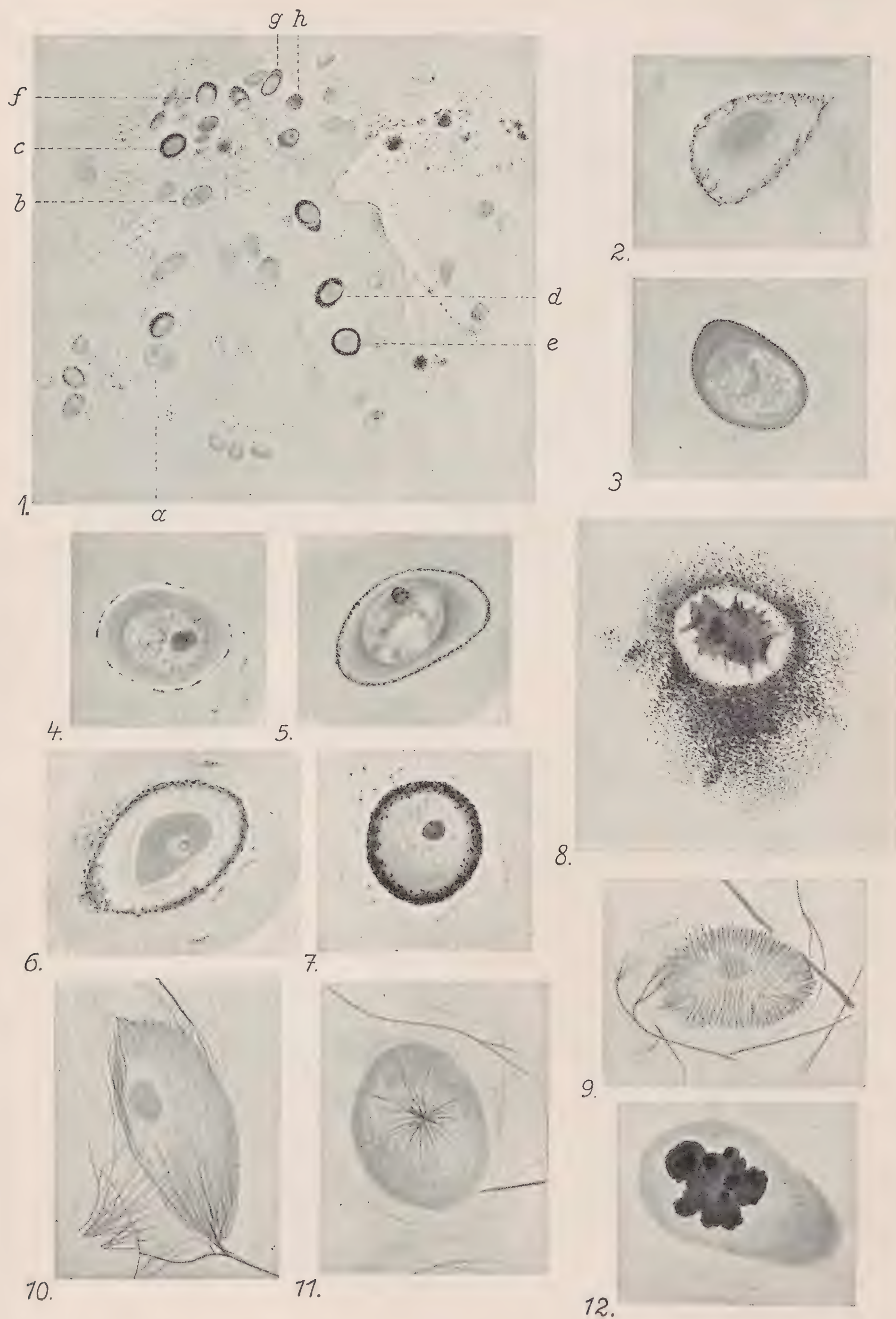
6. Des fines fibres élastiques dans le corps du cartilage arytaenoïde du cheval avec des granulations mousseuses, arborescentes, étoilées. L'orcéine.

7. Deux types diverses des fibres élastiques du même cartilage. *a)* la fibrille sort d'un grain étoilé, *b)* une forme transitoire entre un grain étoilé et une fibre.



MUDr. JAN WOLF:  
De l'origine de la substance élastique dans le cartilage.

Table I.





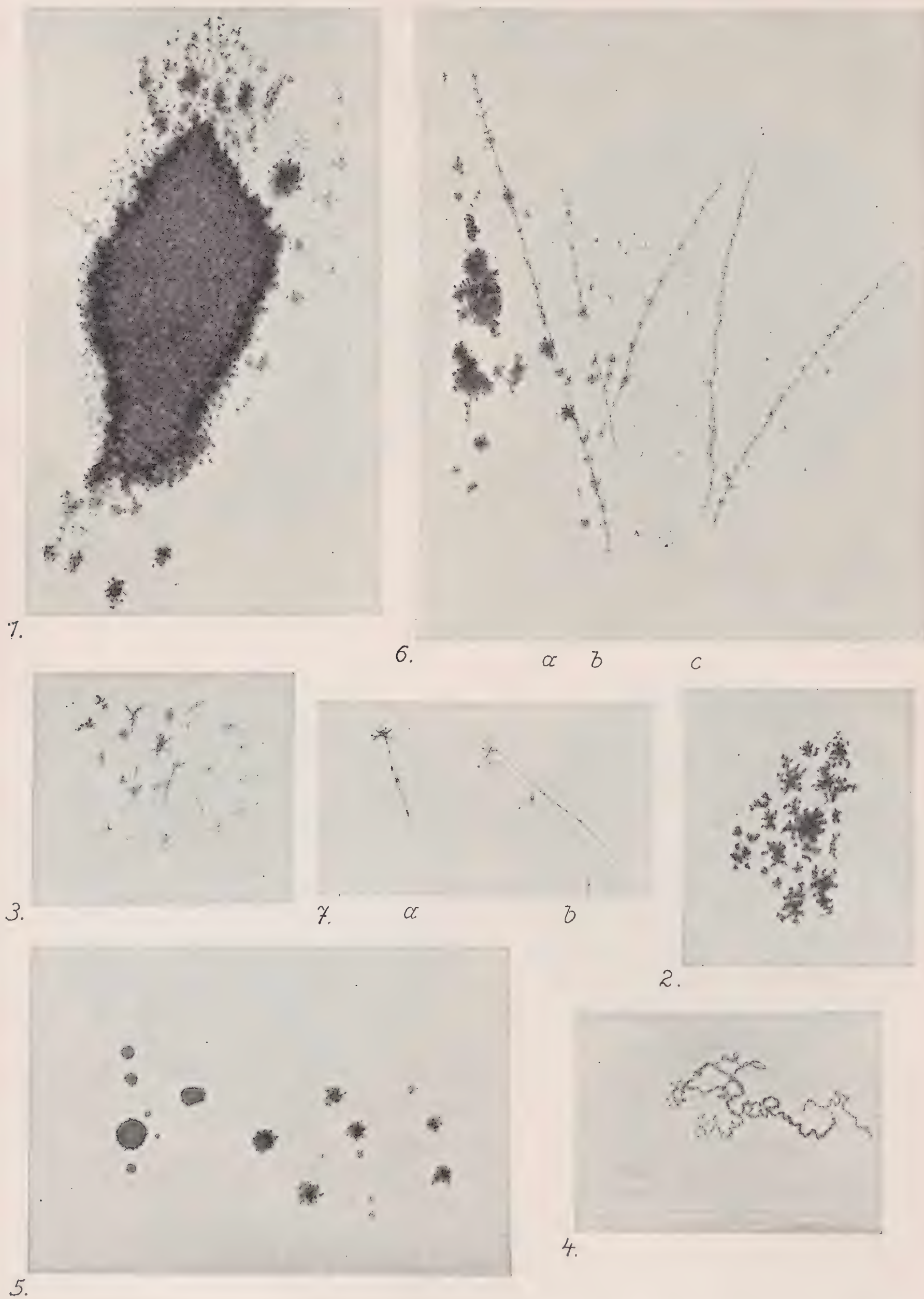




MUDr. JAN WOLF:

De l'origine de la substance élastique dans le cartilage.

Table II.





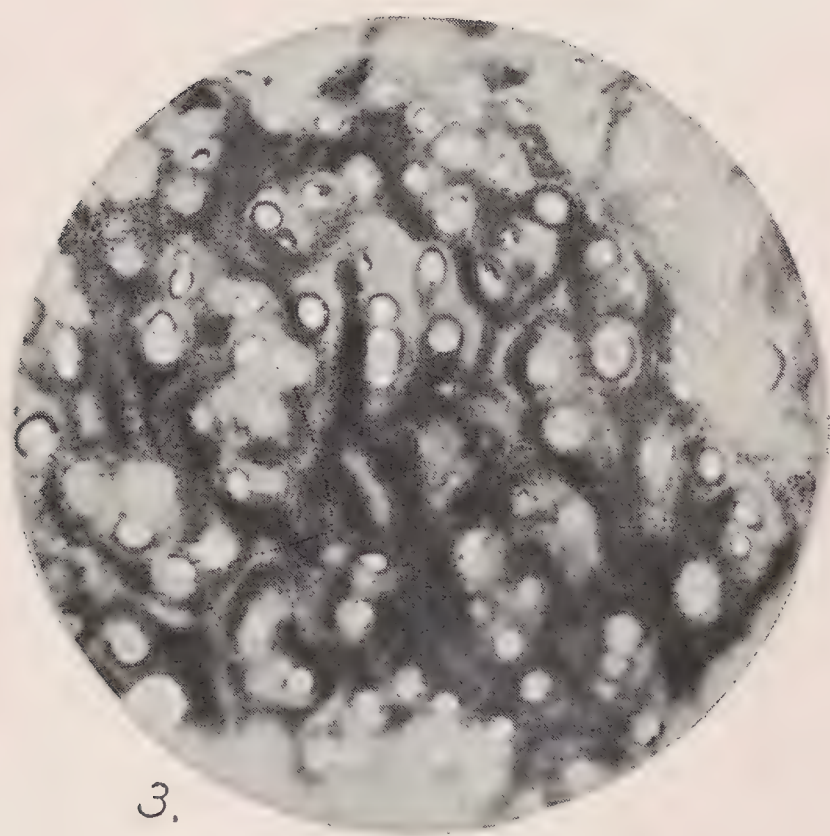
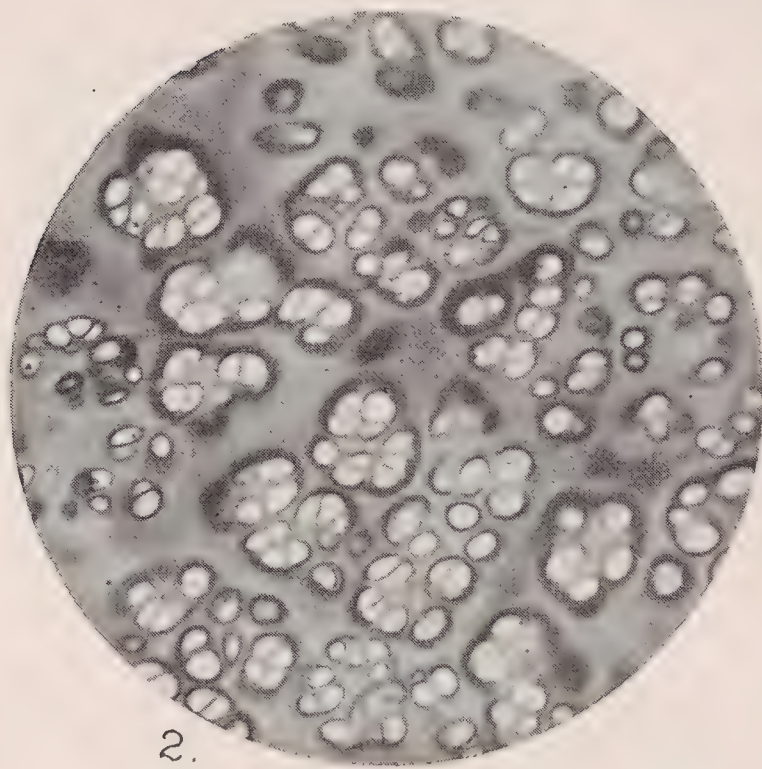
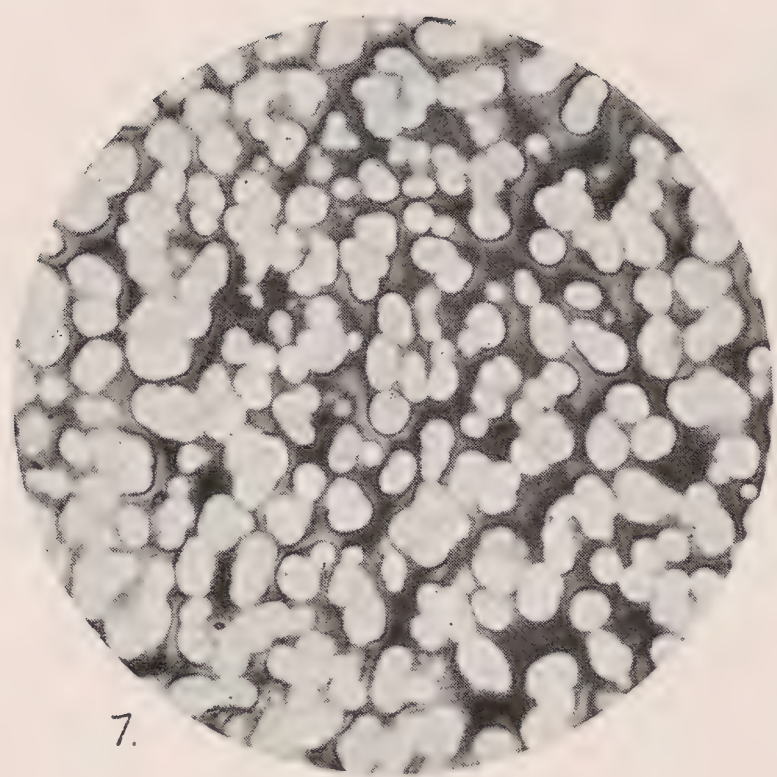




MUDr. JAN WOLF:

De l'origine de la substance élastique dans le cartilage.

Table III.









## III.

1. D'albumoïde diffus dans les espaces interterritoriaux du cartilage arytaénoïde du cheval. Méthode de contact, digestion à trypsine.
  2. Les capsules d'albumoïde autour des groupes cellulaires du même cartilage. Même méthode.
  3. Des masses énormes des grains d'albumoïde dans le même cartilage.
  4. Des masses d'albumoïde remplissant les cellules du même cartilage. Même méthode.
-



# Contribution à la connaissance des canaux vasculaires dans le cartilage.

Par

MUDr. JAN WOLF,

assistant de l'institut de l'histologie et de l'embryologie.

Travail de l'institut de l'histologie et de l'embryologie de la Faculté de médecine de l'Université Charles à Prague. Chef prof. Dr. O. Srdínko.

Présenté le 8 juin 1923.

Le cartilage aryténoïde des grands animaux domestiques (le cheval, le boeuf) est vascularisé d'une manière semblable comme d'autres cartilages de ces animaux.

Les vaisseaux y parcourent dans des canaux particuliers, dont la structure est très peu mentionnée dans la littérature. Le travail présent a pour but de contribuer à la notion de ces canalicules à la base d'étude des préparations colorées d'une manière spécifique pour des éléments particuliers, qui composent ce cartilage élastique, dans le premier rang l'élastine.

A la colorisation par le fuchsine de Weigert ou orcéine, nous trouvons dans les canaux vasculaires dans le dit cartilage du cheval la substance élastique en formes d'anneaux tapissants la cavité d'un tel canal. Cet anneau passe vers l'intérieur en boules élastiques; à son extérieur son contour est de même inexact.

Les boules, qui se trouvent dans le tissu élastique du canal sont formées d'une manière caractéristique. Il y va des boules arrondies, groupées en des formations arbusculaires. Elles n'ont point de rapport aux fibres élastiques fines, parcourant le long et à travers.

L'anneau élastique propre (qui ne doit pas toujours être complet) se compose de boules semblables qui masquent les fibres élastiques, parcourant ici le long et à travers de même que le bord irrégulier, comme rougé, de la substance fondamentale du cartilage. Au fur et à mesure que l'on s'approche à l'extérieur, les boules changent de caractère de sorte

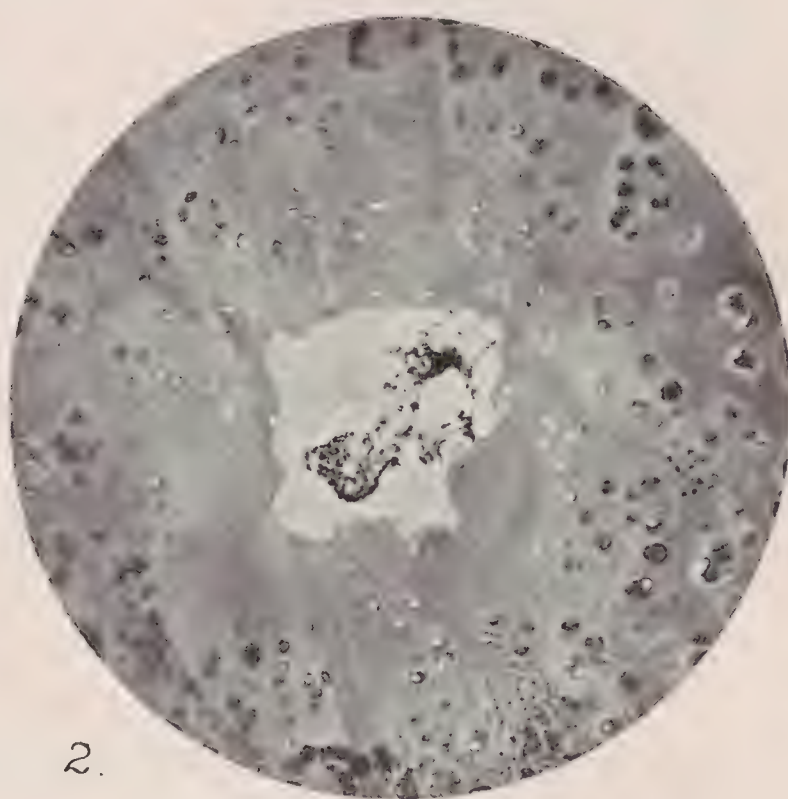


MUDr. JAN WOLF:

Contribution à la connaissance des canaux vasculaires dans le cartilage.



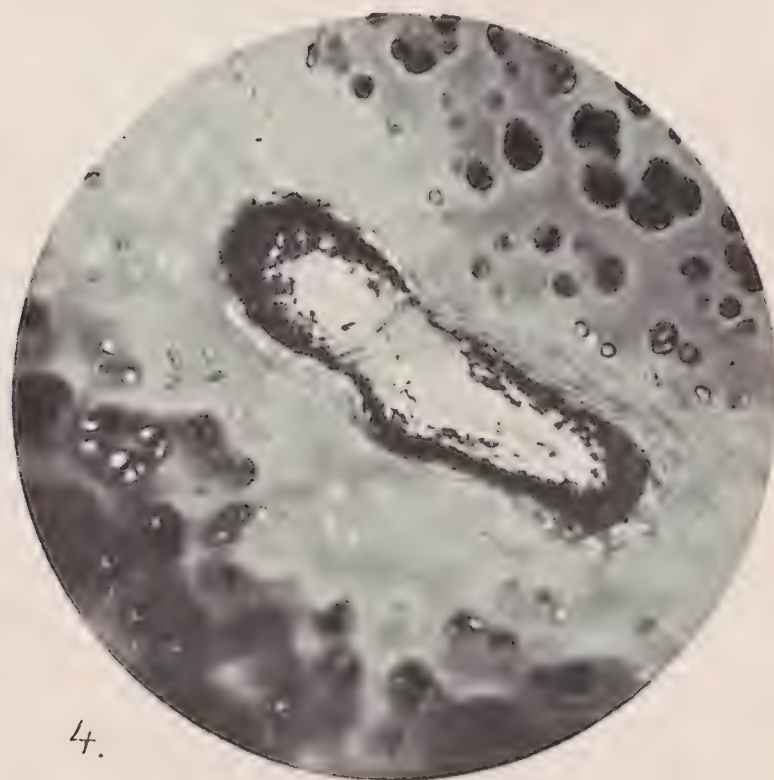
1.



2.



3.



4.



5.







que celles que nous trouvons dispersées dans la substance fondamentale dans le voisinage de l'anneau, montrent déjà un caractère tout à fait différent des celles dans la lumière du canal.

Il s'agit pour ainsi dire des boules montrant la ramification typique et les formes transitoires en fibres élastiques. Alors l'une et la même substance de l'anneau élastique passe d'un côté — c'est à dire vers la lumière du canal — en des précipités aux formes des boules rondes, de l'autre côté — vers l'extérieur dans la matière fondamentale — en des formations ramifiées montrant la tendance vers une différenciation plus avancée. Si nous recherchons l'origine de cette substance élastique, nous pouvons bien penser qu'elle provient du cartilage élastique lui même. Mais la découverte même des plus faibles anneaux élastiques dans les canaux du cartilage non élastique (le cartilage cricoïde p. ex.) ne parle pas contre cette opinion, si nous retenons en mémoire notre théorie de l'origine de la substance élastique. On ne peut pas démontrer la substance élastique par une coloration spécifique si elle se trouve dissolue dans la substance fondamentale; ce n'est, que de cette solution, que se précipitent plus tard les boules et les fibres élastiques dans la substance fondamentale.

Si l'élastine et l'un des membres les plus éloignés de la série des représentants d'albumoïde, puis la présence d'élastine est vraisemblable même dans un cartilage non élastique (dans le quel du reste les filaments élastiques peuvent se trouver et étaient déjà décrits (dans la trachée par ex).

L'albumoïde est présent en forme diffuse autour du canal de sorte, que dans les cas, où il y a une grande accumulation de cette substance le canal se trouve — dans les préparations colorées par la méthode de contact — dans un champ du noir bleu intense qui devient de plus en plus clair dans les régions plus éloignées. On peut même constater une abondance plus grande des fibrilles collagènes au voisinage des canaux.

Quant au cartilage aryténoïde du boeuf les anneaux y sont en général defectueux et irréguliers.

### Explication des figures.

Fig. 1. Anneau élastique du canal vasculaire du cartilage arytaenoïde du cheval. L'orcéine.

Fig. 2. Anneau élastique incomplète du même cartilage. L'orcéin.

Fig. 3. Détail d'un anneau élastique du canal vasculaire du cheval. L'orcéin.

a) formations des boules en dedans.

b) l'anneau propre.

c) les boules filamenteuses.

d) une cellule vacuolisée.

Fig. 4. Anneau élastique du canal vasculaire dans le cartilage arytaenoïde du cheval avec des fibres élastiques, en une coupe tangentielle.

Fig. 5. Une agglomération massive de la substance albumoïde autour du canal vasculaire. Méthode du contact à l'hématoxyline.



# Sur les cavités et les endroits amollis dans le cartilage aryténoïde.

Par

MUDr. JAN WOLF,

assistant de l'institut de l'histologie et de l'embryologie.

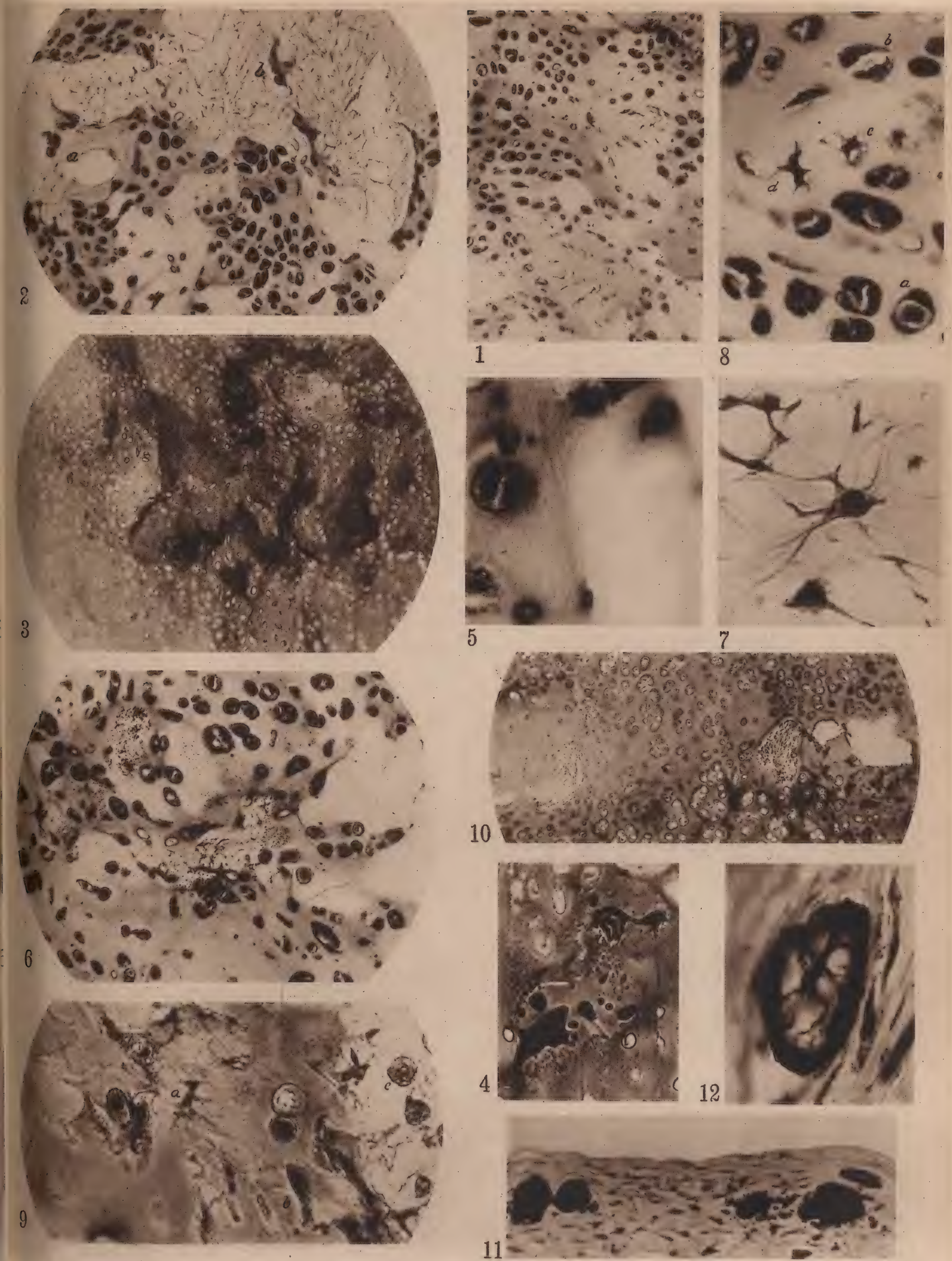
Travail de l'institut de l'histologie et de l'embryologie de la Faculté de médecine de l'université Charles à Prague. Chef prof. Dr. O. Srdínko.

Présenté le 8 juin 1923.

Dans le cartilage aryténoïde des grands animaux domestiques (le cheval, le boeuf) il y a outre les canaux vasculaires des cavités et des endroits amollis, qui méritent par leur structure caractéristique une description plus approfondie — surtout sous l'application des méthodes tinctoriales spéciales — que l'on le trouve jusqu'à présent dans la littérature.

La coloration par la méthode de contact montre bien, que les endroits amollis chez le boeuf ne possèdent point d'albumoïde, qui autrefois se trouve dans la substance fondamentale en forme de réseaux. Ces endroits y paraissent donc les plus clairs. Il est évident que l'albumoïde fut resorbé, lorsqu'on voit çà et là que cette substance y conflue en des formations en forme de boules ou de gouttes. De l'autre côté l'endroit amolli paraît (après une coloration complémentaire par le vert de méthyle) rempli d'une substance basophile, plus basophile même que la substance fondamentale voisine, d'une consistance plus molle, à demi liquide, comme on en peut juger déjà de la structure vacuolisée çà et là. Tous les endroits amollis contiennent des cellules ramifiées, étoilées, qui dans des tels endroits d'une étendue plus considérable forment — pour ainsi dire — un tissu réticulaire. Ces cellules prennent leur origine des cellules cartilagineuses ordinaires de telle manière, que leur endoplasma, qui possède déjà des petits prolongements et est accomplie à une cellule entière par les capsules (c'est à dire par la capsule d'albumoïde élastine et la capsule basophile











interne) change sa forme plus ou moins arrondie en une forme étoillée avec des prolongements ramifiés. Ceux-ci s'unient aux prolongements similaires d'autres cellules, tandis que les capsules mentionnées disparaissent. Des cas spéciaux d'une fusion de la substance albumoïde en grandes boules des qualités typiques arrivent quelquefois vers la limite du périchondre et du cartilage dans l'apophyse vocale du cheval. Chez le cheval il y a, quoique plus rarement, des endroits amollis de mêmes caractères histologiques.

## Explication des figures.

1. Deux endroits amollis dans le cartilage arytaenoïde du boeuf. Les cellules ramifiées ne forment pas encore un réseau; tous les deux endroits amollis sont plus clairs que leurs environs, où albumoïde est coloré par la méthode de contact à l'hématoxylin.

2. Un endroit amolli dans le même cartilage. Les cellules ramifiées se réunissent par leurs prolongements en un tissu réticulaire. *a*) une cavité sans réticule cellulaire, *b*) flots du cartilage primaire avec des cellules et d'albumoïde. Méthode de contact.

3. Endroits amollis du même cartilage, coloré par le vert de méthyle pour montrer la basophilie. Ces endroits sont plus sombres que les environs; les images négatives claires (voirs dans le fig. 2) des cellules ramifiées proéminent dans la substance basophile.

4. Un détail de l'endroit amolli coloré par le vert de méthyle. Formations en goutte de la substance fortement basophile.

5. Les limites du réticule d'albumoïde à l'endroit amolli. Du même cartilage. Méthode de contact.

6. Quelques agglomérations des boules d'albumoïde aux endroits amollis du même cartilage. Méthode de contact.

7. Une cellule ramifiée du réticule de l'endroit amolli du même cartilage. Méthode de contact.

8. Le développement des cellules ramifiées aux dépens des cellules cartilagineuses. La même préparation, colorée par la méthode de contact. *a*) une cellule avec l'endoplasma sphérique et une capsule d'albumoïde (+ élastique); *b*) cellules avec l'endoplasme en forme de croissant avec des prolongements; *c*) une cellule avec l'endoplasme étoilé et une capsule d'albumoïde, conservée en partie, *d*) une cellule avec l'endoplasme ramifié, sans capsule d'albumoïde. Les deux dernières cellules sont situées en un endroit plus clair, sans albumoïde — un endroit amolli au commencement de son développement.

9. Des cellules ramifiées du cartilage aux environs d'un canal vasculaire. De la même préparation. *a*), *b*) deux cellules ramifiées avec des prolongements épais, *c*) des cellules vacuolisées du canal.

10. Les cavités et les endroits amollis dans le corps du cartilage arytaenoïde du cheval. Méthode de contact.

11. Boules d'albumoïde aux confins du cartilage et du périchondre. L'apophyse vocale du cheval. Méthode de contact.

12. Une grande boule du même endroit, avec un centre plus clair de structure filaire. Même méthode.



# Sur la dérivée des fonctions d'une variable.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

On dit qu'une fonction est de la 1<sup>ère</sup> classe de Baire, si elle est la limite d'une suite de fonctions continues. Étant donnée une fonction  $f(x)$  continue dans  $\langle a, b \rangle$ , ayant une dérivée  $f'(x)$  en chaque point de cet intervalle, c'est un théorème presque évident et très connu, que la fonction  $f'(x)$  est de la 1<sup>ère</sup> classe sur  $\langle a, b \rangle$ .

On peut généraliser le problème comme il suit: d'une part, si l'on admet des dérivées infinies, on voit qu'une fonction peut avoir une dérivée dans un point de discontinuité; d'autre part, le domaine de définition de  $f(x)$  peut être un ensemble quelconque et non un intervalle. Pour ce problème généralisé, je vais démontrer le théorème suivant:

*Étant donnée une fonction  $f(x)$  sur un ensemble parfait  $P^*$  qui a une dérivée  $f'(x)$  en tout point de  $P^*$ , la fonction  $f'(x)$  est de la 1<sup>ère</sup> classe sur  $P^*$ .*

Pour démontrer ce théorème, il suffit<sup>1)</sup> de démontrer que la fonction  $f'(x)$  est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait  $P$ , contenu dans  $P^*$ .

J'indiquerai en grands traits la démonstration, en renvoyant pour les détails à mon mémoire original.<sup>2)</sup>

La base de la démonstration est le théorème connu que voici: Si la fonction  $f(x)$ , définie sur un ensemble parfait  $P$ , est telle qu'à chaque nombre  $\varepsilon > 0$  et à chaque intervalle<sup>3)</sup>  $J$ , contenant une infinité de points

---

<sup>1)</sup> Voir p. ex. R. B a i r e, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905.

<sup>2)</sup> „O derivaci funkcí jedné proměnné“ (en tchèque), Rozpravy České Akademie, t. 32., no. 5.

<sup>3)</sup> Je désigne par le mot „intervalle“ et par le symbole  $\langle a, b \rangle$  l'ensemble des points  $x$  tels que  $a \leq x \leq b$ .



de  $P$ , on peut faire correspondre un intervalle  $J_1$ , contenu dans  $J$  et contenant lui-même une infinité de points de  $P$ , tel que

ou bien l'oscillation de  $f(x)$  dans  $J_1 P$  est au plus égale à  $\varepsilon$ ,

ou bien  $f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$  en tout point de  $J_1 P$ ,

ou bien  $f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon}$  en tout point de  $J_1 P$ ,

la fonction  $f(x)$  est ponctuellement discontinue sur  $P$ .

Pour démontrer notre théorème, il nous suffit ainsi de démontrer l'absurdité de l'énoncé suivant:

(A) Il existe un ensemble parfait  $P$  contenu dans  $P^*$ , un nombre  $\varepsilon > 0$  et un intervalle  $J$  contenant une infinité de points de  $P$ , tel que pour chaque intervalle  $J_1$ , contenu dans  $J$  et contenant une infinité de points de  $P$ ,

1. l'oscillation de  $f'(x)$  dans  $J_1 P$  est plus grande que  $\varepsilon$ ,

2.  $f'(x) < \frac{1}{\varepsilon}$  pour une valeur  $x$  de  $J_1 P$  au moins,

3.  $f'(x) > -\frac{1}{\varepsilon}$  pour une valeur  $x$  de  $J_1 P$  au moins.

Admettons la validité de l'énoncé (A), et choisissons un point  $x_1$ , point limite de  $P$  de droite, dans  $J$ ; nous distinguerons trois cas:

1. si l'on a

$$(1) \quad |f'(x_1)| \leq \frac{5}{\varepsilon},$$

nous choisirons  $x_1' > x_1$  ( $x_1'$  dans  $J P$ ) tel que

$$(2) \quad |\psi(x_1, x_1') - f'(x_1)| < \frac{\varepsilon}{12}$$

(je pose  $\psi(x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ ). Puis, dans l'intervalle  $\left\langle x_1, \frac{x_1 + x_1'}{2} \right\rangle$  je prends un point  $\eta_1$  de  $P$  tel que

$$(3) \quad |f'(\eta_1) - f'(x_1)| > \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui est possible par hypothèse; de ce côté de  $\eta_1$ , duquel le point  $\eta_1$  est point limite de  $P$ , je prends  $\eta_1'$  dans  $P$  tel que

$$(4) \quad |\psi(\eta_1, \eta_1') - f'(\eta_1)| < \frac{\varepsilon}{12},$$

si  $f'(\eta_1)$  est fini, ou tel que

$$(5) \quad |\psi(\eta_1, \eta_1')| > \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12},$$



si  $f'(\eta_1)$  est infini. Alors, d'après (1), (2), (3), (4), (5), on aura

$$|\psi(x_1, x_1')| < \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12},$$

$$|\psi(x_1, x_1') - \psi(\eta_1, \eta_1')| > \frac{\varepsilon}{6}.$$

2. si l'on a  $f'(x_1) > \frac{5}{\varepsilon}$ , nous choisirons d'une manière analogue  $x_1'$  tel que  $\psi(x_1, x_1') > \frac{4}{\varepsilon}$ , puis  $\eta_1$  tel que  $f'(\eta_1) < \frac{1}{\varepsilon}$  (ce qui est possible par hypothèse) et  $\eta_1'$  tel que  $\psi(\eta_1, \eta_1') < \frac{2}{\varepsilon}$ .

3. enfin, si l'on a  $f'(x_1) < -\frac{5}{\varepsilon}$ , nous choisirons, d'une manière analogue, les points  $x_1', \eta_1, \eta_1'$  tels que  $\psi(x_1, x_1') < -\frac{4}{\varepsilon}$ ,  $\psi(\eta_1, \eta_1') > -\frac{2}{\varepsilon}$ .

Nous changeons encore la notation, en désignant par  $\xi_1$  resp.  $\xi_1'$  le plus petit resp. le plus grand des nombres  $\eta_1, \eta_1'$ . Nous pouvons évidemment choisir  $\xi_1, \xi_1'$  tels que  $x_1 < \xi_1 < \xi_1' < x_1'$ ,  $\xi_1' - \xi_1 < \frac{x_1' - x_1}{2}$ .

L'intervalle  $< \xi_1, \xi_1' >$  contenant une infinité de points de  $P$  (d'après la choix de  $\eta_1'$ ), on peut en partant de lui faire des considérations analogues comme en partant de l'intervalle  $J$ ; nous obtenons ainsi quatre points  $x_2, x_2', \xi_2, \xi_2'$ . En procédant ainsi indéfiniment, nous obtiendrons une suite illimitée des nombres  $x_i, x_i', \xi_i, \xi_i'$  de  $P$ , où

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots < \xi_2' < x_2' < \xi_1' < x_1';$$

$$\lim_{i=\infty} (x_i' - x_i) = \lim_{i=\infty} (\xi_i' - \xi_i) = 0.$$

Ces points ont un point limite  $x$ , appartenant à  $P$  et tel que  $x_i < x < x_i', \xi_i < x < \xi_i'$ ; enfin, pour chaque valeur de  $i$ , l'un des trois systèmes suivants d'inégalités est valable:

$$1. \quad \left| \psi(x_i, x_i') \right| < \frac{5}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{12}, \quad \left| \psi(x_i, x_i') - \psi(\xi_i, \xi_i') \right| > \frac{\varepsilon}{6};$$

$$2. \quad \psi(x_i, x_i') > \frac{4}{\varepsilon}, \quad \psi(\xi_i, \xi_i') < \frac{2}{\varepsilon};$$

$$3. \quad \psi(x_i, x_i') < -\frac{4}{\varepsilon}, \quad \psi(\xi_i, \xi_i') > -\frac{2}{\varepsilon}.$$



D'après un lemme connu de Steinitz,<sup>4)</sup> l'existence d'une dérivée au point  $x$  a pour condition nécessaire l'existence d'une limite commune des expressions

$$(6) \quad \psi(x_i, x_i'), \quad \psi(\xi_i, \xi_i')$$

pour  $\lim i = \infty$ . Mais, d'après les inégalités ci-dessus, les expressions (6) ne peuvent pas avoir de limite commune finie ou infinie. Alors la fonction  $f(x)$  ne peut pas avoir de dérivée au point  $x$ , ce qui contredit à l'hypothèse. L'absurdité de l'énoncé (A) est donc démontrée, et notre théorème est établi.

---

<sup>4)</sup> Steinitz, Stetigkeit und Differentialquotient, Mathem. Annalen, 1899, t. 52.



# The tertiary Naiades of Bohemia.

JAR. PETRBOK.

Presented the 9. March 1923.

The tertiary *Naiades* of *Bohemia*, found to this day, are of *miocene* age. They are found partly in solid clays at *Břešťany* (besides of a very rich flora and an excellent *Vertebrate* fauna and partly in a solid sandstone at „*Salesiushöhe*“ near *Osek*, where plant-remains are very.

Following species belong to this fauna:

1. *Iridea flabellata* Goldf. in one typical remain. *Břešťany*.
2. *Unio* sp. badly preserved, which is an old specimen of *Unio Babori* Pbk or an young *Iridea flabellata*.
3. *Unio Klikai* sp. n.: Conchis rotundis, inflatissimis, fortissimis, subtilissime striatis, striis concentricis, umbonibus prominentibus vero similiter conniventibus. Long. = 4.7 cm, latit. = 3.3 cm, altit. = 3.3 cm. Long. ligam.: 1.3 cm, altid. ligam. = 0.5 cm. *Salesiushöhe* near *Osek*. (Montes Aerei = Krušné Hory.)

4. *Unio Babori* Petrbok, which is the same as *Mycetopus europaeus* Frič, which not rightly is held for the genus *Mycetopus* on account or its shape, due to the cutting at the preparation.

Concha satis parva, aequivalvis, inaequilateralis, subrhomboidalis, brevis, recta, applanata (externae conchae *Unionis Faveri* Loc telluris aquitanicae *Helvetiae* similis); regio anterior alta, antice abbreviata, umbones inconspicui, regio posterior alta, lata, lingueformis; margo inferior subrectus, subparallelus; testa tenuis, striata, juvenilis, distincta, biloba. Longit. = 35 mm, altit. = 20 mm. Hab. *Břešťany*.

5. *Unio Frankenbergeri* sp. n. Conchis oblongoovatis, reniformibus, *Unioni batavo* similibus, inflatissimis, extremitatibus rotundatis. Margo superior lente arcuatus, trans umbones ascendens, margo inferior lente arcuatus aut fere rectus, parte centrali impressus. Margo posterior alaeformi dilatatus, declivis. Dentes cardinales fortes, triangulares, denticulati. Plicae breves, altae, acutae. Longit. = 4.5 cm, altitud. = 2.5 cm.

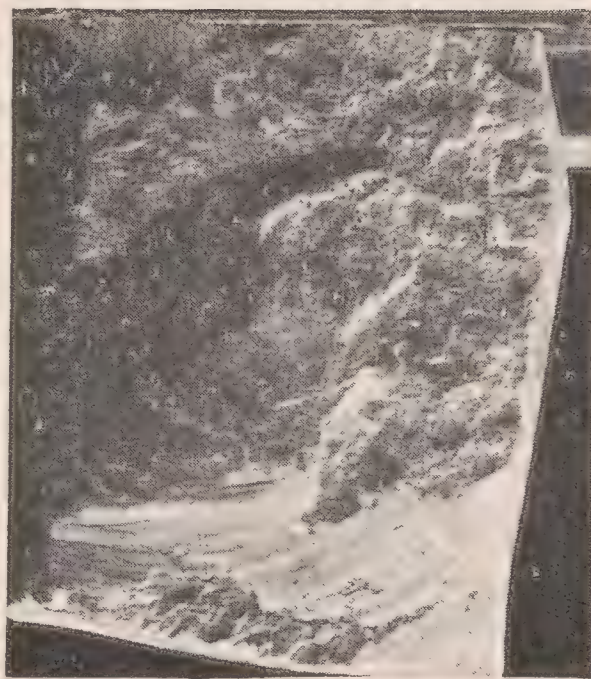
Hab. „*Salesiushöhe*“ near *Osek*.



JAR. PETRBOK: The tertiary Naiades of Bohemia.



1



2



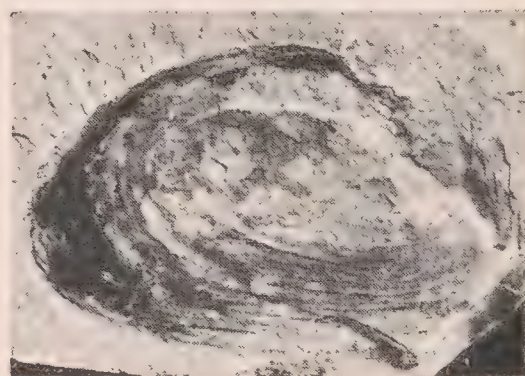
3



4



5



6



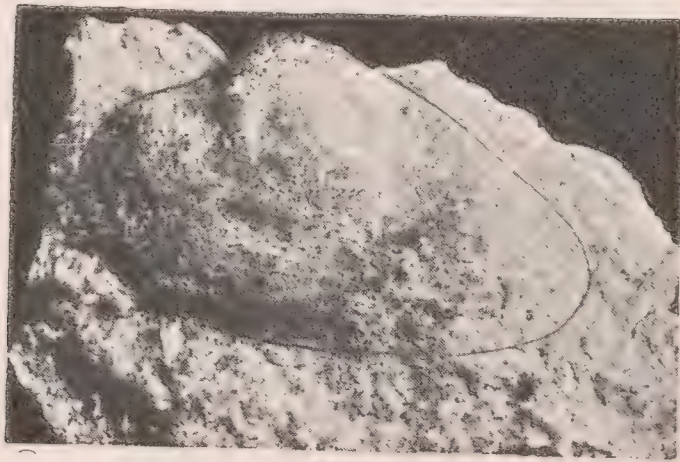
7

8

9

10

11



12







6. *Unio Kettneri* sp. n. Conchis cuneiformibus, aequivalvis, inaequalateralibus, crassis, sub apices inflatis, forte costulato-striatis, striis inaequalibus, una fortiore cum nonnullis tenuibus varianti. Umbonibus ad extremitatem anteriorem inclinatis (umbonum axi cum margine inferiori ca angulum  $60^{\circ}$  claudente) prominentibus, conniventibus. Ligamentum crassum. Dentibus cardinalibus fortibus, lamellis longis et acribus; dente dextro prominentissimo, dentibus sinistris, planis denticulatis. Plicis longis, acutis. Margo superior et inferior recti, ab umbonibus convergentes in angulo ca  $45-50^{\circ}$ . Margo posterior obtuso-acutiusculus.

Longit. = 5 cm, latit. = 1.5 cm, altit. = 3 cm.

Hab. „Salesiushöhe“ near Osek.

### Explanation of plates.

1. *Unio Babori* Petrbok = *Mycetopus europaeus* sp. Frič.
2. *Unio* sp.
3. *Unio Klikai* sp. n.
4. *Unio Babori* Pbk. typ.
5. *Unio Babori* Pbk. The left shell typical, the right misskaped into the pseudoform „*Mycetopus europaeus*“ sp. Frič.
6. *Unio Babori* Pbk. a rhomboïdeal form.
7. *Unio Frankenbergeri* sp. n.
8. *Unio Frankenbergeri* sp. n.
9. *Unio Frankenbergeri* sp. n.
10. *Unio Kettneri* sp. n.
11. *Unio Kettneri* sp. n.
12. *Unio Kettneri* sp. n.



# La question de la division de l'ovule non fécondé.

Par

J. JANOŠÍK.

Présenté le 20 avril 1923.

Cette question a été étudiée par divers auteurs. Les uns considerent l'ovule en ce procédé comme une cellule active et ils parlent jusque de la parthenogénèse tandis que les autres proclament l'ovule tout à fait inactif et ne parlent que d'une fragmentation. Il n'est pas possible de nier l'activité de l'ovule au moins en cas où l'ovule se divise presque tout à fait régulièrement. Une telle division admet d'ailleurs en quelque cas R u b a s c h k i n lui-même qui a étudié ce procédé avec assez de détail, mais il parle aussi en ce cas d'une fragmentation.

S a n s o m dit récemment en cet égard: „... one is led to believe that true parthenogenesis, does occur to a limited extend and that it is quite distinct from the degenerative processus...” Il a pu suivre cette division jusqu' à quatre cellules.

R a b l et S p u l e r ont prononcé le même. Mais il s'agit encore d'une autre question et cela sur la signification de ce procédé, quel est le sort de ces éléments. — Est-il possible que cette division parthenogénétique de l'ovule puisse donner une impulsion au développement des embryons. Il y a divers auteurs (P f a n n e n s t i e l, W i l m s) qui partagent cette opinion. Mais il n'est pas possible ni de confirmer cette opinion ni de la nier. — Quoique on n'a jusque'à present pu trouver une connexion assurée entre ces deux formations — il est donc possible que l'on découvrira une telle connexion.

S a n s o m a trouvé aussi un ovule divisé dans la trompe utérine chez *Microtus*. L'ovule n'a pas été fécondé et il remet en memoire ce que j'ai écrit dans mon travail, que l'on puisse faussement considérer tels ovules comme fécondés.

---



# Application d'une transformation de Bošković aux quadriques de révolution.

(Avec 1 figure.)

Par le

Dr. GEORGES MAJCEN à Zagreb (Yougoslavie).

Récemment j'ai fait paraître en croate le Mémoire,<sup>1)</sup> rédigé dans le texte original en latin: „Sectionum conicarum elementa“ (Rome, 1754), dont l'auteur est R. J. B o š k o v i ć (1711—1787), le bien connu mathématicien, philosophe et astronome de Raguse.<sup>2)</sup>

Dans le § 140 et les suivants du dit Mémoire Bošković donne une transformation spéciale, et l'emploie pour quelques développements des, problèmes concernant la théorie des coniques.

Ces développements peuvent être généralisés aux quelques relations-remarquables de l'espace, surtout à la théorie des quadriques de révolution qui ont des foyers situés sur l'axe de révolution (foyers singuliers).

Dans une collinéation usuelle (affinité) entre telles surfaces et la surface de la sphère n'entrent pas les propriétés focales; au contraire, spécialement en cas de la transformation de Bošković ces relations focales restent conservées et elles entrent même dans les résultats obtenus par cette voie.

Dans le Mémoire de Bošković il s'agit avant tout de la disposition fondamentale pour ladite transformation et en général pour la théorie complète des coniques.<sup>3)</sup>

---

<sup>1)</sup> Voir le „Rad“ (Travaux) de l'Académie Yougoslave des Sc. et des Arts, t. 225 (1921) Zagreb.

<sup>2)</sup> Comp. A. S e y d l e r, O životě a působení R. J. Boškoviće, Časopis pro pěstov. math. a fysiky (Prague), XVI, 1877, p. 267.

<sup>3)</sup> Comp. Ch. T a y l o r: An introduction to the ancient and modern Geometry of Conics, Cambridge, 1881.







Une conique quelconque, située sur une quadrique de révolution, ayant des foyers singuliers, sera projetée d'un de ses foyers par un cône quadrique de révolution. Et vice-versa: Un cône quadrique de révolution, ayant son sommet dans un foyer de la quadrique de révolution, coupe la surface en deux coniques.

Cette propriété mène à une génération projective des quadriques de révolution ayant des foyers singuliers.

On donne un faisceau de cônes quadriques de révolution qui ont le même axe et le sommet commun, ensuite un faisceau de plans en involution. Les deux faisceaux sont projectifs (correspondence 1—2) et situés tellement que l'un des deux plans doubles du faisceau involutif est en coïncidence avec son plan correspondant, passant par le sommet du faisceau de cônes et étant normal sur l'axe commun de ces cônes. Les intersections des autres éléments correspondants de deux faisceaux sont des coniques, placées sur une quadrique de révolution, ayant un foyer  $F$  dans le sommet commun des cônes; l'autre des plans doubles du faisceau involutif est le plan polaire (plan directeur) appartenant à ce foyer  $F$ , par rapport à la surface générée.

Parmi les cônes du faisceau il y a un qui dégénère en axe commun des cônes. A ce cône dégénéré correspondent dans le faisceau involutif deux plans qui sont les plans tangents à la surface générée; les points de contact sont les points d'intersections de ces deux plans avec l'axe du faisceau de cônes.

Par la voie indiquée on obtient encore quelques autres relations à l'égard des quadriques de révolution.

Dans la présente Note il ne s'agit pas de contenu des propriétés elles-mêmes; elle a pour but de développer et généraliser quelques méthodes historiques et spécialement d'employer la transformation de Bošković pour quelques démonstrations le plus simples qui concernent la théorie constructive des quadriques de révolution, un domaine, où on n'a pas plus s'attendre à des voies essentiellement nouvelles.



# Restes des terrains crétacés des environs de Prague les plus avancés vers le Sud.

Contribution à la connaissance de la transgression crétacée en Bohême.

Par

**ODOLEN KODYM (Prague).**

(Avec carte et figure dans le texte.)

Résumé du texte tchèque.

Présenté le 24 février 1922.

Je voudrais par cette étude attirer l'attention sur quelques restes de dépôts d'eau douce dûs à la transgression crétacée, qui, dans le centre de la Bohême, se trouvent au sud de la couverture crétacée continue<sup>1)</sup> et contribuer, me basant sur des recherches lithologiques et morphologiques, à la résolution du problème de l'étendue sud de la transgression crétacée dans la Bohême centrale.

Le plateau crétacé des environs de Prague, faiblement incliné vers le Nord-Est ou vers le Nord, est formé, à sa limite sud, par trois des zones les plus anciennes: les grès de Peruc (I<sup>ère</sup> zone crétacée selon Z a h á l k a), dépôts d'eau douce, les grès marins de *Korycaný* (II<sup>e</sup> zone) et les couches de Bílá Hora (III<sup>e</sup> zone). Les terrains crétacés, reposant en discordance sur l'Algonkien et les terrains paléozoïques, sont presque horizontaux et constituent de hauts plateaux et des monts témoins, qui se trouvent à peu près au nord de la ligne partant de *Dušníky* et passant par *Smíchov*, *Libeň*, *Horní Počernice* pour se diriger ensuite vers Vyšerovice. La puissance des terrains dûs à la transgression crétacée augmente à la limite sud du plateau dans la direction de l'Est vers l'Ouest. M a t ě j k a<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> L'étude ne s'occupe pas de l'âge de la transgression crétacée, qui selon Č. Z a h á l k a date du Crétacé inférieur et selon d'autres auteurs du Cénomanién.

<sup>2)</sup> A l. M a t ě j k a: Contribution à la connaissance du Crétacé sur la feuille de Prague. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1922, Prague.



évalue la hauteur des terrains de la I<sup>ère</sup> zone, dans les environs de *Prosek*, à 245 m, B. Z a h á l k a<sup>3)</sup> sur la pente nord de la Vidoule à 333.5 m. La hauteur inégale du niveau de la transgression est causée par l'inégalité primitive du substratum antécétacé et par les mouvements tectoniques datant de l'époque tertiaire.

La limite sud des restes des terrains crétacés doit son parcours d'aujourd'hui à la dénudation postérieure à l'ère crétacée, qui eut surtout lieu à l'époque pliocène et au Pléistocène. Des opinions très diverses furent émises sur l'extrême étendue de la transgression vers le Sud. Les uns supposent que le Crétacé de la Bohême était contigu au Crétacé de la *Bavière*, les autres prétendent que primitivement vers le sud il ne dépassait que de peu sa limite d'aujourd'hui. Les deux opinions sont fondées sur divers faits. A mon avis la seconde conception, n'admettant pas l'étendue de la transgression crétacée par dessus le granit de la Bohême centrale et des Brdy, est beaucoup plus juste. Elle est même appuyée par la nature lithologique de ces restes des couches de Peruc, qui furent décrits et dont le caractère est franchement littoral.<sup>4)</sup>

## I. Couches de Peruc dans les environs du Vidrholec.

Entre *Chvaly*, *Vyšehořovice*, *Nové Jirny* et *Oujezdec* s'étendent des couches de Peruc, non recouvertes par des zones marines supérieures, il est vrai qu'elles sont contiguës au reste du plateau crétacé mais elles forment une langue de terrain de caractère lithologique et de facies différents. La limite occidentale de cette langue, presque rectiligne, est causée, semble-t-il, par une dislocation antérieure au Crétacé, car le niveau de la transgression est de 20—25 m plus bas près de *Háj* que les collines siluriennes se trouvant dans le voisinage immédiat. Le massif crétacé oriental s'y est probablement affaissé et le Crétacé se trouvant à l'Ouest de la dislocation fut dénudé. La limite sud de la langue des terrains en question, doit surtout son parcours au relief du sol antérieur au Crétacé, car les terrains crétacés pénètrent vers le Sud jusqu'à la bande des quartzites de Drabov, qui constituent des crêtes remarquables au point de vue morphologique. Les couches de Peruc reposent sur le versant nord de ces crêtes qui formaient probablement, du moins à une certaine époque, la rive sud du „lac de Peruc“. Le substratum des couches crétacées y est le Silurien inférieur.

<sup>3)</sup> B. Z a h á l k a: Křídový útvar v západním Povltaví. Věstník král. č. spol. nauk, 1911. Prague.

<sup>4)</sup> Diverses opinions, sur l'étendue de la transgression crétacée en Bohême, se trouvent dans la publication de M. J. V. D a n e š: Morfologický vývoj středních Čech (Sborník čes. spol. zeměvědné 1913) et dans celle de K o d y m-M a t ě j k a: Geologicko-morfologický příspěvek k poznání šterků a vývoje říčních toků ve středních Čechách (ibid. 1920).



Les couches de Peruc sur le Vidrholec sont peu accessibles, car les affleurements y sont bien écartés et ne se trouvent que dans diverses tranchées et sablières. Il est donc bien difficile de déterminer toute la série de couches, surtout quand il faut tenir compte de la stratification entrecroisée et de l'allure irrégulière primitive ou secondaire des couches. Les couches de Vidrholec furent même récemment qualifiées à tort de graviers pléistocènes. La coupe des environs de *Prosek* publiée par *Matějka*<sup>5)</sup> nous renseigne surtout sur la succession des couches de la I<sup>ère</sup> zone:

7. Zones marines du Crétacé.

6. Grès parallélépipédique kaolieux à grain fin ou gros, contenant dans ses parties supérieures des lentilles de schistes argileux blancs de peu d'épaisseur; à peu près .....	7	m
5. Grès grisâtres en plaquettes à ciment argileux et intercalations de grès kaolieux .....	3	m
4. Grès parallélépipédique kaolieux à grain fin .....	4	m
3. Grès kaolieux avec intercalations d'argiles gréseux à mica	2	m
2. Schistes argileux et argiles .....	6.7	m
1. Couche limoniteuse .....	0.05	m
Puissance totale de la I <sup>ère</sup> zone .....	22.75	m

Substratum: couches de Zahořany (*d* ε) à une hauteur de 245 mètres à peu près.

*Matějka* suit les couches de Peruc vers l'Est et constate que dans la direction de Hloubětín l'épaisseur des schistes argileux augmente atteignant presque 9 mètres. Là, dans leur mur, apparaît une couche de grès et de conglomérats ferrugineux atteignant même l'épaisseur de 4 m.

Dans les environs de *Chvaly*, la stratigraphie a un caractère semblable. Nous y trouvons à la base des conglomérats d'une épaisseur médiocre, surmontés d'une couche d'argiles à mica qui sont de couleur brune et contiennent de nombreux restes de plantes.

Vers le Sud-Est tout cela change un peu. La couche basale de grès et de conglomérats ferrugineux ne semble pas y être partout développée; elle affleure dans la carrière située à la lisière de la forêt, à l'Ouest de la cote 233 et de Nové Jirny, puis dans la vallée du ruisseau *Vejmoly* au Nord de *Tuklaty*. La couche de schistes argileux est partout développée et est une couche aquifère. Sa puissance décroît dans la direction est, mais les argiles deviennent plus plastiques, moins gréseuses et grises. Les argiles affleurent à *Chvaly*, à l'Ouest de *Sejpravice*, à *Šestajovice*, près de la maison forestière près de *Jirny* et ailleurs.

Au-dessus des argiles se trouve une bande de grès ferrugineux en plaquettes à mica contenant de rares galets de roches paléozoïques. Ces grès sont de caractère purement littoral. La puissance de cette bande oscille entre 20 et 30 mètres. Elle affleure entre *Sejpravice*, *Xaverov*,

<sup>5)</sup> *A. Matějka*: l. c. 2.



Jirny et la voie du chemin de fer d'Etat. Ces grès passent vers le toit en grès parallélépipédiques kaolineux, blancs, de 15 mètres à peu près, qui forment le mur des zones marines du Crétacé. La puissance de la I<sup>re</sup> zone varie entre 40 et 45 mètres. Les terrains de la transgression, formés de dépôts d'eau douce, atteignent une hauteur de 235—240 *m* (à l'extrémité sud de la langue en question), ceux de la transgression marine, une hauteur de 280 *m*. Si le Crétacé présente une inclinaison vers le Nord (ce qui est vraisemblable), la puissance de la I<sup>re</sup> zone est encore plus grande en cet endroit.

\* \* \*

Quelques îles de petite étendue se trouvent au Sud de Vidrholec, c'est-à-dire 1<sup>o</sup> à l'Est de *Koloděje*, 2<sup>o</sup> au Sud de *Koloděje*, 3<sup>o</sup> au Nord de *Dubeček*, situé à l'Ouest de *Dubeč*, 4<sup>o</sup> au Sud-Est de *Hostivař*. Toutes ces îles sont à peu près à une même hauteur de 260—270 mètres sur le versant nord des crêtes, formées par les quartzites de Drabov et ne dépassent pas leur sommet. La nature lithologique des couches de ces îles — grès et conglomérats ferrugineux — témoigne de leur origine juste au bord du bassin de la sédimentation.

## II. Îles crétacées de la rive gauche de la Vltava les plus avancées vers le Sud.

Les dépôts crétacés furent enlevés par l'action érosive de la Vltava. Il en résulte que ce qui en reste sur la rive droite et la rive gauche n'est pas en liaison. Le plateau crétacé contigu forme sur la rive gauche de la Vltava la Bílá Hora et la Vidoule, qui comme des monts témoins surpassent la région silurienne environnante. Mais plusieurs îles — restes de terrains non enlevés par la dénudation — se trouvent au Sud de ce plateau, c'est-à-dire 1<sup>o</sup> l'île située entre *Radlice* et *Hlubočepy*, 2<sup>o</sup> l'île près de *Slivenec*, 3<sup>o</sup> restes de terrains crétacés près de *Kosoř*, *Třebotov*, *Tachlovice* et *Vysoký Újezd*. Toutes ces îles ne sont formées que par des couches de Peruc, seule l'île de Slivenec est recouverte en partie de zones marines.

1. L'île située entre *Radlice*, *Hlubočepy* et *Butovice* est en majeure partie recouverte de limons et de décombres. Le niveau de la transgression atteint au Nord une hauteur de 310 mètres, à peu près, qui diminue vers le Sud, où elle ne mesure par places que 295 mètres! Ce cas est d'autant plus extraordinaire que sur la Vidoule le Crétacé se trouve à une hauteur de 340 *m* et présente une inclinaison vers le Nord. A mon avis ceci peut être expliqué par l'inégalité du sol antécrtacé. Il est impossible de déterminer précisément la stratigraphie de cette île; les grès et les conglomérats ferrugineux qu'on trouve partout dans les champs sont probablement développés à sa base. En outre, au-dessus de *Radlice*, les termes supérieurs de grès kaolineux se sont conservés; ils sont en partie colorés par le fer. L'existence de schistes argileux n'y a pas été constatée.



2. L'île située près de Slivenec est transgressive à l'Est à une hauteur de 300—320 *m*, à l'Ouest la hauteur atteint même 350 *m*. Le niveau de transgression est très inégal. De profondes dépressions sont remplies, en majeure partie, d'argiles réfractaires à fossiles végétaux, alternant avec des bancs de conglomérats ferrugineux. (Voir fig. 1.) Le reste des couches — grès et conglomérats ferrugineux — se déposèrent lorsque les dépressions furent comblées. Cette île est remarquable en ce qu'elle est recouverte de dépôts marins, c'est-à-dire de marnes de Semice de la III<sup>e</sup> zone. Les grès de Korycany n'y ont pas été constatés. La puissance des dépôts varie entre 25 et 45 mètres.

3. Les dépôts d'eau douce de la troisième île crétacée située entre *Tachlovice*, *Mezouň*, *Vysoký Újezd*, *Kuchaře* et *Lužec* reposent sur les calcaires dévoniens et leur couche inférieure (brèche de base) contient des galets de calcaire et de cornéenne provenant des termes supérieurs des calcaires de Bráník. Près de *Tachlovice* (cote 381) cette couche est surmontée d'une bande de grès blancs kaolineux de peu d'épaisseur (2—3 *m*) avec intercalations d'argiles. Le reste de la série des couches est aussi formé par des grès et des conglomérats ferrugineux. Un peu vers l'Ouest, au Nord-Est de *Vys. Újezd*, des argiles réfractaires blanches sont développées à la base et surmontées de grès ferrugineux. Dans cette île, à la base de toute la série de couches, se trouvent parfois des minerais de fer oolithiques avec une certaine quantité de beauxite; ils se sont développés par l'altération, en latérite du substratum et récemment furent étudiés par M. Fr. Slavík.<sup>6)</sup>

La hauteur du niveau de la transgression crétacée augmentant vers l'Ouest, y varie beaucoup, allant de 340 à 410 mètres. La puissance de la série des couches crétacées atteint même 35—40 *m*.

4. Plusieurs restes de moindre importance se sont conservés outre ces trois îles que nous venons de décrire. La petite île se trouvant à une hauteur de 356 *m* à l'extrémité nord du village de *Kosoř* et reposant sur les calcaires dévoniens *g α* est formée de grès et de conglomérats ferrugineux de 6 mètres d'épaisseur. Sur le chemin de *Třebotov* à *Choteč* se trouve, à la hauteur de 260—280 mètres, une île de 10 mètres d'épaisseur ayant le même caractère lithologique et reposant aussi sur le *g α*. La dernière de ces îles est située à une hauteur de 380—400 *m* sur le *Čertovo sedlo* entre *Roblín* et *Trnový Újezd*. Une brèche formée de calcaires et de cornéennes se trouve par places à sa base. Les grès ferrugineux contiennent aussi des intercalations de grès siliceux à gros grain.

Il est évident que toutes ces îles sont des restes de la couverture contiguë des couches de Peruc, qui ont été préservées de la dénudation.

<sup>6)</sup> Voir Fr. Slavík: Minerais de fer pisolitiques bauxitiferes dans le Crétacé de la Bohême. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1922.



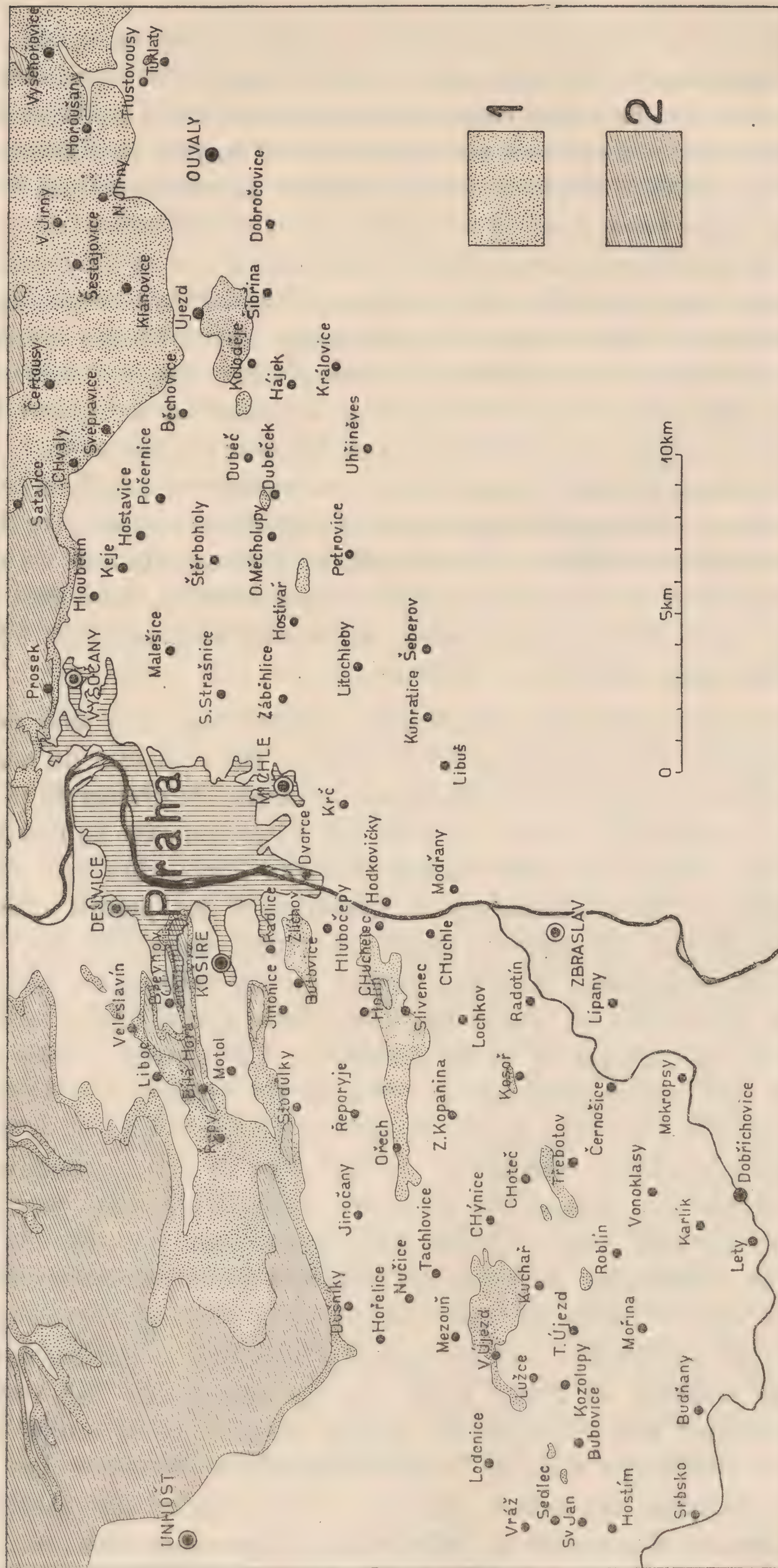


Fig. 1. Carte représentant l'étendue des restes des dépôts crétacés dans les environs de Prague.

1 = Ière zone crétacée (zone de Peruc); grès, poudingues et argiles lacustres, 2 = IIe et IIIe zone crétacée d'origine marine.



### III. Quelle fut l'extrême limite sud des dépôts crétacés.

En suivant la hauteur des couches de Peruc dans la bande s'étendant de *Vyšehořovice* à l'Ouest vers *Vysoký Újezd*, nous constatons que dans cette direction la base s'élève de façon frappante. Tandis qu'à l'Est elle a des hauteurs approchant ou dépassant 240 *m*, près de *Trnový Újezd* elle monte par place à 400 *m* et en ces endroits elle se maintient à 370 *m* à peu près. Nous nous demandons alors, si cette inclinaison de couches crétacées est primitive, c'est-à-dire formée lors de la sédimentation ou si elle est due aux mouvements tectoniques. La dernière conception est, cela va sans dire, appuyée par la profondeur médiocre des bassins, la formation simultanée des couches de Peruc, ainsi que par leur nature lithologique égale. Tous les auteurs sont d'ailleurs d'accord quant à l'explication de la plupart de ces différences en hauteur du niveau de la transgression disant qu'ils sont dus à des mouvements orogéniques postérieurs au Crétacé. Du moment que nous admettons l'existence de mouvements orogéniques postérieurs au Crétacé, la hauteur absolue du niveau de la transgression et celle de la contrée environnante n'ont plus aucun ou presque aucun intérêt pour l'étude de la paléogéographie de l'époque de la transgression crétacée en Bohême.

Nous n'avons donc, par conséquent, d'autre ressource que de nous servir des valeurs de hauteurs relatives telles qu'elles existent de nos jours ou telles qu'elles peuvent être évaluées par l'examen du niveau de la transgression des couches de Peruc. Comme les différences en hauteurs relatives peuvent changer de deux façons diverses c'est-à-dire par suite de la dénudation et de mouvements orogéniques, il est permis d'objecter qu'elles ne sont pas non plus des points de repère assez sûrs pour servir de base à nos recherches. Mais ces parties du sol antécrotacé qui furent recouvertes de couches de Peruc déposées d'eau douce furent justement préservées de la dénudation et de l'abrasion. Les autres parties du sol antécrotacé, non surmontées par la I<sup>ère</sup> zone du Crétacé, surpassaient le territoire recouvert par le „lac de Peruc“ et étaient exposées à tous les phénomènes géologiques destructifs, ce qui avec le temps, abaissa relativement toutes ces parties du territoire antécrotacé non recouvertes. Nous basant sur cela, nous pouvons donc assurer que, par suite de la dénudation, les différences de hauteurs relatives entre les points les plus élevés de la surface topographique d'aujourd'hui et les parties conservées du relief du sol antécrotacé, visibles dans les inégalités du niveau de transgression des couches de Peruc n'ont pas pu augmenter. Au contraire, elles ne pouvaient que diminuer, les dépôts crétacés ayant rempli les dépressions les protégeant ainsi de l'approfondissement ultérieur. Les points culminants restèrent cependant exposés à une extrême dénudation. La résistance inégale des roches à l'altération n'a pas non plus pu, depuis l'ère Crétacée, changer les hauteurs relatives du territoire en question,



le relief du sol antécétacé ayant atteint son complet développement à son stade de sénilité (datant de l'époque carbonifère) et ayant été influencé dans son allure par la résistance des roches. Cependant il est plus difficile de résoudre le second problème, c'est-à-dire celui de l'influence des mouvements tectoniques sur les diverses hauteurs relatives. Mais là non plus les changements n'ont pas été très importants à ce point de vue. Ces mouvements n'y furent pas du tout puissants ayant atteint au plus 150 *m* dans l'étendue du territoire étudié, selon les indications citées plus haut; ils se manifestèrent en partie par des affaissements le long des dislocations et en partie par des surélévations unilatérales de massifs. Comme dans tous les cas les massifs est ou nord-est se sont affaissés le long de dislocations de direction N.-S. ou N. N. W.-S. S. E. ces mouvements orogéniques n'ont eu aucune influence sur l'allure du parcours des couches dans les terrains compris dans les coupes géologiques tracées du Nord au Sud ou du Nord-Ouest au Sud-Est. Cette allure du parcours des couches dans cette direction peut servir de base à nos réflexions sur la paléogéographie de notre contrée à l'époque de la transgression crétacée.

L'étude de l'étendue des couches de Peruc dans les environs de Prague nous permet de constater qu'elles ont la forme d'une ellipse allongée de l'Est vers l'Ouest. Cette ellipse est limitée au Nord aux endroits où la II<sup>e</sup> et la III<sup>e</sup> zone crétacée sont directement transgressives par rapport aux roches paléozoïques et au Sud elle passe à une série de restes et d'îles de terrains crétacés préservés de la dénudation.<sup>7)</sup> En étudiant chacune de ces îles nous constatons que chacune d'elles repose sur le versant nord des crêtes qui même de nos jours ressortent plus ou moins sur le relief de la contrée. Du reste nous avons dit plus haut que les îles des couches de Peruc des environs de *Koloděje*, *Dubeč* et *Uhřetěves* se trouvent sur le versant nord des crêtes formées de quartzites de Drabov; les îles des environs de *Kosoř*, *Třebotov*, *Kuchařík* et *Vysoký Újezd* reposent de même sur des pentes inclinées vers le Nord, constituées de couches du Devonien et du Silurien supérieur. Ceci nous fait supposer que ces crêtes ont formé au Sud de Prague le bord du bassin où se sont déposées les couches de Peruc. Cette explication nous semble être d'autant plus plausible, si nous nous rendons compte qu'à cette époque il y avait de beaucoup plus grandes différences entre les hauteurs relatives des crêtes, alors plus élevées qu'aujourd'hui et des dépressions, non remplies à cette époque de dépôts crétacés et par conséquent plus profondes.

Le caractère des facies et de la stratigraphie des couches de Peruc appuient de même notre opinion qui est que les couches des îles les plus avancées vers le Sud se sont déposées sur le bord du bassin de sédimen-

<sup>7)</sup> L'opinion de M. V. J. Novák (voir l. c. 11), qui prétend que les couches de Peruc des environs de *Tachlovice* n'étaient pas contiguës au reste des dépôts de la I<sup>ère</sup> zone, n'est pas du tout fondée comme le démontre du reste la présence des îles voisines.



tation, tout près de la rive. Aucune de ces îles, les plus avancées vers le Sud, ne contient à sa base argiles ni grès mais seulement des grès et des conglomérats ferrugineux qui au point de vue stratigraphique correspondent à l'horizon supérieur à la bande des argiles et des schistes argileux. Là où les argiles et les schistes argileux sont développés dans la proximité de la limite sud des îles crétacées, ces deux roches ne remplissent que des dépressions et peut-être aussi des vallées du sol antécétacé. Autrement dit: les horizons inférieurs des couches de Peruc se terminent en biseau vers le Sud et ainsi la puissance de la I<sup>ère</sup> zone est diminuée. Mais le caractère lithologique lui-même prouve que les îles sud des couches de Peruc se sont formées tout près de la rive. Les grès kaolineux parallél-épipediques passent au grès à grain gros et au conglomérats ferrugineux, dont les éléments élastiques ne sont plus exclusivement formés de quartz et de mica. Notre opinion est encore appuyée par la présence d'éléments élastiques provenant des calcaires dévoniens et cela nous prouve irréfutablement, qu'à cette époque les crêtes dévoniennes dépassaient le niveau de l'eau.

Ces preuves suffisent pour nous permettre de tracer la rive sud du lac dans lequel se déposaient les couches de Peruc des environs de Prague. Elles s'étendaient semble-t-il le long des quartzites de Drabov partant de *Tuklaty* et passant par *Ouvaly* et *Koloděje* pour arriver à *Hor. Měcholupy* et *Chodov*, sur la rive gauche de la Vltava elles longeaient les sommets les plus élevés des roches calcaires près de *Třebotov* et *Roblín*. Il a peut-être existé des golfes du „lac de Peruc“ dépassant cette limite indiquée mais ils étaient certainement peu profonds.

Il est beaucoup plus difficile d'établir l'étendue de la transgression crétacée marine à l'époque où les couches de la II<sup>e</sup> et III<sup>e</sup> zone se sont déposées, car les restes de ces dépôts ne se sont pas conservés aussi loin vers le Sud comme les couches dont nous avons parlé et nous ignorons la profondeur de la mer à cette époque.

Examinons d'abord la situation de la rive droite de la Vltava. Là, partout la transgression marine fut plus puissante que la transgression des couches de Peruc. L'étendue de cette transgression par dessus des contrées non submergées à l'époque où se sont déposées les couches de Peruc en est la preuve. Lors de la formation des grès de Korycany le niveau de la mer ne dépassait pas de beaucoup le niveau du lac d'eau douce. Ceci est prouvé par la présence au Nord de Prague d'îles émergées de la „mer de Korycany“, qui ne furent recouvertes par la mer qu'à l'époque où les couches de la III<sup>e</sup> zone se sont déposées. Il nous reste à évaluer la profondeur de la mer dans les environs de Prague à l'époque de la III<sup>e</sup> zone. La nature lithologique des couches de cette zone (spongilites) prouve que la mer n'y était pas profonde. Les lydiennes dépassant de beaucoup le sol antécétacé, surtout le *Ladví*, nous sont des documents numériques sur la profondeur de la mer. Le *Ladví* a une hauteur de 356 m, tandis que



la hauteur de la base des couches de Bílá Hora, dans les environs de cette colline, est à peu près de 270 *m*. Le *Ladví* formait au-dessus du fond de la mer lors de la transgression de la III<sup>e</sup> zone, une crête d'à peu près 90 *m*. La question est de savoir si le *Ladví* a été submergé ou non. L'examen du récif crétacé se trouvant sur cette colline nous servira à résoudre cette question.<sup>8)</sup> Nous y trouvons, près du sommet, de grands blocs de roche émoussés par les flots et cimentés par une matière marneuse; un peu plus haut, sous le sommet même, le ciment des blocs est un sable ferrugineux. Ce dépôt ne put se former que sous le niveau même de la mer et il doit son origine à la force inouïe des vagues qui se brisaient contre les rocs voisins émergeant de l'eau. Donc près de *Ladví* une saillie dépassait le niveau de la mer du moins dans la première période de la formation des couches de Bílá Hora, de sorte que la mer y avait une profondeur de 80 mètres à peu près.

Si la mer de l'époque de la III<sup>e</sup> zone avait là une telle profondeur il est évident que son rivage était formé par l'extrémité nord du granit du centre de la Bohême, qui même de nos jours s'élève à une hauteur de 440 *m*, c'est-à-dire qu'il dépasse le *Ladví* de 84 mètres. Même en admettant à la „mer de Bílá Hora“ une profondeur deux fois plus grande que celle que nous venons de calculer, cette mer était probablement pourtant limitée vers le Sud, à l'Est de *Prague*, par le granit de la Bohême centrale; la langue de Hradešín constituée par ce granit y formait une presque île, car le Permien de Český Brod était recouvert par la mer crétacée.

Il est plus difficile de résoudre le problème en question quant à la rive gauche de la Vltava. Nous n'y possédons aucun critérium bien basé pour la détermination de la profondeur de la mer de la III<sup>e</sup> zone, car il ne s'y trouve pas de monadnocks de lydienne d'une importance pareille au *Ladví*. Au Sud des restes des roches crétacées s'étend en outre la pénélaine de Karlův Týn, qui n'est pas plus haute que les plateaux crétacés. Nous sommes donc obligés de chercher plus au Sud le rivage de la mer qui existait à l'époque où se sont déposées les couches de Bílá Hora. Les *Hřebeny* sont la première chaîne de montagnes dont l'altitude nous prouve incontestablement qu'elles ont pu arrêter la première transgression de la mer crétacée et par conséquent nous pouvons assurer que sur la rive gauche de la Vltava les eaux de la mer crétacée n'ont pas dépassé les *Brdy*, du moins à la première époque.

Nous pouvons donc nous demander si les zones crétacées supérieures ne se sont pas étendues plus au Sud, dans les environs de Prague,

<sup>8)</sup> Voir: A. Matějka: O geologických poměrech severního Povltaví. Sborník geolog. úst. ČSR. 1920.

V. Dědina: Půda Velké Prahy. Venkov 1920.

V. J. Novák: l. c. 11.)

A. Matějka: l. c. 2.)



que les couches de Bílá Hora et ceci d'autant plus, que par exemple, dans le *České Středohoří* même, ces zones-là ont un caractère transgressif.

L'analyse de ce problème dépasserait les limites de cette étude et du reste, à mon avis, cette supposition n'est pas vraisemblable si nous tenons compte de nos connaissances actuelles sur le caractère et l'étendue des zones crétacées supérieures et d'après ce qu'en dit M. Č. Zahálka dans ses publications. Nous pouvons plutôt supposer que l'étendue de la IV<sup>e</sup> zone au Sud et à l'Ouest était plus petite que celle de la III<sup>e</sup> zone.



Fig. 2. Affleurement du Crétacé dans la vallée dite Přídolí près de Slivenec. A droite couches des calcaires dévoniens ( $g\alpha$ ) fortement redressées, à gauche derrière la route affleurement dans les couches crétacées. Les dépôts crétacés remplissent une dépression dans la surface antécrotacée. (Photographie de l'auteur.)



# Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable, qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 25 Mai 1923.

Je m'occupe, dans cet article, du problème suivant: Soit  $\mathfrak{A}$  un ensemble linéaire fermé, contenu dans l'intervalle fermé  $\langle a, b \rangle$ .<sup>1)</sup> Étant donnée une fonction  $f(x)$  d'une variable  $x$  sur l'ensemble  $\mathfrak{A}$ , on doit compléter la définition de  $f(x)$  aux autres points de  $\langle a, b \rangle$  d'une telle manière que les propriétés de dérivabilité de  $f(x)$  restent conservées. Il faut préciser l'énoncé du problème, ce qui peut se faire de plusieurs manières. On obtient ainsi trois problèmes analogues, dont j'indiquerai rapidement les énoncés et les résultats.

Je rappelle tout d'abord quelques définitions. Si le point  $x$  de  $\mathfrak{A}$  est point limite de droite, j'appelle „nombres dérivés de droite de  $f(x)$  au point  $x$ “ les nombres

$$D^+ f(x) = \limsup \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \quad D_+ f(x) = \liminf \frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

où  $x'$  converge vers  $x$  sur l'ensemble  $\mathfrak{A}$  de droite. Si le point  $x$  est isolé de droite, les nombres  $D^+ f(x)$ ,  $D_+ f(x)$  ne sont pas définis. On a les définitions analogues quant'aux nombres dérivés de gauche. Je dirai que la fonction  $f(x)$  a une dérivée en un point de  $\mathfrak{A}$ , si ce point est point limite de  $\mathfrak{A}$  et si ceux des nombres dérivés de  $f(x)$ , qui sont définis en ce point, sont égaux.

On sait que l'ensemble complémentaire de  $\mathfrak{A}$  par rapport à  $\langle a, b \rangle$  est composé d'un ensemble dénombrable d'intervalles ouverts  $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$  sans points communs. Je désigne les extrémités du „ $n$ -<sup>me</sup> intervalle contigu“  $J_n$  par  $x_n^g, x_n^d$ , où  $x_n^g < x_n^d$ . Alors on a  $J_n = (x_n^g, x_n^d)$ .

<sup>1)</sup> Je suppose, pour simplifier, que les points  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathfrak{A}$ .



Je vais maintenant aborder les divers énoncés de notre problème.

**1<sup>er</sup> problème.** Étant donnée, sur l'ensemble fermé  $\mathfrak{A}$ , une fonction finie  $f(x)$ , on doit trouver une fonction  $F(x)$  définie dans  $\langle a, b \rangle$  telle que:

1.  $F(x) = f(x)$  dans  $\mathfrak{A}$ ;

2. les nombres dérivés de  $f(x)$ , autant qu'ils sont définis, sont égaux aux nombres dérivés correspondants de  $F(x)$ ;

3.  $F(x)$  a une dérivée finie à tout point de l'ensemble  $\mathfrak{A}'$ , complémentaire à  $\mathfrak{A}$  par rapport à  $\langle a, b \rangle$ :

$$\mathfrak{A}' = \langle a, b \rangle - \mathfrak{A}.$$

**1<sup>er</sup> théorème.** On peut toujours trouver une telle fonction  $F(x)$ .

La construction de  $F(x)$  est à peu près évidente: il suffit de poser

$$(1) \quad F(x) = f(x_n^g) + \frac{f(x_n^d) - f(x_n^g)}{x_n^d - x_n^g} (x - x_n^g)$$

pour  $x_n^g < x < x_n^d$ . Mais cette solution si simple du 1<sup>er</sup> problème n'est pas satisfaisante: par exemple, si la fonction  $f(x)$  a une dérivée à tout point de  $\mathfrak{A}$ , la fonction  $F(x)$ , définie par l'égalité (1) dans  $J_n$  et égale à  $f(x)$  dans  $\mathfrak{A}$ , n'aura pas en générale de dérivée aux points  $x_n^g$  et  $x_n^d$ . Pour éviter cet inconvénient, nous sommes conduits à formuler notre problème d'une manière différente que voici:

**2<sup>ème</sup> problème.** Soit  $\mathfrak{A}$  un ensemble parfait et soit  $f(x)$  une fonction, définie sur  $\mathfrak{A}$  et finie, qui a une dérivée (finie ou infinie) aux extrémités des intervalles contigus de  $\mathfrak{A}$  (i. e. aux points  $x_n^g$  et  $x_n^d$ ). On doit trouver une fonction  $F(x)$ , définie sur  $\langle a, b \rangle$ , jouissant des propriétés suivantes:

1.  $F(x) = f(x)$  dans  $\mathfrak{A}$ .

2.  $F(x)$  a une dérivée finie dans  $\mathfrak{A}'$ .

3.  $F(x)$  a une dérivée aux extrémités des intervalles contigus de  $\mathfrak{A}$  (évidemment, on a alors  $F'(x_n^g) = f'(x_n^g)$ ,  $F'(x_n^d) = f'(x_n^d)$ ).

4. Aux autres points de  $\mathfrak{A}$ , les quatre nombres dérivés de  $F(x)$  sont égaux aux nombres dérivés correspondants de  $f(x)$ .

**2<sup>ème</sup> théorème.** On peut toujours trouver une telle fonction  $F(x)$ .

Pour construire une telle fonction  $F(x)$ , nous faisons correspondre à tout nombre entier positif  $n$  un nombre  $\varepsilon_n > 0$  tel que<sup>2)</sup>

$$(2) \quad \varepsilon_n < \sqrt{\frac{x_n^d - x_n^g}{n}},$$

$$(3) \quad \left| f'(x_n^g) - \frac{f(x) - f(x_n^g)}{x - x_n^g} \right| < \frac{1}{n}$$

<sup>2)</sup> Pour simplifier, je suppose tous les nombres dérivés de  $f(x)$  finis.

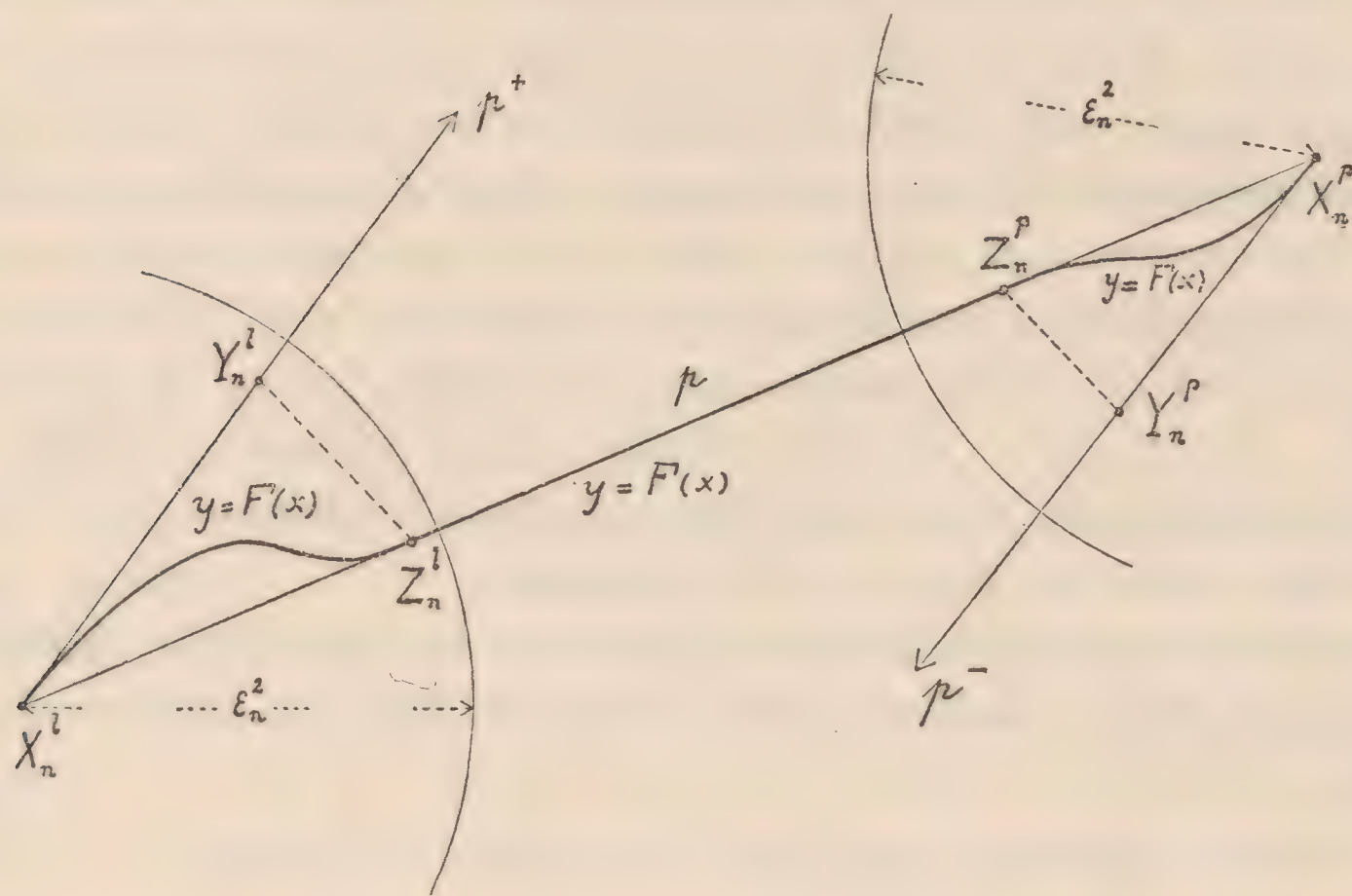


pour tous les  $x$  de  $\mathfrak{A}$ , pour lesquels

$$(4) \quad \begin{aligned} & x_n^g - \varepsilon_n \leq x < x_n^g; \\ & \left| f'(x_n^d) - \frac{f(x) - f(x_n^d)}{x - x_n^d} \right| < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

pour tous les  $x$  de  $\mathfrak{A}$ , pour lesquels

$$x_n^d < x \leq x_n^d + \varepsilon_n.$$



Puis, sur la droite, issue du point  $X_n^g, *)$  dont les coordonnées sont  $[x_n^g, f(x_n^g)]$ , avec le coefficient angulaire  $f'(x_n^g)$ , nous choisisons un point  $Y_n^g$  à droite de  $X_n^g$ , dont la distance du point  $X_n^g$  est plus petite que  $\varepsilon_n^2$ . Sur la droite, joignant le point  $X_n^g$  avec le point  $X_n^d = [x_n^d, f(x_n^d)]$ , nous choisisons un point  $Z_n^g$ , dont la distance de  $X_n^g$  est plus petite que  $\varepsilon_n^2$ . D'une manière analogue, on choisit sur la droite, issue du point  $X_n^d$  avec le coefficient angulaire  $f'(x_n^d)$ , un point  $Y_n^d$  à gauche de  $X_n^d$ ; et sur la droite, joignant  $X_n^g$  avec  $X_n^d$ , on choisit un point  $Z_n^d$ . On exige de plus, que la distance de  $Y_n^d$  et  $Z_n^d$  à  $X_n^d$  soit plus petite que  $\varepsilon_n^2$ . Nous choisisons  $F(x) = f(x)$  dans  $\mathfrak{A}$  et nous construisons, pour  $x_n^g < x < x_n^d$ , la courbe  $y = F(x)$  de telle manière que

$$1. \quad \begin{aligned} D^+ F(x_n^g) &= D_+ F(x_n^g) = f'(x_n^g), \\ D^- F(x_n^d) &= D_- F(x_n^d) = f'(x_n^d); \end{aligned}$$

2.  $F'(x)$  existe et est finie pour

$$x_n^g < x < x_n^d.$$

3. Tout point de la courbe  $y = F(x)$  (pour  $x_n^g < x < x_n^d$ ) ou bien est contenu à l'intérieur de l'un des deux triangles  $X_n^g Y_n^g Z_n^g$ ,  $X_n^d Y_n^d Z_n^d$

\*) Dans la figure, on doit remplacer partout l'indice  $l$  resp.  $p$  par  $g$  resp.  $d$ .



ou bien est situé sur la droite  $\overline{X_n^g X_n^d}$ . On démontre ensuite que cette fonction  $F(x)$  résout le 2<sup>ème</sup> problème (pour les détails de la démonstration, voir mon mémoire original).

Je dois signaler un cas particulier du 2<sup>ème</sup> théorème que voici:

*Si la fonction  $f(x)$ , définie sur l'ensemble parfait  $\mathfrak{A}$ , a une dérivée (finie ou infinie) à tout point de  $\mathfrak{A}$ , on peut trouver une fonction  $F(x)$ , définie dans  $\langle a, b \rangle$ , qui a une dérivée à tout point de  $\langle a, b \rangle$  et telle que  $F(x) = f(x)$  dans  $\mathfrak{A}$ .*

On voit la différence essentielle entre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup> problème: dans le premier problème on exige seulement que les nombres dérivés de  $F(x)$  soient égaux aux nombres dérivés correspondants de  $f(x)$ , *autant que ces derniers sont définis*; tandis que, dans le deuxième problème, on exige de plus encore que, en tout point de  $\mathfrak{A}$ , les nombres dérivés de  $F(x)$  qui ne correspondent à aucun nombre dérivé de  $f(x)$ , aient des valeurs données *a priori* (i. e. on exige que  $D^+ F(x_n^g) = D_+ F(x_n^g) = f'(x_n^g)$ ,  $D^- F(x_n^d) = D_- F(x_n^d) = f'(x_n^d)$ ). Nous allons encore modifier le problème, en prescrivant à ces nombres dérivés des valeurs tout à fait arbitraires. Nous obtenons ainsi le 3<sup>ème</sup> problème:

Soit  $\mathfrak{A}$  un ensemble fermé et  $f(x)$  une fonction finie, définie sur  $\mathfrak{A}$ . Nous donnons, d'une manière tout à fait arbitraire, les nombres, que nous désignons par

$$(5) \quad D^+ f(x_n^g), D_+ f(x_n^g), D^- f(x_n^d), D_- f(x_n^d),$$

vérifiant seulement les conditions

$$(6) \quad \begin{cases} D^+ f(x_n^g) \geq D_+ f(x_n^g) \\ D^- f(x_n^d) \geq D_- f(x_n^d) \end{cases};^3)$$

on doit trouver une fonction finie  $F(x)$ , définie dans  $\langle a, b \rangle$ , remplissant les conditions suivantes:

1.  $F(x) = f(x)$ ,  $D^+ F(x) = D^+ f(x)$ ,  $D_+ F(x) = D_+ f(x)$ ,  $D^- F(x) = D^- f(x)$ ,  $D_- F(x) = D_- f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathfrak{A}$ , excepté  $x = a$ ,  $x = b$ ;
2.  $F(a) = f(a)$ ,  $D^+ F(a) = D^+ f(a)$ ,  $D_+ F(a) = D_+ f(a)$ ,  $F(b) = f(b)$ ,  $D^- F(b) = D^- f(b)$ ,  $D_- F(b) = D_- f(b)$ .

Pour pouvoir répondre d'une manière simple à ce problème, j'introduit en premier lieu cette définition: Soit  $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$  l'ensemble des intervalles contigus de  $\mathfrak{A}$ , rangé dans un ordre quelconque. Je désigne par  $\varphi(x, n)$  la distance du point  $x$  à l'intervalle  $J_n$ . Je dis que l'ensemble  $\mathfrak{A}$  est **régulier**, s'il existe une fonction positive  $\chi(n)$  du nombre (positif entier)  $n$  telle qu'à chaque  $x$  de  $\mathfrak{A}$  on peut trouver un nombre  $n_x$  tel que  $\varphi(x, n) > \chi(n)$  pour  $n > n_x$ .<sup>4)</sup>

<sup>3)</sup> Ainsi, à chaque  $x$  de  $\mathfrak{A}$ , on a fait correspondre quatre nombres:  $D^+ f(x)$ ,  $D_+ f(x)$ ,  $D^- f(x)$ ,  $D_- f(x)$ .

<sup>4)</sup> On démontre facilement que la régularité de  $\mathfrak{A}$  est indépendante de l'ordre, dans lequel l'ensemble des intervalles contigus est rangé.



On peut alors énoncer le théorème suivant :

**3<sup>ème</sup> théorème.** *Soit  $\mathfrak{A}$  un ensemble fermé. Pour que l'on puisse trouver une fonction  $F(x)$ , résolvant le troisième problème, quelle que soit la fonction finie  $f(x)$ , définie sur  $\mathfrak{A}$  et quels que soient les nombres (5), vérifiant les conditions (6), il faut et il suffit que l'ensemble  $\mathfrak{A}$  soit régulier.*

Pour la démonstration, qui est bien simple, je renvoie à mon mémoire original.

Je vais encore énoncer quelque théorèmes sur les ensembles réguliers

(A) Si la frontière d'un ensemble fermé  $\mathfrak{A}$  est un ensemble dénombrable, l'ensemble  $\mathfrak{A}$  est régulier.

(B) S'il existe un intervalle ouvert  $J$  tel que l'enveloppe fermée de l'ensemble  $J\mathfrak{A}$  est parfaite et non dense, alors l'ensemble  $\mathfrak{A}$  n'est pas régulier.

(C) Si  $\mathfrak{A}$  est parfait et régulier, alors  $\mathfrak{A}$  est l'enveloppe fermée d'un ensemble qui est somme d'une infinité dénombrable (ou d'un nombre fini) d'intervalles fermés sans points communs.

(D) Si la frontière d'un ensemble fermé  $\mathfrak{A}$  est régulière, alors  $\mathfrak{A}$  est lui-même régulier.

(E) Si l'on décompose un ensemble fermé  $\mathfrak{A}$  en somme d'un ensemble parfait  $\mathfrak{P}$  et d'un ensemble dénombrable (d'après le théorème de Cantor-Bendixson) et si  $\mathfrak{P}$  est régulier,  $\mathfrak{A}$  est lui-même régulier.

Pour la démonstration de ces théorèmes voir mon mémoire original.



# Le théorème de Riemann-Roch pour les fonctions à multiplicateurs (de F. Prym).

Par

KAREL DUSL.

Présenté le 23 Mars 1923.

Puisque le quotient de deux fonctions à multiplicateurs\*) est la fonction rationnelle sur la surface de Riemann, il est possible faire l'application du théorème de Riemann-Roch\*\*) pour ces fonctions.

1. Le théorème spécial. On connaît tous les pôles  $M$  d'une fonction à multiplicateurs et on demande le nombre des fonctions linéairement indépendantes du même système. Le quotient de deux fonctions  $F, F_0$  avec des pôles communs:  $\frac{F}{F_0}$  sera une fonction rationnelle avec des pôles dans les zéros de la fonction  $F_0$ . De là, en faisant usage du théorème de Riemann-Roch résulte l'équation:

$$\underline{q + 1 = N - p + 1 + h + 1} \quad (1)$$

dans laquelle  $q + 1$  signifie le nombre total des constantes arbitraires dans l'expression générale de la fonction et  $h + 1$  est le nombre de différentiels  $dv$  linéairement indépendants de la première espèce, qui ont leurs zéros dans les  $N$  zéros de la fonction  $F_0$ , ou bien, si l'on pose  $\frac{dv}{F_0} = dV'$ ,  $h + 1$  donne aussi le nombre de différentiels  $dV'$  linéairement indépendants des intégrales à multiplicateurs du système complémentaire dont les zéros sont dans les pôles donnés des fonctions à multiplicateurs.

Puisque  $N = M + \sum \lambda$ , l'équation (1) peut se mettre sous la forme:

$$\underline{\sum \lambda + M - q = p - (h + 1)} \quad (I)$$

---

\*) Prym. Journ. de Crelle LXX. 1869. — Appell, Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs. J. Liouville 1884. — Prym-Rost, Theorie der Prymschen Functionen I. Ord. 1911.

\*\*) Riemann, Ges. Werke 1871. Roch Crelle 64.



qui représente une analogie parfaite du théorème spécial de Riemann-Roch. L'expression générale des fonctions considérées est:

$$F = \mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \dots + \mu_{q+1} F_{q+1} \quad (2)$$

où  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_{q+1}$  sont les  $q + 1$  constantes arbitraires et  $F_1, F_2 \dots F_{q+1}$  sont les  $q + 1$  fonctions linéairement indépendantes du même système de multiplicateurs et avec les  $M$  mêmes pôles  $M$ . La position de  $q$  zéros de la fonction  $F$  peut être fixée arbitrairement.

2. Le théorème général de Riemann-Roch pour les fonctions rationnelles aux diviseurs fractionnels\*) s'applique pour les fonctions à multiplicateurs comme il suit:  $F_0$  soit une fonction avec  $M_0$  pôles et  $N_0$  zéros donnés, dont  $m$  pôles et  $n$  zéros appartiennent aux d'autres fonctions  $F$  du même système des multiplicateurs. Puis le quotient:

$$\frac{F}{F_0} = R$$

est la fonction rationnelle, dont on connaît  $M_0 - m$  zéros et  $N_0 - n$  pôles. Le théorème général de Riemann-Roch donne dans ce cas:

$$\underline{N - n - (M - m) - q = p - (h + 1)} \quad (II)$$

la différence  $N - M = N_0 - M_0 = \sum \lambda$  pour toutes les fonctions du même système des multiplicateurs. Le nombre  $h + 1$  est le nombre des différentiels linéairement indépendants Abéliens  $d\omega$ , qui ont leurs zéros dans les  $N_0 - n$  zéros et des pôles dans les  $M_0 - m$  pôles en reste de la fonction  $F_0$ . Posant  $\frac{d\omega}{F_0} = dH'$ , les  $m$  pôles de la fonction  $F_0$  sont des zéros de  $dH'$  et les  $n$  zéros sont des pôles pour le différentiel  $dH'$ ,  $H'$  est l'intégral à multiplicateurs du système complémentaire.

Pour les fonctions spéciales  $N = M$  (les singularités  $c_1 c_2 \dots c_k$  sont absentes,  $\sum \lambda = 0$ ) L'équation (II) prend la forme:

$$\underline{m - n - q = p - (h + 1)}, \quad (III)$$

qui constitue une analogie parfaite du théorème général de Riemann-Roch, aussi bien, que l'équation (I) est l'analogie du théorème spécial.

Il est possible déduire toutes ces équations directement, quand on considère celles des équations de la théorie générale des fonctions à multiplicateurs qui constituent la généralisation du théorème d'Abel. L'auteur en donne un exemple.

---

\*) Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen, p. 301. Rozprava, Bulletin No. 25.



# Sur les intégrales curvilignes du produit vectoriel $\mathfrak{B} \wedge d\mathbf{r}$ .

Par

KAREL DUSL.

Présenté le 25 Mai 1923.

L'auteur établit une démonstration de la transformation directe de l'intégrale  $\mathfrak{S} = \int_C \mathfrak{B} \wedge d\mathbf{r}$  long du contour d'une courbe fermée en l'intégrale de surface sans faire usage de vecteur auxiliaire de A. Föppl. \*)

Prenons pour la courbe d'intégration un parallélogramme élémentaire dont les côtés sont  $d\mathbf{r}$  et  $\delta\mathbf{r}$  et dont la grandeur est représentée par le vecteur  $d\mathfrak{B}$ . La portion correspondante de l'intégrale le long du parallélogramme sera: \*\*)

$$d\mathfrak{S} = (d\mathbf{r} \times \nabla) (\mathfrak{B} \wedge \delta\mathbf{r}) - (\delta\mathbf{r} \times \nabla) (\mathfrak{B} \wedge d\mathbf{r}) \quad (\text{I})$$

et c'est la transformation de cette formule qui présente quelques difficultés. L'auteur donne une preuve de l'équation suivante d'algèbre vectorielle:

$$(\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) - (\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{D}) = \mathfrak{A} \wedge [\mathfrak{B} \wedge (\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D})] \quad (\text{II})$$

dans la quelle  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  sont quatre vecteurs quelconques. L'application immédiate transforme la formule (I) en:

$$d\mathfrak{S} = [\nabla \wedge d\mathfrak{B}] \wedge \mathfrak{B} \quad (\text{III})$$

où l'opérateur Hamiltonien  $\nabla$  ne se porte qu'au vecteur variable  $\mathfrak{B}$ .

Quand on fait usage d'une formule bien connue d'algèbre vectorielle pour transformer le produit des trois vecteurs, qui figure dans le second membre de l'équation (III) on a:

$$d\mathfrak{S} = (\nabla \times \mathfrak{B}) d\mathfrak{B} - \nabla \mathfrak{B} \times d\mathfrak{B} \quad (\text{IV})$$

\*) Dr. A. Föppl. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Leipzig 1894. S. 72.

\*\*) La notation franco-italienne. (Burali-Forti.)



et, parceque la divergence du produit scalaire de deux vecteurs s'exprime comme il suit:

$$\nabla (\mathfrak{U} \times \mathfrak{B}) = \nabla \mathfrak{B} \times \mathfrak{U} + \nabla \mathfrak{U} \times \mathfrak{B} \quad (1)$$

l'équation (IV) devient:

$$d \mathfrak{J} = (\nabla \times \mathfrak{B}) d \mathfrak{P} - \nabla (\mathfrak{B} \times d \mathfrak{P}) + \nabla d \mathfrak{P} \times \mathfrak{B}. \quad (V)$$

Les symboles  $\nabla \mathfrak{B}$  et  $\nabla d \mathfrak{P}$  sont les tenseurs de la forme:

$$\nabla \mathfrak{B} = i_1 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + i_2 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + i_3 \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}. \quad (2)$$

Le contour  $C$  forme la frontière d'une portion de surface. L'intégrale curviligne d'une courbe fermée ( $C$ ) est égal à la somme des intégrales curvilignes le long des parallélogrammes élémentaires dans lesquels la surface peut être supposée divisée. En effet, chacun des côtés de ces parallélogrammes est intégré deux fois dans deux sens contraires et les résultats se détruisent sauf pour les côtes qui se confondent avec la courbe fermée. La somme des portions de l'intégrale le long des parallélogrammes donne l'intégral curviligne transformée en l'intégral de surface:

$$\begin{aligned} \int_C \mathfrak{B} \wedge dx &= \int_P (\nabla \times \mathfrak{B}) d \mathfrak{P} - \nabla \mathfrak{B} \times d \mathfrak{P} \\ &= \int_P (\nabla \times \mathfrak{B}) d \mathfrak{P} - \nabla (\mathfrak{B} \times d \mathfrak{P}) + \nabla d \mathfrak{P} \times \mathfrak{B} \end{aligned} \quad (VI)$$

le résultat qui est bien conforme à celui d'autres auteurs et qui ne contient aucun vecteur auxiliaire.

Dans la notation tensorielle la différence:

$$\nabla \mathfrak{B} - \nabla \times \mathfrak{B}$$

est un tenseur:  $\underline{\nabla} \mathfrak{B}^*$ ), l'opérateur tensoriel  $\underline{\nabla}$ :

$$\underline{\nabla} = i_1 \frac{\partial}{\partial x} + i_2 \frac{\partial}{\partial y} + i_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

et le tenseur  $\underline{\mathfrak{B}}$  signifie la multiplication vectorielle:

$$\underline{\mathfrak{B}} \times \mathfrak{U} = \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{U} \quad (3)$$

Le „nabbla tensorielle“ appliqué au tenseur a la notation:  $v t x \mathfrak{B}^*$ ) (vortex) et le résultat (VI) dans la forme la plus abrégée s'écrit:

$$\underline{\int_C \mathfrak{B} \wedge dx} = - \underline{\int_P d \mathfrak{P} \times v t x \mathfrak{B}^*}. \quad (VII)$$

\*) Spielrein, Vectorrechnung 308, 373.



# Sur les singularités des séries entières situées sur le cercle de convergence.\*)

Par

**Miloš Kössler.**

Présenté le 26 Octobre 1923.

Soit donnée la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1. \dots\dots\dots (1)$$

En faisant usage de la transformation quadratique

$$z = x + \frac{3}{4} x^2$$

on peut démontrer le théorème:

*La condition nécessaire et suffisante pour que  $z = e^{i\varphi}$  soit un point singulier de la série (1) est donnée par la relation*

$$\overline{\lim} |B_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}, \quad \text{où}$$

$$B_n = \sum_{k = \left[ n \left( \frac{1}{4} - \mu \right) \right]}^{\left[ n \left( \frac{1}{4} + \mu \right) \right]} \binom{n-k}{k} \left( \frac{3}{4} \right)^k a_{n-k} e^{-ik\varphi} \dots (B)$$

*et  $\mu$  est une constante aussi petit que l'on veut, indépendante de  $n$ .<sup>1)</sup>*

Nous appelons le coefficient

$$a_{n - \left[ \frac{n+1}{4} \right]}$$

\*) Rozpravy Čes. Akademie roč. XXXII., čís. 25: „O singularitách řady mocninné ležících na kružnici konvergenční.“

<sup>1)</sup> Kössler: Rend. real. acc. naz. dei lincei, XXXII (5), 1<sup>o</sup> sem. fasc. 10<sup>o</sup>, p. 528.



contenu dans l'expression  $B_n$  le coefficient *central* et les autres coefficients dans cette expression *le groupe* du coefficient central. Cela étant, nous choisissons, dans l'ensemble des  $a_n$ , une suite

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_q} = |a_{n_q}| e^{i\varphi_{n_q}}, \dots \quad (L)$$

satisfaisant à la condition

$$\lim_{q \rightarrow \infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = 1,$$

ce qu'on peut faire toujours d'une infinité de manières. Ces suites du type (L) jouent un rôle remarquable dans la théorie des séries entières. Le *groupe* du coefficient *central*  $a_{n_q}$  est défini par

$$a_{n_q+s}, \quad s = -\lambda_2, -\lambda_2 + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, +\lambda_1,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left[ \frac{N_q + 1}{4} \right] - \left[ N_q \left( \frac{1}{4} - \mu \right) \right] \\ -\lambda_2 &= \left[ \frac{N_q + 1}{4} \right] - \left[ N_q \left( \frac{1}{4} + \mu \right) \right], \end{aligned}$$

$$N_q = \frac{4n_q - \lambda}{3}, \quad \lambda \equiv n_q \pmod{3}.$$

Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème spécial:

Choisissons une suite du type (L). A chaque  $a_{n_q}$  de cette suite un groupe de coefficients  $a_{n_q+s}$  est associé.  
Si l'on peut trouver des angles  $\psi_q$  de manière que

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ \quad \lim_{q \rightarrow \infty} |\cos(\varphi_{n_q} + \psi_q)|^{\frac{1}{N_q}} &= 1, \\ 2^\circ \quad \cos\{\varphi_{n_q+s} + s\varphi + \psi_q\} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \dots \quad (I)$$

pour chaque  $q$  et chaque  $s$  du groupe respectif, le point  $z = e^{i\varphi}$  est singulier.

Ce théorème est une généralisation essentiel du théorème de Vivanti-Dienes.<sup>2)</sup>

Faisant usage du théorème (I), on peut en ne changeant que les angles  $\varphi_n$ , obtenir, qu'un point  $e^{i\varphi}$ , choisi à volonté sur la circonférence du cercle de convergence, devienne singulier pour  $f(z)$ . Un cas particulier d'un tel changement est le changement du *signe* de  $a_n$ . A cet effet, choisissons la suite (L) de façon que les nombres  $B_{N_q}$ , dans lesquels les membres de (L) occupent les positions centrales, définissent des groupes des  $a_n$ , qui n'aient pas, deux à deux, des éléments communs.<sup>3)</sup> Cela posé, choisis-

<sup>2)</sup> Vivanti, Riv. di Matem., vol. 3, 1893, pp. 111—114; Dienes, Journ. de Math. (6) vol. 5, 1909, pp. 327—413.

<sup>3)</sup> Il suffit, à cet effet, de choisir la suite (L) de manière, que  $n_{q+1} \geq (1 + \varepsilon) n_q$ ,  $\varepsilon$  étant une constante positive aussi petite qu'on veut.



sons dans le théorème (I)  $\psi_q = 2\pi - \varphi_{n_q}$  et changeons dans chaque groupe  $B_{N_q}$  les angles  $\varphi_{n_q+s}$  de manière que la condition 2<sup>o</sup>) soit remplie. Il est évident qu'on peut laisser simplement  $\varphi_{n_q+s}$  inaltéré, si la condition 2<sup>o</sup>) est remplie, ou y ajouter  $\pi$ , si elle ne l'est pas.

En choisissant convenablement une suite des suites (L) on peut, par un procédé analogue, atteindre en ne changeant que les angles  $\varphi_n$ , ou simplement les signes de  $a_n$ , que chaque point d'une suite arbitraire  $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots$  choisi à volonté devienne singulier pour  $f(z)$ . Si, en particulier, la suite  $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots$  forme un ensemble dense sur la circonférence du cercle de convergence, la circonférence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction. Cet énoncé donne non seulement une démonstration nouvelle, mais encore une généralisation essentielle du théorème de F a t o u - P o l y a,<sup>4)</sup> car on a ainsi un procédé déterminé pour effectuer les changements des signes des  $a_n$ , dans chaque cas particulier.

Nous pouvons, de même généraliser un théorème de H a d a m a r d,<sup>5)</sup> comme il suit:

Choisissons une suite du type (L). Si à chaque  $a_{n_q}$  de cette suite est associé un groupe de coefficients  $a_{n_q+s}$  tels, que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^1 |a_{n_q+s}| + \sum_{s=-1}^{-1} |a_{n_q+s}| &= |a_{n_q}| \cdot r_q, \\ 0 \leq r_q < 1; \quad \lim_{q \rightarrow \infty} |1 - r_q|^{\frac{1}{N_q}} &= 1, \end{aligned} \right\} \dots \text{(II)}$$

la circonférence du cercle de convergence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction.

Voilà une série particulière de cette sorte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_n| &< \text{const. pour chaque } n \neq 2^q, \\ |a_n| &\geq n \cdot \text{const. pour chaque } n = 2^q, \quad q = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

La démonstration du théorème de M. F a b r y,<sup>6)</sup> généralisé d'une manière analogue sera donnée dans un autre mémoire.

<sup>4)</sup> F a t o u, Acta Math. vol. 30, 1906, p. 400; P o l y a - H u r w i t z, Acta Math. vol. 40, 1916, pp. 179—183.

<sup>5)</sup> H a d a m a r d, Journ. de Math. (4) 8, 1892 p.

<sup>6)</sup> F a b r y Ann. Ec. Norm. (3) 13, 1896 pp. 107—114.



# Étamines à limbe double dans les fleurs de *Mimulus*.

Contribution à la tératologie expérimentale et à la biologie de fleurs.

Par

Dr. JAN VILHELM.

(Avec une figure dans le texte.)

Présenté le 26 Octobre 1923.

Au mois de septembre dernier, mon collègue Arthur Brožek, docteur et agrégé de l'université de Prague, m'offrit, afin que je pusse m'en servir pour des recherches morphologiques, diverses fleurs de *Mimulus*, obtenues au cours des expériences génétiques qu'il a entreprises au jardin d'essai de l'Institut pour la physiologie des plantes du professeur Dr. Boh. Němec.

Les fleurs aux étamines anormales apparurent sur les plantes bâtardes ( $F_2$ ), issues du croisement du bâtard en mosaïque, *Mimulus tigrinoides* Hort. var. Paulina Brož, avec la lignée pure, *Mimulus tigrinoides* luteus Hort. var. flore pleno. Les fleurs de cette race sont à fleurs pleines, phénomène produit par la paracorolle, comme je l'ai démontré déjà en 1920, dans le „*Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême*“ (*La paracorolle des fleurs de Mimulus. Contribution à la morphologie et à la biologie des fleurs*) et, de nouveau, en 1922, dans la même publication, où j'examinai la valeur morphologique de cette paracorolle (*La signification morphologique du calice, de la corolle et de la paracorolle dans les fleurs de Mimulus. Contribution à la morphologie des fleurs*).

Par pollinisation autogame, les fleurs à paracorolle de cette variété conservent pendant des années ce signe morphologique nouveau. En la croisant avec le bâtard *Mimulus tigrinoides* var. Paulina, il en est résulté un hybride dont quelques individus présentaient des fleurs munies de paracorolle, tandis que d'autres montraient des étamines anormales ayant des excroissances particulières ressemblant à des organes paracorollaires.



## I. Étamines anormales dans les fleurs de *Mimulus*.

### 1. Premier type d'étamines anormales.

(Fig. N<sup>o</sup> 2, 3 et 4.)

La fleur, dans laquelle se trouvait les étamines anormales de ce premier type, avait, à première vue, une constitution régulière. Deux de ses étamines étaient normales, les deux autres anormales. Dans une des anormales on voyait un filet régulier portant une anthère à loges normales. Mais à l'endroit où le filet cesse d'être sondé au tube de la couronne, il commençait à se diviser du côté tourné vers la couronne et la seconde moitié aplatie, de forme pétaloïde, faisait corps avec le filet. Cette partie, d'abord étroite, se terminait, à son extrémité libre, dépassant l'anthère, en forme d'ongle (unguliforme). La face du pétaloïde tournée vers la couronne était de même couleur que la couronne (jaune à taches rouge foncé) et couverte de poils produits par l'épiderme. Cette partie pétaloïde de l'étamine, poussée originairement du côté de la couronne, se tourne par torsion de 180° vers l'intérieur de la fleur et vient placer son extrémité élargie au-dessus de l'anthère. Par là, l'étamine, originairement introrsa, devient extrorsa par suite de cette torsion qui accompagne sa croissance (fig. N<sup>o</sup> 2 et 3).



L'autre étamine anormale correspondait à celle que nous venons de décrire, sauf que ses deux parties étaient beaucoup plus décollées (fig. N<sup>o</sup> 4) et que leur extrémité supérieure était complètement libre.



## 2. Deuxième type d'étamines anormales.

(Fig. N° 5 et 6.)

Dans une autre fleur de l'hybride nous avons trouvé trois étamines anormales. Elles avaient des anthères normales et leur filet se divisait en fourche. Leur partie intérieure était transformée en excroissance pétaloïde, de même teinte que la couronne. L'extrémité supérieure était également tournée de 180° par torsion. La division de l'étamine avait atteint un stade beaucoup plus avancé (fig. 5 à 6). La troisième des étamines anormales pétaloïde ressemblait à un petit bateau et couvrait d'en haut une anthère tant soit peu dégénérée.

## 3. Troisième type d'étamines anormales.

(Fig. 7.)

Dans une des fleurs de l'hybride, nous avons trouvé une étamine développée d'une forme différente des deux types précédents. Elle avait une anthère normale (fig. 7). La partie pétaloïde était sondée, depuis sa base au filet du côté opposé à la couronne. Mais elle s'élevait en deux lobes au-dessus de l'anthère. Cette étamine anormale, bien que différant par la forme des types précédents, se divisait aussi en deux parties, la fertile et la pétaloïde, toutes deux sondées jusqu'à l'anthère. L'excroissance pétaloïde n'est pas le filet élargi en forme d'aile, car elle ne croît pas du côté du filet. Le filet non plus ne la traverse pas.

## II. Signification morphologique des étamines anormales dans le fleur de *Mimulus*.

Les modifications de forme dans les étamines que nous avons décrites se sont produites par division (chorisis). D'après la classification de D o m i n,\*) ce cas appartient à la chorisis dans le sens le plus étroit du mot, où les parties issues du même organe orginaire apparaissent comme parts d'un même tout. Il est vrai que la division de l'étamine n'est pas rare, mais la façon dont elle se produit dans les fleurs de *Mimulus* n'était pas connue jusqu'à ce jour, elle n'est pas non plus habituelle et, enfin, elle n'avait pas été encore observée dans son origine.

Les fleurs à paracorolle chez le *Mimulus* se sont produites dans les expériences de B r o ž e k par mutation, tandis que les étamines bifides sont nées expérimentalement du croisement. Ce signe morphologique acquis, héréditairement maintenu par autogamie, la division du phyllome, s'est porté chez les bâtards sur les étamines. Les anomalies obtenues par l'expérience chez le *Mimulus* sont la preuve directe de la façon dont se produisent génétiquement les anomalies morphologiques chez les plantes.

\*) Voir: D o m i n K a r e l: *Dichotomy and Chorisis*. A Morphological Study. Bull. internat. de l'Acad. de Scienc. de Bohême. 1923.



C'est ce qui fait aujourd'hui la matière d'une nouvelle branche de la tératologie végétale: *la tératologie expérimentale*.

La paracorolle dans la fleur du *Mimulus* représente une corolle altérée en limbe double; de même on peut considérer l'étamine bifide comme à limbe double. *Les nouvelles variétés acquises se maintiennent quelques années en culture par autogamie (expériences de Brožek). Dans la nature, les nouvelles formes munies de nouveaux organes disparaissent rapidement, si ces organes ne correspondent pas aux nécessités des fonctions vitales (par ex. à la fécondation par les insectes). Diverses qualités héréditaires latentes, ainsi que la faculté de former différentes parties d'organes, se font valoir souvent tout-à-coup, et si elles peuvent exercer leurs fonctions dans la vie de la plante, elles se maintiennent dans les générations postérieures et ce sont elles qui donnent naissance à de nouvelles formes, à de nouvelles variétés.*

### III. Signification des anomalies biologiques des étamines de *Mimulus*.

L'anthère des étamines anormales de *Mimulus* est normale. La partie pétaloïde est, en ce qui concerne la teinte et la structure épidermique, pareille à l'endroit et au revers de la corolle. L'endroit du pétaloïde, de la même couleur que la corolle, est, dans sa position originare, tourné vers elle. Si cette coloration sert à montrer le chemin des anthères aux insectes qui visitent la fleur, ces derniers, lorsqu'ils remontrent ces étamines anormales, chercheraient en vain le pollen entre l'excroissance pétaloïde de l'étamine et le tube de la corolle. Mais l'étamine exécute, au milieu de sa partie libre, une torsion de  $180^0$ , de sorte que l'anthère se trouve placée entre le tube de la corolle et la partie pétaloïde de l'étamine qui se courbe sur elle en forme de toit; par là la coloration (maculée) du pétaloïde prend une valeur fonctionnelle et contribue à augmenter l'efficacité fonctionnelle de la couronne.

Je remercie le docteur A. Brožek de m'avoir fourni le matériel nécessaire à ce travail.

#### Explication de figures.

- Fig. 1. Etamine normale de *Mimulus*.
- Fig. 2. Premier type d'étamine à limbe double vu de face.
- Fig. 3. La même étamine vue de côté.
- Fig. 4. Deuxième type d'étamine bifide à limbe double.
- Fig. 5. Autres étamines du même type.
- Fig. 6. Autre étamine du même type.
- Fig. 7. Troisième type d'étamine à limbe double.



# The acidity of mannitol.

By J. HEYROVSKÝ and P. TERECHOV.

Presented the 9. November 1923.

In investigating the stabilizing influence of mannitol upon solutions of aluminates the authors observed the slight but very distinct neutralizing action of mannitol displayed in alkaline solutions. It has been found possible to determine this acidity of mannitol quantitatively by using various physico-chemical methods. These were:

## 1. Cryoscopic determinations:

The lowering of freezing point of an aqueous solution of sodium hydroxide is given as

$$\Delta t = 1.86^{\circ} ([\text{Na}\cdot] + [\text{OH}' ] + [\text{NaOH}]),$$

where the square brackets denote concentrations of the respective particles in gram-equivalents per litre.

If we now add mannitol so that its concentration is  $M$  gram molecules per litre of the alkaline solution, the lowering becomes

$$\Delta t_1 = 1.86^{\circ} \{[\text{Na}\cdot] + [\text{OH}' ] + [\text{NaOH}] + [M]\}$$

provided no reaction takes place between the mannitol and alkali. If, however, mannitol forms with alkalis „mannitate“ ions,  $m'$ ,

$$\Delta t_2 = 1.86^{\circ} \{[\text{Na}\cdot] + [\text{OH}' ] + [\text{NaOH}] + [M] - [m']\},$$

i. e. the depression of freezing point will be less than expected from the added amount of mannitol. We thus have means to estimate the concentration  $[m']$  by observing this depression.

Tab. 1. shows some of the results thus obtained. In column  $K_0$  the values of the Ostwald's (dilution) constant are calculated as

$$K_0 = \frac{[\text{H}\cdot] \cdot [m']}{[M] - [m']} = \frac{K_{\omega} \cdot [m']}{([\text{Na}\cdot] - [m']) ([M] - [m'])},$$

where  $K_{\omega}$  denotes the ionic product of water (at  $0^{\circ}\text{C} = 0.6 \times 10^{-14}$ ).



Tab. 1.

Lowering of freezing point of sodium hydroxide solutions with mannitol.

Concen- tration of NaOH	Total con- centr. of mannitol	$\Delta t_1$ calcul.	$\Delta t_2$ observed	$[m']$	$K_0$	$K$ specific conductance at 25.0°
0.4102	0		1.447	0		0.08261
0.4052	0.1032	1.624	1.509	0.0618	$2.61 \cdot 10^{-14}$	0.07458
0.4001	0.2071	1.799	1.589	0.1129	$2.45 \cdot 10^{-14}$	0.06392
0.3951	0.3115	1.976	1.690	0.1538	$2.42 \cdot 10^{-14}$	0.05652
0.3902	0.4165	2.154	1.799	0.1909	$2.55 \cdot 10^{-14}$	0.04881
0.3804	0.6253	2.507	2.068	0.2360	$2.52 \cdot 10^{-14}$	0.03977
0.1476	0		0.521	0		
0.1451	0.1451	0.783	0.702	0.04355	$2.54 \cdot 10^{-14}$	
0.1426	0.2852	1.034	0.908	0.06774	$2.50 \cdot 10^{-14}$	
0.1401	0.4275	1.316	1.162	0.08280	$2.52 \cdot 10^{-14}$	

## 2. Solubility in alkaline solutions:

In these determinations four broad test-tubes were filled with sodium hydroxide solutions of various concentrations and a fifth with distilled water; to all mannitol in excess was added to ensure saturation and the solutions were shaken for two days on a machine. The increase of solubility of mannitol in alkaline solutions, which must be due to mannitate formation, was found in the following manner:

20 cc of every saturated solution were exactly titrated by hydrochloric acid and after this neutralization evaporated; the dry residue gave the sum of the sodium and mannitol contents, the residue from pure water showing the solubility of mannitol at the temperature of the experiment. The increase of solubility in alkaline solutions is thus the difference between the mannitol contents in alkalies and that in water. This increase has been taken as equal to the mannite anions, which were formed by the interaction with hydroxyl ions.

Tab. 2.

Solubility of mannitol in sodium hydroxide solutions, at 17.5 C°.

(Solubility in water found 0.8239 gr-mol.)

Concen- tration of NaOH	in 20 cc found			$[m']$	$K_0$
	gr NaCl	gr residue	gr of mannitol		
0	0	3.0008	3.0008		
0.1257	0.14693	3.5508	3.4038	0.1106	$8.94 \cdot 10^{-14}$
0.4547	0.53162	4.9704	4.4387	0.3948	$8.0 \cdot 10^{-14}$
0.8676	1.01090	6.6542	5.6433	0.7255	$6.33 \cdot 10^{-14}$
1.7031	1.99130	8.1900	6.1987	0.8781	$1.29 \cdot 10^{-14}$



### 3. Potentiometric determinations:

Here the decrease of the activity of hydroxyl ions caused by additions of mannitol to alkalies has been followed by measurements of changes of potentials exhibited at the hydrogen electrode or mercuri-oxide electrode. The diffusion potential was lessened by using a concentrated potassium chloride solution between the solutions.

The results are tabulated in Tab. 3, where also the acidic constant is given.

Tab. 3.

a) Differences of potential between a mercuri-oxide electrode in alkaline solutions of mannitol and the normal calomel electrode, at 0° C.

Concentr. of NaOH	Concentr. of mannitol	Pot. differ. <i>E</i> in volt	Activity of OH' = [OH']	<i>K</i> <sub>0</sub>
0.4102	0	0.1315	0.4102	—
0.4001	0.2076	0.1231	0.2871	2.49 · 10 <sup>-14</sup>
0.3911	0.4136	0.1148	0.2018	2.51 · 10 <sup>-14</sup>
0.3731	0.8218	0.1006	0.1105	2.55 · 10 <sup>-14</sup>
0.03663	0	0.0782	0.03663	—
0.03659	0.009143	0.0774	0.03541	2.53 · 10 <sup>-14</sup>
0.03647	0.03657	0.0751	0.03211	2.53 · 10 <sup>-14</sup>
0.03639	0.05484	0.0737	0.03026	2.50 · 10 <sup>-14</sup>

b) Differences of potential between a platinized hydrogen electrode in alkaline solutions of mannitol and the normal calomel electrode.

Conc. of NaOH	Conc. of mannitol	at 0° C			at 22° C		
		<i>E</i> volt	[OH']	<i>K</i> <sub>0</sub>	<i>E</i> volt	[OH']	<i>K</i> <sub>0</sub>
0.1476	0	1.034	0.1476	—	1.046	0.1476	—
0.1450	0.1449	1.025	0.1007	2.63 · 10 <sup>-14</sup>	1.036	0.0998	5.02 · 10 <sup>-14</sup>
0.1426	0.2879	1.018	0.0748	2.47 · 10 <sup>-14</sup>	1.027	0.0701	5.40 · 10 <sup>-14</sup>
0.1353	0.7129	1.002	0.0379	2.50 · 10 <sup>-14</sup>	1.011	0.0375	4.71 · 10 <sup>-14</sup>

### 4. Conductometric determinations.

The decrease of the electric conductance of alkaline solutions after additions of mannitol is shown already in the last column of Tab. 1. Much more exact, however, is the way to determine the ionic relationships from the conductivities of ammoniacal mannitol solutions, similarly as it has been tested upon solutions of ammonium aluminates.\*) Here again

\*) J. Heyrovský: Trans. Chem. Soc. (1920), 117, p. 1013.



we obtain for every solution a complicated system of six equations with six unknowns, which however give surprisingly concordant results, as will be evident from Tab. 4.

The mobility of the "mannitate" anion,  $\lambda_{m'}$ , from these equations comes out at  $0^\circ = 20$ , at  $25^\circ \text{ C } \lambda_{m'} = 35$ .

Knowing now the value  $\lambda_{m'}$ , we are able to estimate the concentration of mannitate ions in the sodium hydroxide solutions of Tab. 1. Thus the first addition of mannitol, which produces the decrease of specific conductance from 0.08261 to 0.07458, must cause an increase of 0.0581 gram anions  $m'$  per litre; the cryoscopic measurement point to an increase of 0.0618. Further calculations, however, do not show such a close agreement, doubtlessly owing to the change of dissociation produced in sodium hydroxide.

### 5. Calorimetric determinations.

The heat evolved when 20 cc of a (e. g.) 0.4713 molar solution of mannitol in water were mixed with 493 grams of a 2 n. solution of sodium hydroxide was 14.86 cal., considering the degree of hydrolysis of the formed sodium mannitate, we obtain for the heat of the reaction

Measurements of the conductivities of ammoniacal solutions containing mannitol.

Tab. 4.

Concentr. of $\text{NH}_3$	Conc. of mannitol	at $25^\circ \text{ C}$						at $0^\circ \text{ C}$			
		$K$ specif. conduct.	$[\text{OH}']$	$[m']$	$K_o$	$K$	$[\text{OH}']$	$[m']$	$K_o$		
0.1195	0	0.3904	0.001465	0	$K_{\text{NH}_3} = 1.82 \cdot 10^{-5}$	0.1998	0.001273	0	$K_{\text{NH}_3} = 1.37 \cdot 10^{-5}$		
0.1162	0.2318	0.3764	0.001027	0.000977	$4.95 \cdot 10^{-14}$	0.1934	0.000908	0.000857	$2.45 \cdot 10^{-14}$		
0.1146	0.3456	0.3815	0.000903	0.001336	$5.15 \cdot 10^{-14}$	0.1952	0.000798	0.001180	$2.58 \cdot 10^{-14}$		
0.1116	0.5668	0.3959	0.000753	0.001854	$5.00 \cdot 10^{-14}$	0.2008	0.000671	0.001609	$2.55 \cdot 10^{-14}$		
0.2821	0	0.5936	0.002225	0	$K_{\text{NH}_3} = 1.77 \cdot 10^{-5}$	0.3058	0.001974	0	$K_{\text{NH}_3} = 1.35 \cdot 10^{-5}$		
0.2728	0.2788	0.5829	0.001491	0.001762	$5.12 \cdot 10^{-14}$	0.2987	0.001322	0.001536	$2.31 \cdot 10^{-14}$		
0.2685	0.4121	0.5953	0.001311	0.002321	$5.16 \cdot 10^{-14}$	0.3075	0.001101	0.002269	$3.01 \cdot 10^{-14}$		
0.2602	0.6704	0.6104	0.001137	0.002916	$5.11 \cdot 10^{-14}$	0.3132	0.000979	0.002690	$2.47 \cdot 10^{-14}$		





$$Q = 1750 \text{ cal,}$$

which is the heat of neutralisation of the mannitic acid.

This value we obtain from the van't Hoff's isochore on substituting the acidic constants  $K_0 = 2.5 \times 10^{-14}$  (at 0°) and  $6.0 \times 10^{-14}$  (at 25°), each divided by the corresponding ionic product of water.

\*   \*   \*

The material used was M e r c k's pure mannitol, the melting point of which, solubility and molecular weight were found to agree with the data given in tables. The specific conductance of its saturated solution at 25° C was 40,000 Ohms.

All alkaline solutions were kept in absence of the atmospheric carbon dioxide; the concentrations were corrected for densities, to express the number of equivalents per litre.

### S u m m a r y.

Cryoscopic, solubility, potentiometric, conductometric and calorimetric investigations show that mannitol reacts in alkaline solutions as a very weak monobasic acid of the acidic constant  $2.5 \times 10^{-14}$  at 0° and  $5.2 \times 10^{-14}$  at 25° C; the sodium salt of the "mannitic acid" is hydrolyzed then to 75% in a decinormal solution and the ammonium salt to more than 99%. The molecular heat of neutralization of this acid is 1750 cal; the mobility of its anions 20 at 0° and 35 at 25° C. The equilibria between the ions and undissociated molecules of "mannitic acid" obey exactly the law of mass action.

\*   \*   \*

The carrying out of these experiments has been greatly facilitated by Professor Bohuslav Brauner, to whom the authors' thanks are due.

*The Inorganic Department of the  
Chemical Institute, Charles' University, Prague.*



# Contributions to the Morphology and Teratology of *Lamium album* L.

By

Dr. FRANT. A. NOVÁK. (Prague.)

(With 69 figs.)

Presented at the Meeting on May 25, 1923.

In the years 1921 and 1922 I had occasion to study different abnormalities of *Lamium album* L. which had been brought to light in the Botanical Garden of the Charles University in Prague and to which my attention had called by Professor Dr. KAREL DOMIN.

In this material I found:

1. Some specimens which had the leaves alternate in the lower part of the stem; the stem was in the whole length tetragonal, in its upper part the leaves were decussated. — This is an atavism, which indicates the original phyllotaxic arrangement of the leaves on the stem of *Labiatae*.

2. Some specimens which had the leaves in the upper part of their stems in seeming fourleaved whorls; the seeming whorls originated by the approach of invariably two pairs of leaves; but it was always distinctly visible which of the two pairs was the lower and which the higher or younger one (figs. 8, 9, 21, 67 etc.). — The abnormality mentioned proves that the constant verticils of leaves of several labiated plants (*Microcorys* etc.) originated by the approach and mingling together of two pairs of leaves.

3. I did not observe the true verticils in *Lamium album*.

4. In one plant was found a case of axillary coryphyly; in the axil of a leaf there was a very short axis which was terminated by a leaf; this terminal phyllome was turned with the lower side of its lamina to the stem, with its upper side to the supporting leaf; in this case on the axillary axis the first transversal pair of leaves, the second leaf in the second pair and the vegetative top were stunted. — In one other plate



was found another case of axillary coryphyly; in the axil of a leaf of the seeming fourleaved whorl there was a leaf in a transverse position; this leaf was a terminal one to the axillary axis and its direction was in that of the principal axis which was consequently turned aside (fig. 21.); through the torsion of the next internode the following pair of leaves did not alternate with the preceding pair, but formed an angle of  $135^{\circ}$  (fig. 10.).

5. Different cases of partial and complete *chorisis* (cleavage) of leaves (figs. 1.—7.) in which the bases of the petioles of completely cleaved leaves were side by side and did not separate to form a true whorl. The cleavage of a leaf in the seeming fourleaved whorl regularly causes in consequence a diminution of the leaf at its side (figs. 8.—9.).

6. One *anisophyllous* case (i. e. the two leaves of a pair are unequal) in which the leaves were of similar size arranged in a steep spiral. DAMMER (Pflanzenanatomie 1886 p. 106) found an analogical case in the arrangement of the flower groups (half-whorls).

7. Cases in which the prophylla were not developed (fig. 13; cf. p. 5), in which the second (higher) pair of prophylla also appeared (fig. 14.), in which the calyx had grown together with prophylla were not very rare.

8. I did not observe any great anomaly in the inflorescence: only one case of metastase of a synanthium (fig. 55.).

9. I did not meet any case of the total *suppression* of the calyx, or the corolla, or the stamens ( suppressions of whole circles); a partial suppression or an abortion (i. e. of only some parts of a circle) was frequent; an independent, partial abortion of parts of a circle — in the calyx alone (fig. 15.) or in the corolla alone (figs. 22., 23., 25., 60.) is most rare. In the stamens or pistil alone (i. e. calyx and corolla remaining normal) I observed neither a total suppression nor a partial suppression or abortion. The parallel partial abortion both of the calyx and corolla was frequent, but of the calyx, corolla and stamens together was rare; the parallel and partial abortion in the above two cases connected with cleavage of the upper lip of the corolla was rarest of all (fig. 26.). The partial abortion of the corolla and stamens together was fairly frequent (fig. 24.), but the partial abortion of the corolla and stamens and the total suppression of the pistil was rare (fig. 16; cf. p. 5.).

10. An independent *augmentation* in the number of parts of only one circle of a flower (of the calyx, corolla, stamens or pistil) was most rare; a parallel deduplication of several parts (in different circles) of a flower was very frequent (figs. 17., 18., 28., 29., 30., 31., 32., 37., 38., 39., 40. etc.; cf. p. 5, 6).

11. The changes in the number of parts of single circles in the flower appeared regularly in two, three or all four circles; rare exceptions are flowers which have only one circle with multiplied or diminished parts and other circles unchanged.



12. The abortions are just as frequent as the deduplications, but a simultaneous abortion of part of one circle and deduplications of parts of another circle in the same flower are very rare (e. g. a deduplication of the teeth of the calyx, a total suppression of the lower lip, androecium and gynoecium being normal — fig. 27; a total suppression of the lower lip, a deduplication of the stamens, calyx and gynoecium normal — figs. 33, 43; a partial abortion of the calyx (4 teeth), a deduplication of the lower lip, a partial abortion of the androecium (3 stamens) and an augmentation in the number of carpels of the gynoecium — fig. 36; cf. p. 5 et sq.).

13. The deduplication of the teeth of the calyx in *Lamium album* was quite frequent; this characteristic appears constant in some Labiatae (*Molucella* sp. div.).

14. By deduplication and also by abortion a remarkable relation between the lower lip of the corolla and one of the longer stamens can be observed.

15. The deduplication of the upper lip is always connected with preceding cleavage (of congenital coalescence); only later the deduplication always appears connected with multiplication (deduplication) of the stamens (figs. 31, 32, 37, 38). The cases of cleavage of the upper lip alone were rare (figs. 58, 59).

16. The stamens of the *Labiatae* had originally the cells of the anthers arranged side by side and parallel to the narrow connective; then occurred the subsequent development: at their lower parts the cells began to separate from each other until they stood finally one above the other, so that the longitudinal clefts of the dehiscent anthers were in one straight vertical line. This phyllogenetical evolution which can be normally observed in different species of *Verbenaceae*, we see in the anomalous flowers of *Lamium album* (fig. 69).

17. The suppression of the cells of the anthers begins from the lower cell of the longer stamen; cases in which the two lower cells of the longer stamens are rudimentary are rare; only once I found a flower with a total abortion of the cells of both longer stamens.

18. An independent congenital deduplication of the stamens is most rare; it manifests itself by the bringing to light of a fifth stamen which is as long as the longer stamens and beside which it is placed.

19. Not so very rare was the atavistic stamen („stamen posticum“) which was the shortest of all the stamens and which was situated in the median plane between the two shorter ones. (*Bystropogon spicatus* has normally 5 stamens.) This shows that the theory of PEYRITSCH on the original tetramerous ground-plan of the flowers of *Labiatae* is false.

20. Of all the parts of flowers the pistil is the most constant.



21. The following cases are most rare: 1. A very interesting homological adesmy with an abortion of the corolla (figs. 19, 41, 42; cf. p. 5); 2. a petalody of the stamens (fig. 51); 3. catacorolla (double-lamina of lower lip and lateral lobes — fig. 20; cf. p. 5); 4. a total asymmetrical flower (fig. 34) and 5. a transition from a bilabiate flower to a symmetrical one (fig. 35).

22. Synanthia characterized by their free pistils in the campanulate calyx with many teeth (figs. 50, 52, 53) revealed two categories: 1. synanthia in which only the calyxes had grown together, the other parts remaining free (figs. 48, 49, 54); 2. synanthia in which calyxes and corollas had grown together in homogenous forms (circles); in both cases the pistils remained free (figs. 44—47, 50—54; cf. p. 6 and 7).

23. Pseudohemipelory which originated by the growing together of two flowers so that the resulting forms are bisymmetrical (figs. 56—57) are rare — only one case came under my observation.

24. The true hemipelory (with 4 stamens) was most rare (figs. 61, 64).

25. Pelories showed three categories: 1. pelories with a small corolla (figs. 65, 69; cf. p. 7); 2. hexamerous pelories with epipetalous (placed before the petals) stamens (figs. 66, 68) and 3. pelories pleiomerous (figs. 62, 63, 67). — The lobes of the corollas of pelory resembled in the majority of cases the lateral lobes of normal bilabiate corollas or they had the characteristic form of fig. 68 c. The number of lobes is inconstant. The arrangement of the stamens is mostly epipetalous (rarely episepalous). The pistil in the pelory is very often rudimentary or totally missing.

\*   \*   \*

From the above various observations it appears that the theory of PEYRITSCH respecting the original tetramerous ground-plan of the flowers of *Labiatae* is untenable.



## Illustrations.

---

Figs. 1—7. Different cases of cleavage of leaves.

Figs. 8—9. The chorisis of a leaf in the seeming fourleaved whorl causes in consequence a diminution of the leaf at its side.

Fig. 10. A diagram of an axillar coryphyllly (cf. fig. 21).

Fig. 11. A diagram of a normal inflorescence of *Lamium album* L.

Fig. 12. The same drawn by KIRCHHOFF (*De Labiatarum organis vegetativis. Dissertatio morphologica. Bonnae 1861*).

Fig. 13. A diagram of a flower which has only the left prophyllum normal (the right one stunted); the other two prophylla are grown together below and represent two prophylla of the secondary non developed flowers; the opposite prophylla were stunted.

Fig. 14. A diagram of a flower in which the second (higher) pair of prophylla ( $\gamma$ ,  $\delta$ ) is also developed.

Fig. 15. A partial (i. e. only of some parts of a circle) and independent (i. e. a diminution in the number of parts of only one circle) abortion of the calyx (i. e. corolla, androecium and gynoecium remaining normal).

Fig. 16. A flower in which the calyx was normal, the corolla without the lower lip, of the stamens only one remained and the pistil was totally stunted.

Fig. 17. A diagram of the flower number 28.

Fig. 18. The augmentation of the cells of the anthers; *a*) in a normal flower, *b*) in a flower with deduplicated lateral lobes (cf. fig. 40).

Fig. 19. The homological adesmy with a partial abortion of the corolla; *a*) the extended calyx with two lobes (which have the nervation and surface as the assimilation-leaves — the calyx can change into a pair normal assimilatory leaves), *b*) a flower-leaf with an epipetalous stamen, *c*) two petals grown together with two stamens, *d*) a knoll at the base of the petal with a bundle of little hairs (analog. to the fornices in *Borraginaceae*) and *e*) the two remaining stamens with the rudiments of petals. The gynoecium of this flower was normal. (Cf. figs. 41 and 42.)

Fig. 20. Catacorolla (cf. Dammer: *Pflanzen-Teratologie 1886*, p. 510); a case of double-lamina of the lower lip and of the lateral lobes; the inward lamina was turned with its hairy (outer) side inwards towards the centre of the flower.

Fig. 21. The axillary coryphyllly (cf. fig. 10 and text).

Figs. 22—23. The partial and independent abortion of the corolla — the suppression only of the lower lip (calyx, androecium and gynoecium being normal).

Fig. 24. The suppression of lower lip and of one stamen (the longer one), calyx and gynoecium remaining normal.

Fig. 25. A terminal verticillaster which has a group of flowers with suppressed lower lip.



Fig. 26. A flower which has a calyx with 4 teeth, a corolla without the lower lip (lateral lobes grown together in a little fore-lip, the upper lip was cleaved into two narrow laminas), an androecium with two normal and one partial abortive stamens and a normal gynoecium.

Fig. 27. A case of the deduplication of the teeth of the calyx and simultaneous partial abortion of the corolla (a total suppression of the lower lip); androecium and gynoecium being normal.

Fig. 28. An interesting abnormal flower: the calyx had 7 teeth; the lower lip of the corolla had three parts, the central one was spoon-shaped, crossways ellipsoidal with a conical excrescence, the lateral parts were in the form of a normal lower lip; the lateral lobes and the upper lip were normal; four of the stamens were normal situated before the upper lip, but two stamens had grown (were adnated) with lower parts of their filaments to the conical excrescence; the gynoecium was formed by three carpels (cf. fig. 17).

Figs. 29—30. Deduplication of lateral lobes of corolla connected with augmentation of teeth of calyx, with augmentation of stamens and carpels.

Figs. 31—32. Deduplication of upper lip connected with augmentation of teeth of calyx, with augmentation of stamens and carpels (cf. figs. 37 and 38).

Fig. 33. The independent suppression of lower lip of corolla and the independent deduplication of stamens; calyx and gynoecium being normal.

Fig. 34. A case of an irregular flower (calyx normal, stamens 9, stigmata 4, carceruli 5).

Fig. 35. A transition-form between an actinomorphic and a zygomorphic flower.

Fig. 36. A partial abortion of the calyx (4 teeth), a deduplication of the lower lip, a partial abortion of the androecium (three stamens) and an augmentation in the number of carpels of the gynoecium (6 carceruli).

Figs. 37—38. Deduplication of upper lip (cf. figs. 31—32).

Fig. 39. A case of deduplication of the teeth of the calyx, of deduplication of the lower lip of the corolla and of total cleavage of the upper lip; one of the stamens had grown (was adnated) with its filament to the lower lip of the corolla (gynoecium was normal).

Fig. 40. A case of deduplication of the lateral lobes and of deduplication of the cells of the anthers (cf. fig. 18 *b*).

Figs. 41—42. Homological adesmy and a partial abortion of the corolla (cf. fig. 19 and the explanation).

Fig. 43. The suppression of the lower lip of the corolla and an augmentation in the number of stamens (5).

Fig. 44. A case of a synanthium: the calyx had 30 teeth, the corolla was irregular, androecium had 20 stamens and gynoecium had 4 pistils (cf. figs. 47 and 53).

Fig. 45. Another case of a synanthium: the calyx had 20 teeth, the corolla was irregular, androecium had 20 stamens and in the middle were two normal pistils, one pistil with 6 carceruli and two monocarpical pistils (cf. figs. 46 and 52).

Fig. 46. = 45.

Fig. 47. = 44.

Figs. 48—49. A case of a synanthium in which only the calyxes had grown together, the corollas remaining free (cf. fig. 54).

Fig. 50. A diagram of a synanthium.



Fig. 51. A stamen of a synanthium; the connective has a petaloid excrescence.

Fig. 52. A diagram of the synanthium number 45.

Fig. 53. A diagram of the gynoecium of the synanthium number 44.

Fig. 54. A diagram of the synanthium number 48.

Fig. 55. A case of slight metastase of a synanthium.

Figs. 56—57. The pseudohemipelory (calyx with 10 teeth, androecium with 6 stamens and gynoecium with 8 carceruli).

Figs. 58—59. A remarkable case of chorisis of the upper lip.

Fig. 60. The independent suppression of the lower lip of the corolla (calyx, androecium and gynoecium remaining normal).

Fig. 61. The hemipelory; a terminal flower, the calyx with 4 teeth, the corolla bisymmetrical, androecium with four stamens; suppression of the gynoecium (cf. fig. 64).

Figs. 62—63. The corolla and stamens of the pleiomerous pelory number 67.

Fig. 64. A hemipelory (cf. fig. 61).

Fig. 65. A pentamerous pelory with a regular calyx (5 teeth), with a small corolla, with 5 epipetalous stamens (cf. fig. 69.) and a pistil with three carpels.

Fig. 66. An hexamerous pelory (cf. fig. 68).

Fig. 67. A pleiomerous pelory.

Fig. 68. An hexamerous pelory (cf. fig. 66); *a*) the calyx, *b*) the corolla, *c*) the form of four (petals) lobes of corolla, *d*) the 5th lobe of the corolla (two lobes grown together), *e*) the diagram of this pelory.

Fig. 69. The upper part of the stamens of the pelory number 65.

\* \* \*

Figures 1—9, 15, 21, 65 in natural size; figures 16, 22—49, 55—64, 66—68 enlarged  $\times 2$ ; figures 18—19 and 69 enlarged  $\times 3$ ; figure 20 enlarged  $\times 4$ ; figure 19a enlarged  $\times 10$ .



























Contributions to the Morphology and Teratology of *Lamium*  
*album* L. — By Dr. Frant. A. Novák.

Tab. VII.

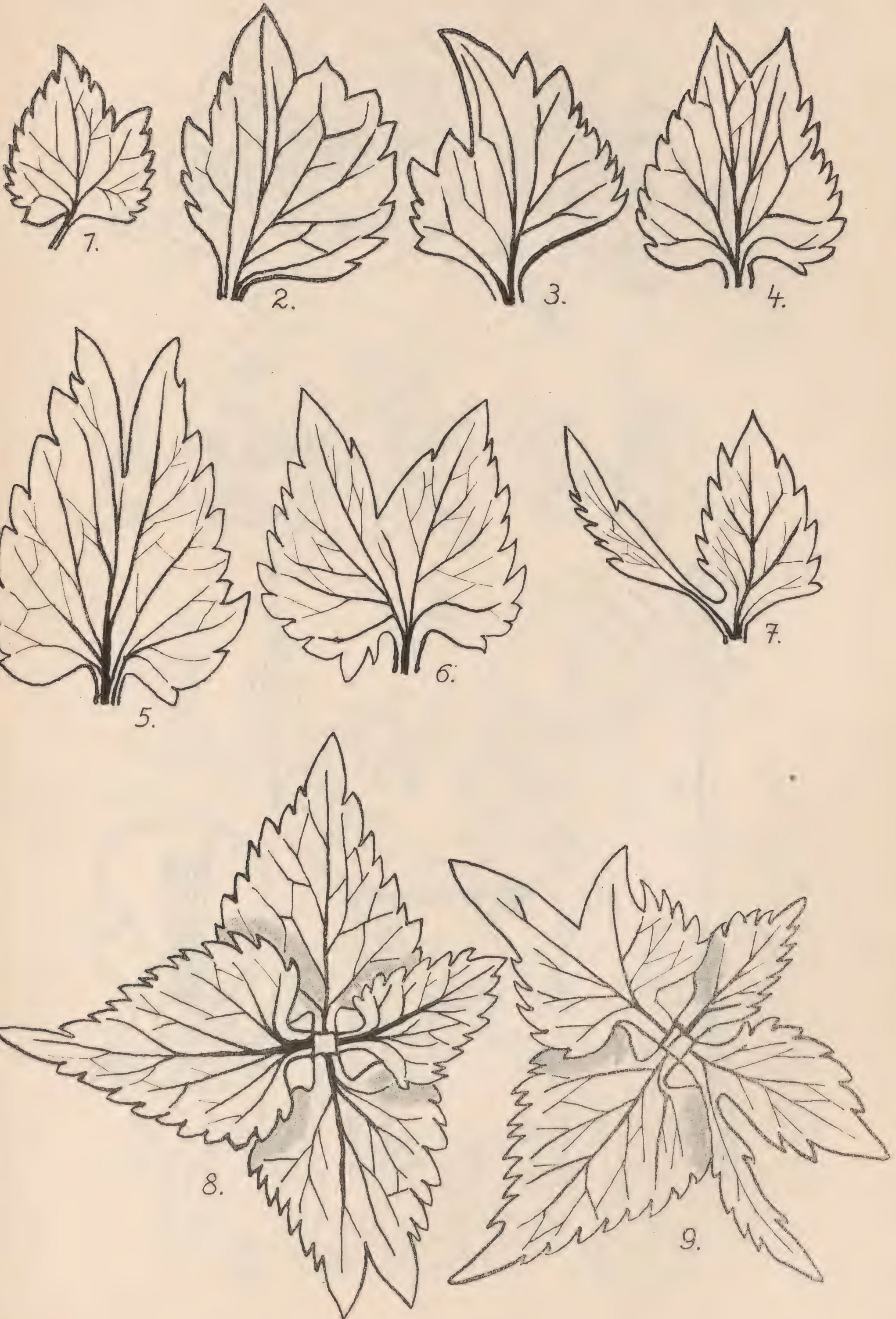






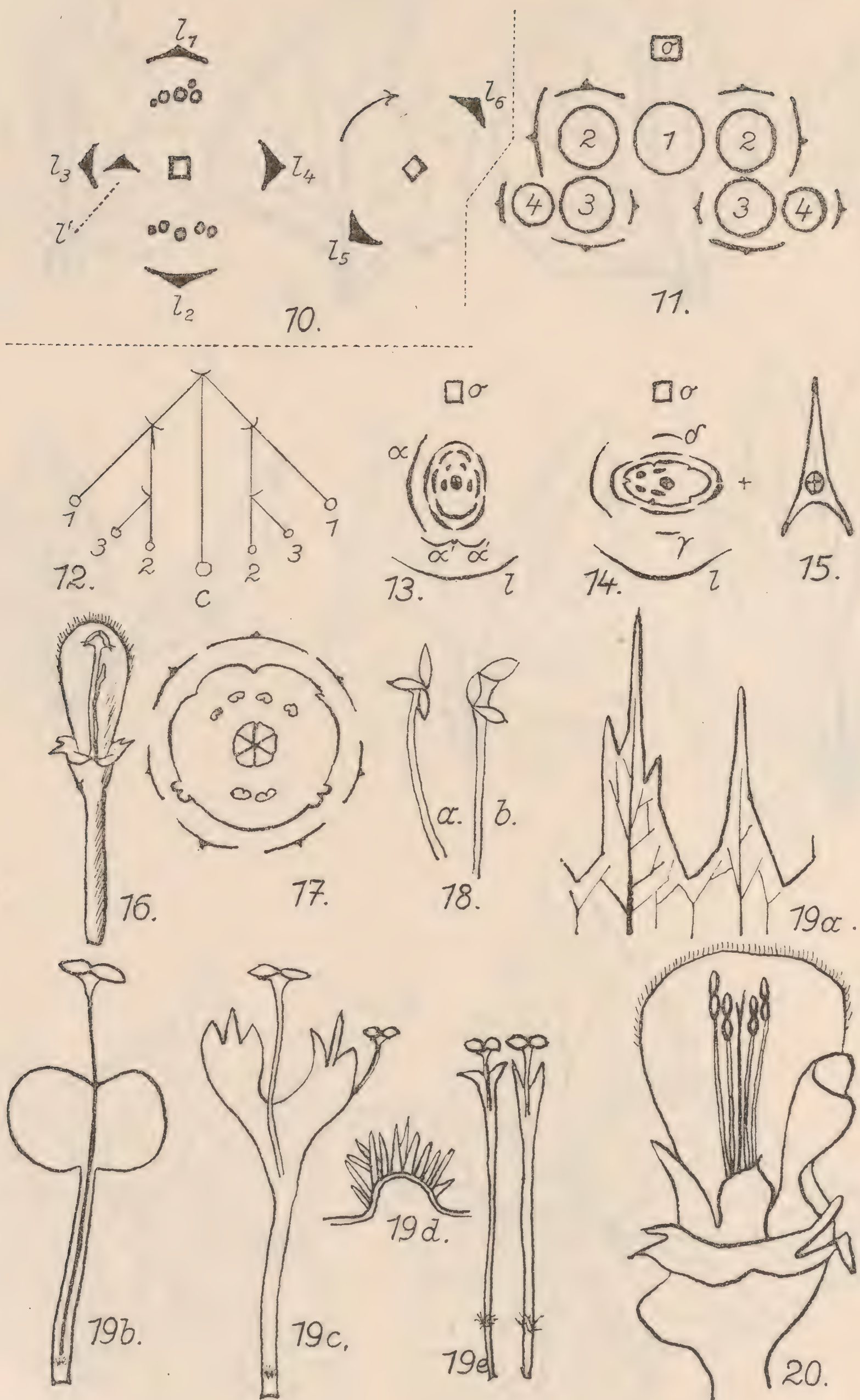


TAB. I.



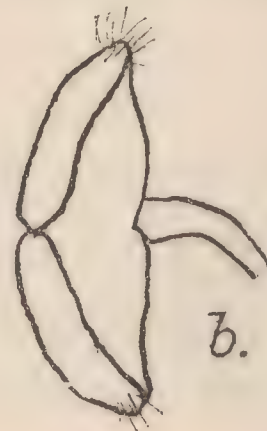
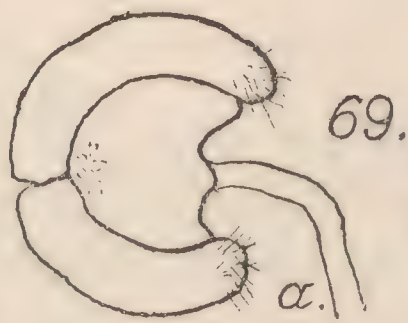
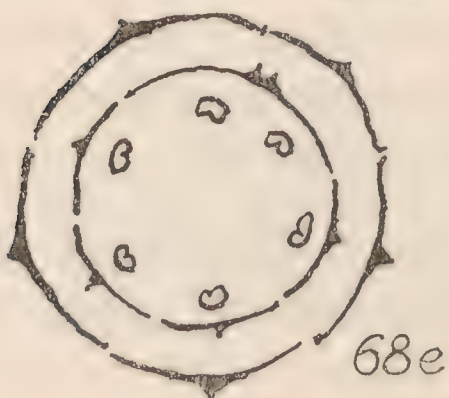
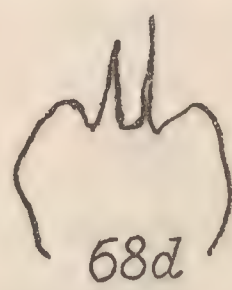
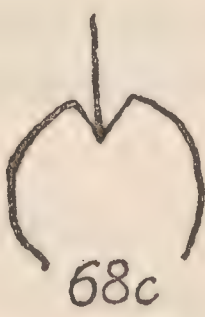
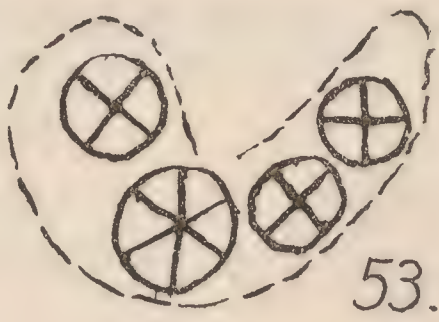
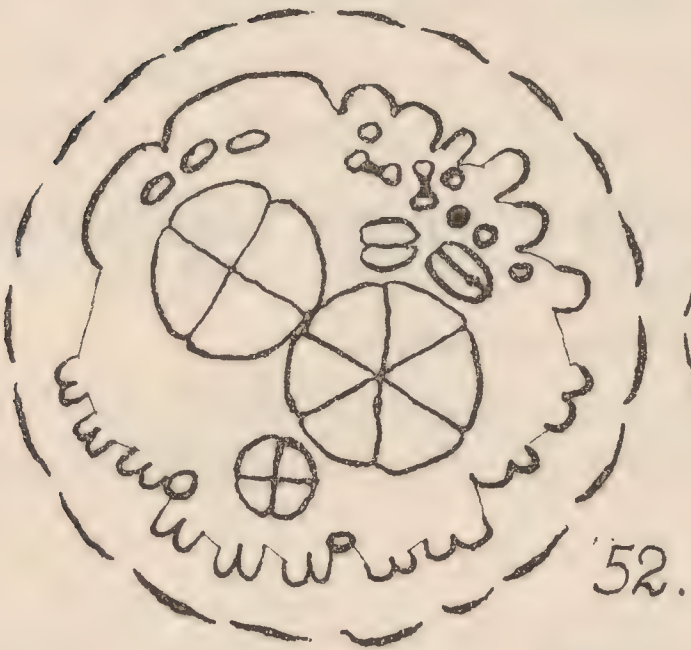
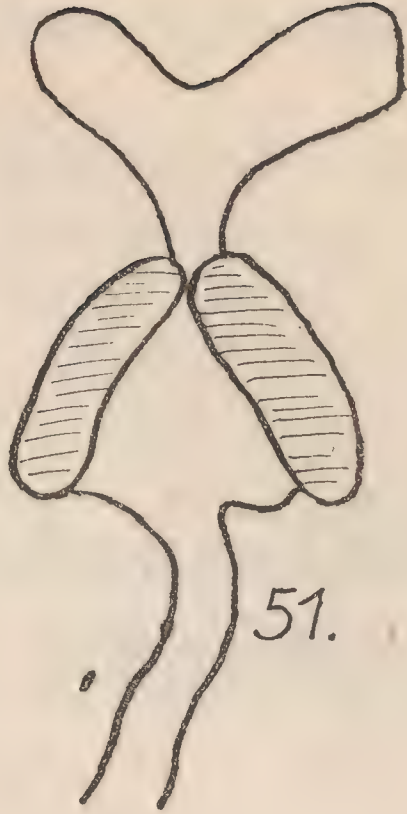
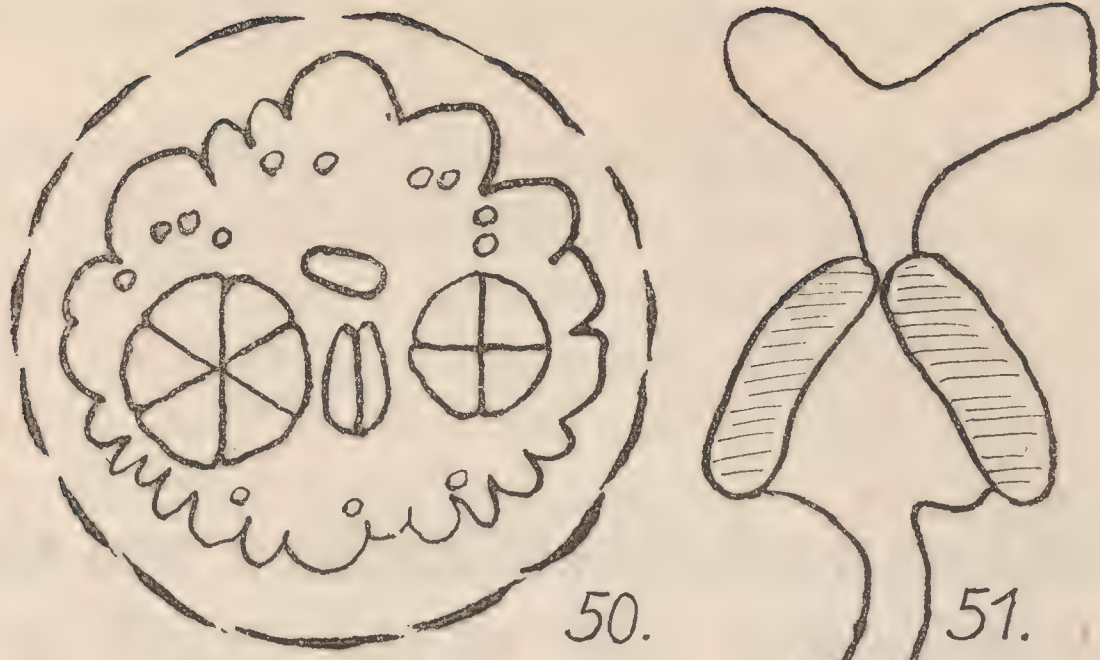


TAB. II.





## TAB. III.





# A strip of Paleogene hitherto ignored and the structure of the southermost part of the island of Veglia.

By

Dr. OTAKAR MATOUŠEK, Prague (Czechoslovakia).

(With map and sections.)

Presented the 26. October 1923.

This paper contains the results of my recent investigations in the southern part of the island of Veglia in the Adriatic Sea. It is a mountain chain, hitherto considered as an anticline\*) of the upper Rudistic limestones, with an outcrop of the lower Rudistic beds along its axis. But since discovering Paleogene beds of the island of Pervicchio\*\*) I doubted the reality of such an uncomplicated structure and investigations soon confirmed my doubts.

The oldest rocks of the region in question are the lower Rudistic limestones, of which only the upper- probably Turonian-zones are exposed. Their eastern limit against the mantle of upper Rudistic limestones was correctly known, but their western border as far as it had been mapped — that is up to the spur of Crkveni rt-proved to be quite wrong, probably because the karstic rocks make investigations very difficult. Instead of one strip of upper Rudistic limestones there is in reality a series of beds of different age.

The western border of the lower Rudistic beds lies west of the 187 metre-level, but between it and the strip indicated by Waagen there is a zone of upper Rudistic limestones, oven including eocene beds. The

---

\*) L u k a s W a a g e n, Erläuter. zur geologischen Karte von Cherso und Arbe, Geol. Reichsanstalt, Wien 1911. — With bibliography.

\*\*) O t a k a r M a t o u š e k, Discovery of Cenozoic beds on the island Pervicchio etc., Bulletin internat. de l'Acad. des Sciences de Bohême 1922. (Abridged translation of „Nález eocenního útvaru na ostrově Prviči“, Rozpr. Čes. Akademie tř. II., roč. XXXI. čís. 33.)



description of the individual occurrences throws light upon the structure of this region.

The aforementioned strip of Turonian limestones is but narrow. West of it we have a breccia, characteristic in this region for the base-line of the upper Rudistic limestones forming the roof farther to the west. No breccia appears east of the Turonian belt, its limit being here probably of tectonical origin, as it is often the case in this region.

The upper Rudistic limestones seem to be of Coniacian age or perhaps still younger. The breccia at their base-line incloses materials derived from the lower, Turonian limestones of a far less bright colour than the Coniacian beds. As indicated on the map the breccia lies at the base of the Coniacian limestones west of St. Nikolas. As it nowhere appears in the east, I consider the limit to be here of tectonic origin. The same applies to the region west of the Val Braciol, where as the western band of the Coniacian limestones is distinctly separated from the Turonian beds by the breccia.

True that both Rudistic limestones are locally quite brecciated and that it is sometimes difficult to decide, whether it is a limestone, a brecciated limestone or a breccia, we have before us.

The upper Rudistic limestones, usually pink, yellowish or white and very pure, composes the most eastern part of the western mountain chain of Veglia. At Pta Stulica stalactite caves have developed on account of its karstic nature. They seem to stand in a certain relation to lithoclasses.

The second strip of Coniacian is exposed north of Pta Braciol and that twice at the southern extremity of the island. It is likewise brecciated and accompanied by Paleogene beds. The block of Turonian limestones was thrust over it to the west. In its turn it is surmounted by Coniacian limestones with the breccia at their base-line. At last Coniacian is exposed on the summit of Pta Queniat (Crkveni rt.), mantled on both sides by Eocene beds. Here again the breccia does not appear for tectonical reasons.

The existence of two Cretaceous belts in the district here described, already proves that its structure corresponds by no means to the views held by Stache, Waagen and others. And the recent discovery of Tertiary beds points towards rather intensive movements.

The Paleogene beds were deposited in hollows which originated during the prelutetian folding. We have already remembered their occurrence west of Crkveni rt. There they fill the rift between the Cretaceous block at Crkveni rt. and the chief strip of Coniacian limestones. Their outcrop is larger than indicated on the map. They appear already at the first spur of Pta Mezzo Panetto.

From Crkveni rt. onward they are exposed in the valley of Besca vecchia. It is noteworthy that on the road to Batomalj near Besca vecchia, but already on the higher level of the cretaceous plain I found Alveoline limestones. In this karstic region closer investigations of the outcrop



proved impossible. It seems to be a small patch in a tectonical rift. Were it possible to trace the different Cretaceous zones, then the complicated structure of the whole region would become still more conspicuous.

This is indicated by the exposure of Paleogene in places quite unexpectedly and, too, by its continuing from the west coast of the island of Pervicchio round the bay of Braciol to the southern extremity of Veglia.

As a special treatise will deal with the stratigraphy of the Paleogene, we confine ourselves here to the most characteristic features.

A coarse breccia, chiefly composed of white and pink cretaceous materials, lies at the base of the tertiary rocks. The material seems to be entirely derived from Coniacian beds. That would indicate that the lower Rudistic series, the Turonian, was then not exposed to denudation. I think that with few exceptions this occurred only after the Neogene folding.

I consider the breccia to indicate the Eocene transgression. As the Alveoline limestones are equivalent to the lower Lutetian, the breccia is either Londinian or still older. Its thickness is but small, so that is easily overlooked between the Alveoline limestones and the Cretaceous beds, of which it differs but little. It is but seldom exposed, as even a slight dislocation will conceal it and it is not specially indicated on the map.

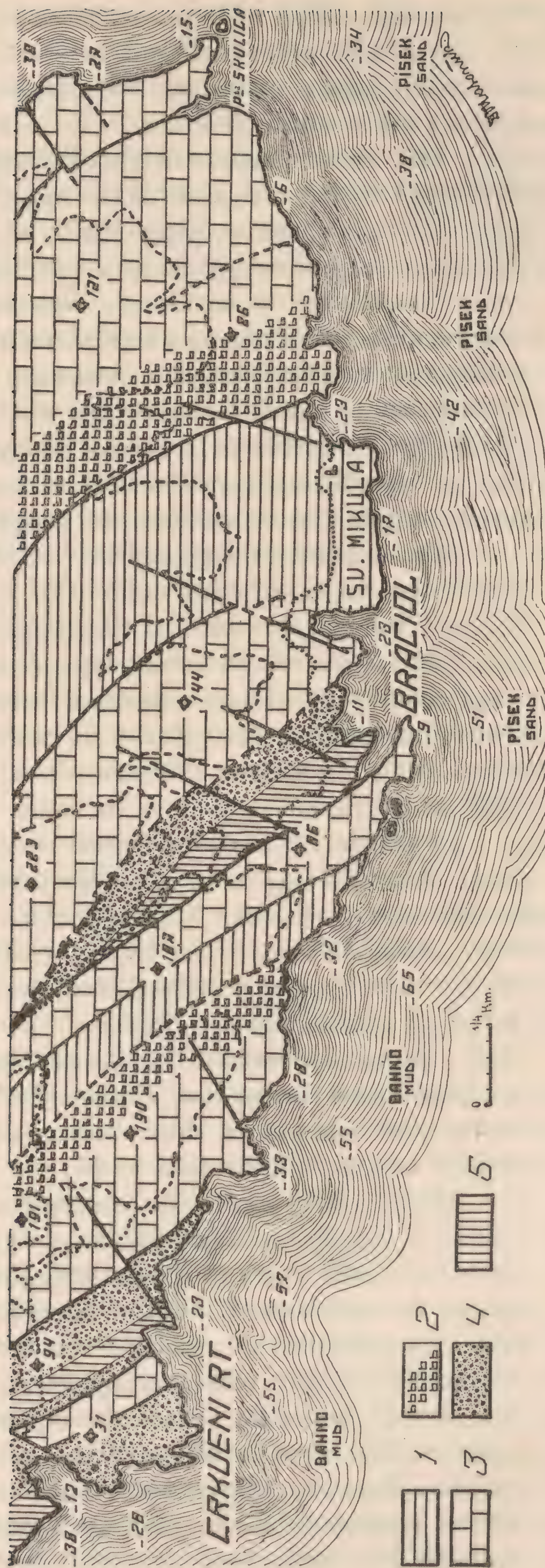
It is covered by karstic, pink or yellowish limestones full of Alveolines, so that their name of Alveoline limestones is very appropriate. They pass into Nummulitic limestones, characterized by at first rare, then numerous large nummulites. In its upper portion the limestones become sandy, lose their karstic features and are overcrowded with large nummulites.

The gradual transition makes the fixing of the limit between Alveoline and Nummulitic limestones very difficult. To understand the structure it is quite indispensable to distinguish at least roughly between both series. The zone with many *Assilina spira* seems best apt to represent the limit, though a rather doubtful one, as it is difficult to determine foraminifera especially in the field and as further studies are still required here foraminifera will be of stratigraphical value.

For practical reasons I drew the limit where large Nummulites first appear in a larger number and where the petrographical difference becomes already more marked. The tectonical boundaries proved often very fit. As at the utmost the beds of transition represent only a few metres, it does not matter that the limit was not established quite exactly. But rarely a patch of the middle, transitional beds is exposed alone, so that it remains an open question, whether it belongs to the lower or upper formation.

The occurrence of *Assilina granulosa*, *Paronea Guéthardi* and other fossils proves, that the Nummulitic beds represent the middle and upper Lutetian.







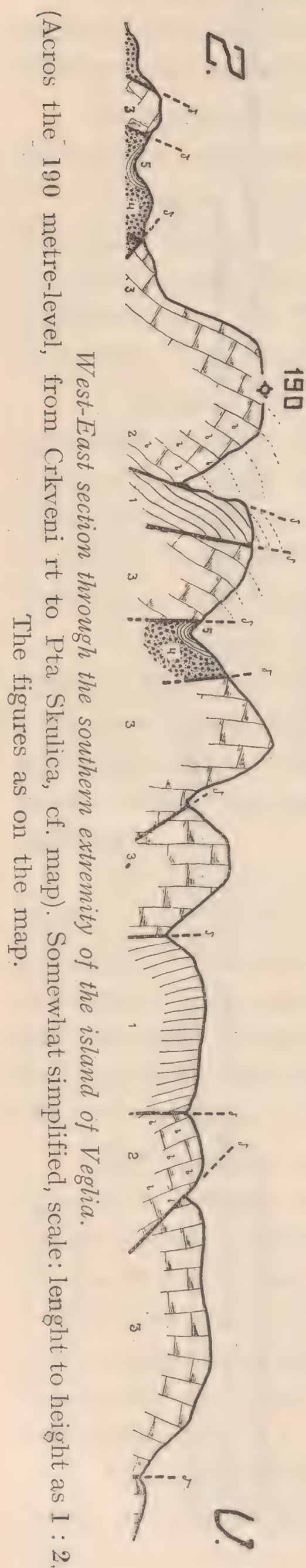
The site of the two Lutetian strips will be learned from the map. The reality of the newly discovered strip at Pta Braciol is beyond all doubt. Even setting aside its petrological character, its paleontologic contents is an absolute proof.

The upper portion of the Paleogene is not developed within the area of the map, except for some traces. Neither younger sands, nor holocene deposits-with the exception of a few patches-, nor recent breccia are to be found. Waste in form of limestone boulders impedes sometimes the investigations as at Crkveni rt. The occurrence of beauxit-terra rossa at the western border of the map towards Besca vecchia is of special interest. During the war the beauxit was worked in clay-pits, but on the whole the occurrences are insignificant.

The tectonical signification of these occurrences can be dealt with summarily, as a special treatise will be devoted to the structure of the Dinarides. There exists for our region no structural map drawn according to modern views, and the real structure is very, in places (as in the valley of Besca nuova) entirely different from the views held up till now.

Summing up the former views it was thought that: there is a Cretaceous anticline with synclines in the west and east. These synclines are filled with „middle Eocene“, or better with Paleogene, as new investigations proved that the beds considered as middle Eocene belong to more than one stage. Along the axis of the anticline older rocks are exposed by denudation. Besides there are many faults, but not one of them has as yet been described or represented in a map.

These views are by no means correct. There exists no simple anticline, for just where along its axis older rocks ought to appear, there Eocene beds occur. As represented on the simplified section and the map the Eocene dwindles towards NW; to the SE it broadens until it slopes below the sea. But it continues below the sea and appears again on the western shore of the island of Per-vicchio. Here the Eocene belt is still broader, as far as secondary faults do not narrow it, and younger Paleogene beds are associated with this





belt. Only its eastern wing is visible, for the western is covered by the sea, the coast-line being of tectonical origin.

But though the sea covers a large part of the belt, yet it is rather easily to be reconstructed. On Pervicchio the paleogene strip again narrows but this time towards the *SE*, in the opposite direction as on the island of Veglia. So it forms a narrow wedge, pinching out at both ends, striking h 10—11, broadest at its northermost point on Pervicchio. There, too, its thickness is greatest, while towards both ends its vertical section dwindles likewise.

Map and section show that the structure is rather complicated. There is a primary anticlinal structure, but it is obliterated by faults.

The influence of the different dislocations is best recognized in considering the morphological development of the region. Nothing is known about the base of the Turonian and the underlying Cenomanian beds, as it is nowhere exposed within our region. In analogy with the Velebit it is probably formed by Jurassic, in part perhaps by Triassic and in some places even by denudated older rocks. During the Comanchian period it was probably part of the continent.

After the formation of the Cretaceous beds, often interrupted as indicated by the breccia zones, the prelutetian folding took place. The detailed study of this folding process and the distinction between the structural features due to it and to the Neogene folding process will be one of the most interesting problems, that the Adriatic geologists have to solve. I am convinced that the prelutetian folding had a far greater influence than ascribed to it up till now.

The faults we see, are pearly always unquestionably younger. They cannot belong to the prelutetian structure, as they dislocate also the Eocene beds. The older faults are probably so obliterated that it is nearly impossible to trace them in this karstic region, where faults are difficult to be traced otherwise than morphological.

By the inductive method we come to the following conclusions:

The Cretaceous beds were folded and faulted by a pressure, coming either from the *SW* or from the *NE*, that is from the same or just the opposite side as during the Tertiary folding. By it a syncline and an anticline originated (not ideal ones, but complicated by many minor features), both striking *NW — SE*.

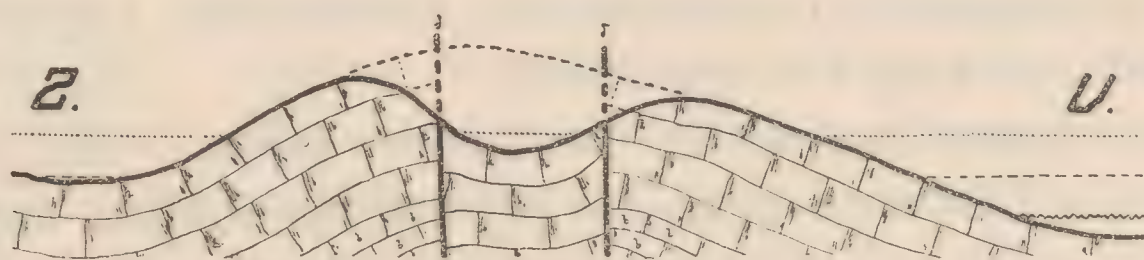
Therefore in postcretaceous times the Adriatic of to-day was already roughly outlined. Probably the folding took place in several stages, of which new investigations will inform us. On the continent air, water and other factors were at work. Before the Eocene transgression the morphological features of our district were probably of the following kind.

On the continent there were low mountain chains and between them hollows (synclines, rifts a. s. o.), all striking *NW — SE*. To-day the hollows are filled with Paleogene sediments. Therefore they were situated north



of Crkveni rt., near Braciol, and east of the actual valley of Besca. But they seem to have been broader and larger than actual Eocene strips. So the hollow of Pta Braciol continued across the island of Pervicchio (west coast) which appears to have been still connected with Veglia. It was a rift, between Besca vecchia and Besca nuova a complicated syncline, the details being of lesser importance.

Then the land subsided and the Lutetian sea entered the hollows, only the chains rising above the waters. Now the Alveoline limestones and the Nummulitic beds were formed. But during this sedimentation the elevation of the land began and as the sandy sediments indicate, the sea became shallower. At last the sea was restricted to the lowest parts (valley of Besca nuova), where younger sediments — flysch, sandstone and clay — occur, indicating oscillations of the shore-line. In the beginning of the Oligocene southern Veglia was dry ground at least to the actual extent. The district represented on the map lay above the sea immediately after the Lutetian period.



*The morphological features of the southern extremity of the island of Veglia during Paleogene times.*

West and East section from the actual valley Crkveni rt.—Besca vecchia on the left, across Braciol, to the valley of Besca nuova on the right. The dotted line gives the sea-level during the Lutetian, the broken that of the Auversian, the undulated that at the end of the Eocene and the beginning of the Oligocene period.

It is probable that the elevation of the land during the Oligocene was the beginning or at least a sign of the great new orogenetic process, which seems to have culminated in the beginning of the Neogene. The presence of the flysch points especially in this way, though naturally but to a certain degree.

As far as I traced the features then formed, the pressure came unquestionably from the SW (the prelutetian pressure from SW came from NE). By it the faultblocks were inclined, so that to the SW they slope down very gently, while there is a steep slope to the NE. Within our district this difference of the slopes is indicated, but the former structure makes itself still felt. It is easily to be understood, that the already elevated blocks offered themselves more readily to a renewed uplift than the downfaulted ones, and so — with but few exceptions — the blocks of the Cretaceous chains rose, while the downfaulted ones with their Eocene cover remained at low level.

So the block between Crkevni rt and Braciol (Coniacian limestones, breccia, Turonian beds) was thrust over Coniacian and Eocene rocks,



these in their turn over Eocene beds. The eastern region is more complicated on account of many faults which however are but difficult to trace. It seems as if here, too, overthrusts occurred, but in an eastward direction.

So in the western part the western blocks are thrust over the eastern ones, but only up to a line drawn through the bay of Braciol. Farther to the east we meet with just the inverse conditions, but less marked as the structure becomes very complicated.

In other words: The pressure came from the *SW* and had therefore already the tendency to produce overthrusts to the east. But it had to adapt itself to an already folded structure. In the west an arch was formed (the western wing of an anticline) and according to tectonic laws the wings of the anticline were thrust over its centre, the western blocks over those farther east. The pressure only favoured this process.

But in the east these tendencies worked against each other. The prelutetian anticline (by no means an ideal one) favoured overthrusts of the eastern blocks over the western ones, while the direction of the pressure tended to bring about just the contrary or folds with an axis inclined to the *SW*. As besides the original structure was not that of an ideal anticline, and as its rocks differ, the results were very complicated. But generally the eastern wings are very steep, their pitch being at least at an angle of  $65^{\circ}$ , oftener of more than  $75^{\circ}$ . Sometimes they are even recumbent.

So the Neogene folding was influenced by the results of the pre-lutetian tectonical events.

Besides overthrusts and other traces we sometimes meet also with downfaults caused by a decrease of the pressure. These two kinds of strike-faults are but difficult to distinguish. The transversal faults and the warping are younger. Perhaps some of the strike-faults originated only during later times by a pressure.

At the end of the Neogene and during the Quarternary period the structure was left nearly unaltered. Just as to-day the sea-level oscillated but little. The structural forms were obliterated and so morphology became less interesting, too. The new parts had the same development as the neighbouring regions. The exogene forces made themselves more and more felt. The chains are peneplanated („Ravno čelo“), the slopes furrowed especially along the dislocations, karstic features develop.

To-day the deposits are distributed as shown on the map, which though not worked out in detail, yet supplements and corrects the remarkable publications of Stache, Waagen and other geologists.

*Geological Department of the Charles University  
at Prague, 1923.*



# The Geology of the Bay of Bescanuova on the Island of Veglia.

By OTAKAR MATOUŠEK, Prague (Czechoslovakia).

(With 2 maps and plate.)

Presented the 25 May 1923.

This paper is a somewhat revised summary of the Czech treatise "Geologie baščanské zátoky na ostrově Krku," published on the "Rozpravy České Akademie věd a umění, class II, 1923".

The bay of Besca nuova (on the island of Veglia in the Adriatic Sea) is the drowned southern extremity of a valley, crossing the island nearly from end to end. The valley is filled with Paleogene covered by younger breccia, sands and alluvions. The chains on both sides are Cretaceous.

The Cretaceous beds are represented by karstic limestones and their breccia. They rest on the lower Rudist limestones, probably of Turonian age, greyish, sometimes thin-stratified or even laminated and then often reddish. They are roofed by the upper Rudist limestones, here considered as Coniacian, though their upper layers are probably younger. They have a vivid colour, are very pure, white, yellowish, pink or flesh-coloured. At their base a characteristic breccia of Turonian limestones is exposed.

The structure of the western shore is on the whole well described in the treatises published up till now. Here the Coniacian beds mantle those of the lower (Turonian) stage, exposed farther to the west. A band of breccia is intercalated between them, but its detailed tracing just as that of the many small faults would take much time.

The structure of the eastern coast is far more complicated. On account of some dislocations only Coniacian limestones are here exposed, their zones corresponding petrographically and palaeontologically with those of the opposite shore.

Near Besca nuova we can trace a strip, beginning at the western extremity of the bay of Monza Luka. Thence it continues, interrupted by



cross-faults east of the church of St. Ivan, where it joins the main Cretaceous strip farther east. This junction northwest of the said church is tectonically very complicated. It is difficult to trace as just there the brecciated Cretaceous rocks often do not differ petrographically from the Alveoline limestones. Then, too, one has often to climb rocks of 200 to 300 metres in height, where orientation becomes nearly impossible and where it is difficult to trace the different, sometimes perhaps tilted blocks. But the abundance of Nummulits proves unquestionably that cretaceous beds are farther spread than hitherto represented on the maps.

So the said strip of Cretaceous beds seems to be not an isolated block, but only locally devided from the main body by a Paleogene wedge, but elsewhere belonging to the main body.

On his map W a a g e n shove two cretaceous islands rising from the waste. But these isolated patches are only a far younger breccia of cemented cretaceous material. Its petrography and apparent paleontology causes this breccia sometimes to resemble very much certain cretaceous zones, for in it we find cretaceous boulders with Rudists and its cement, too, is almost the some. But the sandstones with Nummulites in its roof prove its interpretation as cretaceous to be erroneous.

The main Cretaceous strip lies at a great distance, east of the Monza Luca bay. The Stražica (373 *m*) and all the other karstic chains belong to it, as the Vidoklan a. o. Then the limestones are replaced by a breccia (but the boundary seams to be of tectonic origin) and at last these cretaceous rocks are thrust in strike-faults over the eastern cretaceous limestones. There again a breccia and at last — already outside our map — greyish, sometimes exfoliated Turonian limestones are exposed at their base.

The stratigraphy of the Tertiary beds will be dealt with in a special treatise, so that here we can restrict ourselves to its outlines. S t a c h e distinguished between 1. *a*) Alveoline limestones, *b*) Nummulitic beds, 2. *a*) fossiliferous marls and sandstones, *b*) not fossiliferous marls and sandstones, which he takes to be of middle Eocene age. S c h u b e r t considers them to represent the upper zones of the middle Eocene and distinguishes between 2. *a*) Globigerinic marls and 2. *b*) marls and conglomerates with the fauna of the Vale Murvenica, in the valley of the Besca alternating with beds of flysch. W a a g e n distinguishes not between Alveoline and Nummulitic beds, remarking that petrographically it is impossible to discriminate between them. Between the complex 2he, too, distinguishes not. There are "marls and sandstones-upper Nummulitic beds". By this division matters are to all appearances much simplified, but from a scientific point of view nothing is won.

Notwithstanding these treatises and shorter contributions the stratigraphy especially of the younger Paleogene remains a hard nut, only to be cracked by detailed surveying with special regard to the structural



complications. Otherwise even careful work will only lead to confusion and errors.

As elsewhere a breccia derived from the upper Rudist limestones with a red cement is exposed at the base of the Paleogene. I ascribe it to the Eocene transgression and take it therefore to represent the lowest Tertiary zone. In recent years it was quarried as building-stone east of the church of St. Ivan in the valley, where it is well exposed. But it is not often to be seen, as the Cretaceous-Eocene boundary is a tectonic one, so that with its small thickness the breccia is easily veiled. On the map it was not specially marked, though this would be desirable for the final map, should its scale permit so.

Above we find Alveoline limestones, pink, in their higher layers somewhat yellowish, always karstic, characterized by abundant sections of Alveolines.

On the right bank at the jetty, where the guard-house stands near their tectonic boundary-line against the Nummulitic beds farther west, there is a very interesting outcrop. The dislocations are very marked, but recently quarrying has somewhat changed the aspect. A little stalactite cave fell likewise a victim to quarrying. Here the higher zones of the Alveolines are exposed, as proved by the Nummulitic beds close by and by the appearance of the first sporadic great Nummulites. The transparent section reveals but a slight dynamometamorphosis. Ore-grains packed in titanomorphit (ilmenit) are conspicuous.

From the jetty those limestones continue to St. Ivan, immediately east of which they border on Cretaceous rocks. Then Alveoline limestones are exposed in the rift running from Monza Luka to the NW. Near the sea their strike is about  $h\ 10\frac{1}{2}$ , but farther north the beds bend westward. Setting aside the often accidental position of the different blocks, there is a general twist of the beds, of which we shall speak in treating the western coast of the bay.

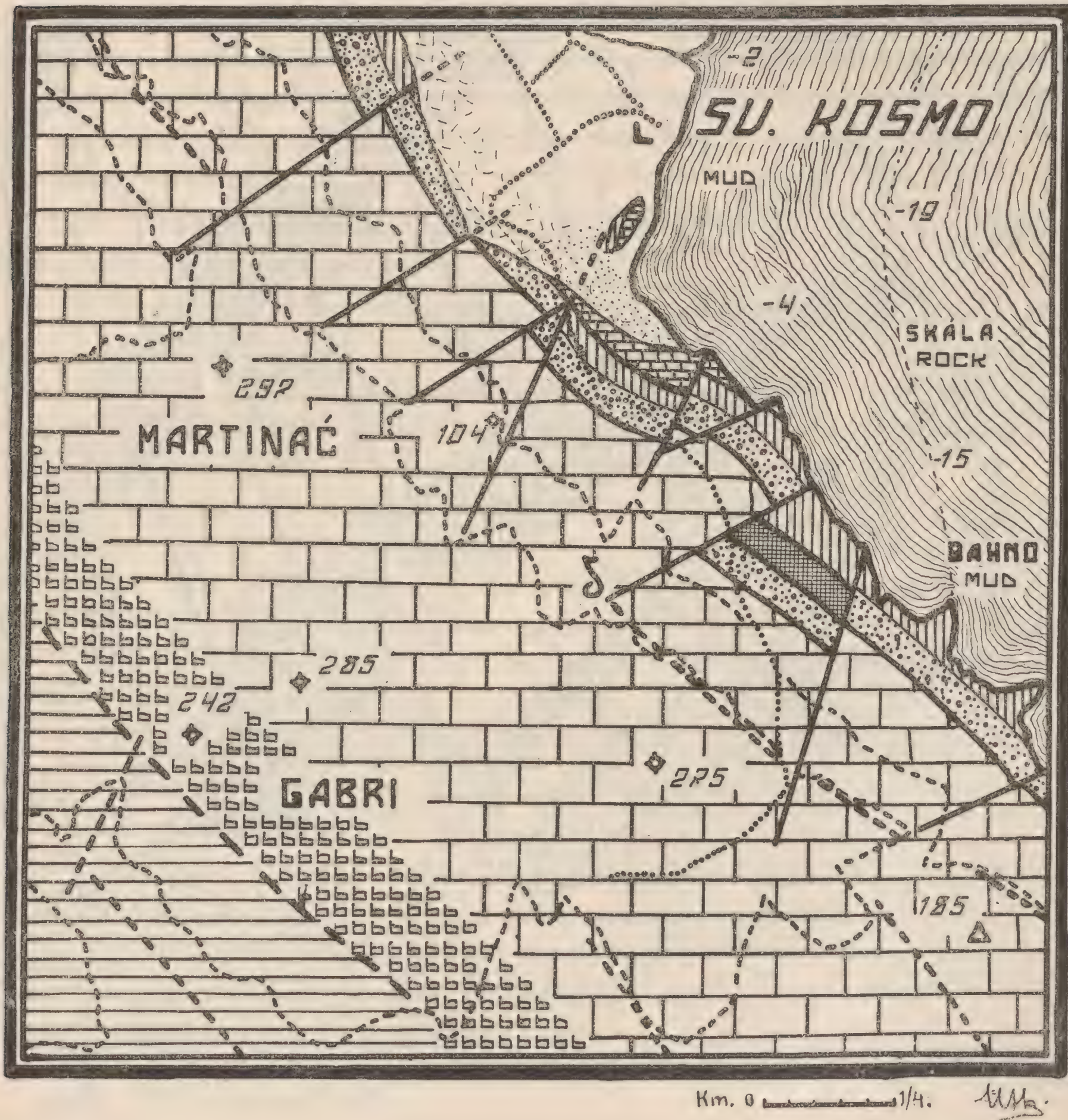
The western wing of the beds is here but of difficult access, as it is much faulted, the faults reducing the thickness, and sometimes covered by recent deposits. So these beds escaped W a a g e n's notice, the more so as he was already misled by his error about the recent breccia.

In this district the Paleogene begins at the spur just east of Pta Krićin, where strike and cross-faults occur. As it is well to be seen from the sea, the Eocene (with Alveolines) is here overthrust along a cross-fault. To the left we see the petrographically very similar Rudist limestones. Farther west those beds lie at the end of a Cretaceous block, where they were also traced by Mr. R e m e š. The Cretaceous block is thrust over them. The zone at the base of the Alveoline limestones seems to belong petrographically and paleontologically to the Nummulitic beds. They are covered by younger deposits, while below sandstones are ex-



posed. The Nummulitic beds are therefore almost squeezed out by the orogenic processes.

The eastern wing extends rather continuously east of the Monza Luca bay, as indicated on the map. By a general survey the relations of both wigs is difficult to determine — the waste and the fatiguing climbing amongst the rocks being heavy impediments. The aforesaid outcrop of



Cretaceous beds with Rudists proves, that the Palaeogens does not extend much farther — except perhaps in small outcrops — than marked on the official map.

Then we have the Nummulitic beds, exposed at about the same places as the aforementioned. In their upper zones, where there are countless huge Nummulites the limestones turn into calcareous sandstones, which already at the first glance distinguish themselves even petrographically from the karstic Alveoline limestones. Though the lower zones are



very similar to it, yet they contain for the first time large Nummulits, though in the beginning only sporadically.

Only at St. Kosmo the Nummulitic beds are somewhat shifted to the east. Otherwise they form a more or less continuous strip. Tectonically their outcrop is most interesting, but unfortunately thick beds of sand impede the study of them. They border the left shore of the bay



as far as they are not covered by younger sandstones and marls in the north, while to the south they sink under the surface of the sea.

NE of the 275 metres level, SE of the 204 metres level younger beds occur between this strip and the Alveoline limestones.

Of the inverted beds, which now and then appear at the coast, we shall speak later.

At the eastern shore the new buldings near the jetty are erected on these Nummulitic rocks, but immediately to the west we find mostly



Quaternary sandstones and marls. In the Paleogene wedge of Monza Luca the Nummulitic limestones are developed next to the Alveoline limestones but they outcrop only at the eastern shore of the bay. There they cause nearly vertical cliffs. In the interior of the bay sandstones, in the east Alveoline limestones and then Cretaceous beds accompany them. A little farther on from the hill near Vrženica these beds are well exposed one after the other. Besides countless Nummulites these rocks contain many other fossils. Of them a *Terebratula*, probably the *T. subalpina* is of special interest. It is considered as characterizing the highest zone of the Nummulitic limestones, and this holds good on our case. As far as I know they were hitherto not observed in the southern part of the island of Veglia.\*)

On the stratigraphical significance and value of the foraminifers I shall speak in another paper.

Now we came to the younger stage, its stratigraphy being still quite chaotic. Surveying is therefore most difficult, as we are moving in a circle: a questionable stratigraphy for tectonic conclusions, an unknown structure for inferring the stratigraphy from.

The main points are about the following:

Within the upper stage several zones are well to be distinguished, but unfortunately they are nowhere to be found side by side, as they are faulted into countless blocks, all of which having been much displaced. Then those blocks are but seldom exposed, as the alluvions of the bay cover them to a large part. Some zones are petrographically very similar to each other (flysch), so that two stratigraphically quite different beds are sometimes not to be distinguished in this respect. Then too, the facies changes rather suddenly, so that it is often difficult to draw comparisons between two localities.

I did not yet come to a final conclusion, but I think, that the lowest zones are represented by marls, with sandstones intercalated in their upper layers. But flysch, marls and sandstones represent at the same time the youngest beds. To distinguish between those two complexes is sometimes difficult or even impossible.

In addition to these two flysch-zones — we shall say the lower and upper flysch — we have at least still two other zones. The lower flysch is covered by sandy, rather marly, sometimes very resistant beds, containing but for Nummulites, but countless fragments of shells and corals. From the locality of their chief outcrop we call them Jurindvor-beds. They are roofed by sandstones, abundant in Nummulites. We call them St. Michel-limestones.

---

\*) Supplement: It is *Terebratula Hoeferi* Oppenheim (rarissima). For this information I owe my warmest thanks to Mr. Paul Oppenheim at Berlin.



These four zones were not recognized before, and nothing was known about their sequence. The name of "upper Nummulitic beds" for the whole complex is not suitable. As with but few exceptions Nummulites are to be found only in one horizon.

These four zones are nowhere to be seen side by side and below their Quarternary cover they are so much faulted, that their stratigraphy cannot be inferred directly. Neither did the paleontologic method lead up till now to satisfactory results. The sandstones either contain no fossils at all or only insignificant ones, as *Serpula* and the like, and then their thickness is, too, very considerable. When now and then fossils are found in such beds, it is more probable that up till now they were not known from these beds, than that the rocks belong to another horizon. So fossils, considered as Oligocene (*Turbo scobina* Brogn., *Ostrea Martinsi* Vitrah, *Cytherea villanovae* Desh., *Stylophora annulata* Reuss. a. o.) were discovered in beds with a characteristic Eocene fauna.

Farther paleontological research is therefore indispensable. But the upper flysch really seems to belong to the Oligocene.

The best localities for paleontological studies are the rocks on the shore west of Besca nuova, beyond the post office (the former boarding-house "Dalibor").

There the eastern wing of the valley is exposed, the beds dipping to the east. Quite to the west we see the marly grey sandstones of Jurindvor. locally very weak and besides shells (*Turbo*, *Cerithium*,\*) *Cytherea*) containing many layers of well preserved corals (*Astrocoenia*, *Stylophora*). Farther to the east they are overlapped by the St. Michel-sandstones with Nummulites. As there faults did not cause any greater disturbances the original sequence is still preserved: the St. Michel-sandstones in the roof of the Jurindvor-beds are therefore younger.

But we have to point out that the dip of the rocks is here invers to what we should have expected according to the former conception of a synclinal structure. According to that notion we should have to speak of an everted block. But I already pointed to the valley of Besca nuova being a crumbled anticline, so that we have a normal sequence of rocks dipping away from the axis of the anticline. The relations between these two horizons is therefore stratigraphically determined; with regard to the marls and sandstones this is more difficult. They are exposed sometimes roofing, sometimes flooring these beds. It will be necessary to distinguish between specific, though perhaps only locally developed ones, to understand their stratigraphy.

They contain layers of marls with a mikrofauna, layers with carbonized plants, light and darker beds, weak and resistant and schistous

---

\*) There was here also *Campanile giganteum*, a very significant species for the stratigraphy, hitherto unknown on the island of Veglia.



ones. Some sandstones have characteristic surface-features (Hieroglyphs a. o.), others are quartzzy with hard grey concretions, some are weak and contain *Serpulas* a. s. o. Up till now it was only locally possible to distinguish stratigraphic zones.

After this short but indispensable digression we now return to our map. Within the valley the rocks are — with few exceptions already outside our map — covered by clayey, rarely sandy river-alluvions. Farther west at St. Kosmo the rocks-grey schistous marls containing countless fossils f. e. *Cerithium* (lamellosum Br.?) are exposed. Then they are again covered by sands and appear again only beyond the turn of the brook, there together with sandstones. There, too, a cross — fault is well exposed between the sandstones north and the marls south of it. The sandstones, still containing *Serpulas*, seen disappear below sea-level.

Under favourable circumstances (at ebbing tide) the beds of the hard sandstones rise above the sea, dipping at nearly right angles, but somewhat to the west under the mountain chain. This is another horizon with quite another petrographic character. The slates only represented in thin plates are washed away, so that the rocks look as if furrowed.

Still farther to the south in an escarpment some 70 metres high, a Jurindvor-strip suddenly appears between the Nummulitic beds below and the Alveoline beds above. It is easily to be recognized as well paleontologically (huge shells) as petrographically, that this strip is really composed of Jurindvor rocks. A strike-fault seems to be the reason for its appearing here. All these outcrops south of the bent of the coast-line were hitherto unknown and not indicated on any map.

On the right shore marls and sandstones are exposed now and then between the buildings of Besca or in the river-bed. For the present we will give no heed to them. Farther east they compose the bottom of the Monza Luka bay. To the west we find them but in traces in deep hollows, while in the east they are very well exposed and contain Nummulites. They belong to the horizon of St. Michel. As already said, Waggen here records a recent breccia, partly covering the Nummulitic beds, as Cretaceous.

Neogene, Quarternary: For the sake of completeness we have still to mention yellowish, well stratified sands, developed chiefly west of the bent of the Besca bay. In the cliffs some intercalated layers of sandstone stick out some decimetres thanks to their greater resistance. Locally a coarse breccia is developed. Below the cliffs there are small distinct earth-pyramids. These beds clearly represent the youngest Pliocene or the lower Plistocene.

The waste and recent breccia is of no great scientific interest, that is their exact boundaries have no special significance.

The layers of terra rossa are on the right shore south of St. Ivan and elsewhere. Holocene are the alluvions of the Torrente della Fiumera



and those in the bay of Monza Luka. There even a thin marine bed with *Cerithium* and *Trochus* is exposed. As it rests on fresh-water sediments with *Pseudoamnicola* sp. and is covered by beds containing likewise a fresh-water fauna, this would prove a Quarternary oscillation of the sea-level.

A special paper will be devoted to the structure of the northern Dinarids. And as our region is closely related to them, we will restrict us here to a short summary.



We know already that the valley of Besca had been described as a syncline with faults. But it had been observed, that the beds are often inclined in a direction inconsistent with such a structure, in the western part to the west, in the eastern part to the east, therefore away from instead of to the axis. The explanations given were either inexact or altogether incorrect, as one clung to the notion of a synclinal structure. This idea is mistaken.

The valley of Basca is a downfaulted anticline. The anticline resulted by a warping of the beds between the Cretaceous blocks and



is a feature restricted to the southern part of Veglia. Within the anticline strike-faults originated by pressure, and along of them the wings were thrust over the centre of the anticline. The slackening pressure caused the downfaulting of some blocks.

The succession of the beds on the surface is therefore very varied. Conform to the relative amount of the downfault even younger rocks sometimes appear as we draw nearer the axis.

The anticlinal axes is disturbed by cross-faults, so that it can be traced only approximately. It begins in the western part of Jurindvor, where some 200 paces south of the church its nucleus is exposed as irrefutable proof. It continuous to the most western buildings of Besca, a little west of the post-office.

The cross-faults are to be recognized already by the morphological features of the region. By one of them even the brook in the valley was shifted a little to the SW.

By this combination of folds and faults, and especially by the strike-faults the different blocks appear in a very varied order, as far as they are not covered by Holocene deposits. Therefore we must not simply unite the different outcrop of the same layer, as we would so construct not existing and even impossible strips.

The structure originated by the prelutetian and Neogene folding. I think that after the first folding the site of the present valley of Besca formed a hollow, which during the Paleogene filled with sediments. It had a disposition to become a syncline by the second — Neogene — folding. This occurred throughout the island with the exception of its southern part, we still recognize that even there the disposition existed, but the result was just the reverse: The bottom of the hollow resisted and so the Paleogene beds were warped into an anticline between the Cretaceous blocks. By the increasing pressure faults originated, along of which the blocks were thrust over those nearer the axis. when the pressure slackened some of the blocks were downfaulted.

As the pressure came from the SW, as the whole structure also of the neighbouring islands proves, the axis of the originating anticline has an inclination to the east.

A cross-pressure, too, is easily to be traced. It appears already in the morphological character of some parts of the island Veglia, that the beds were twisted. In tracing the different beds this impression was proved to be right, but those features are only seldom to be seen directly in the field. Such a feature are the tilted sandstones on the western coast of the Besca bay, which we mentioned in the stratigraphical part of this paper and which are also represented on the plate. The beds were tilted when the anticline and the strike-faults originated. The twisting of the



beds is due to a pressure at right angles to their strike, to the same pressure to which the cross-faults are due, though perhaps this occurred during more than one stage. Therefore the cross-folding is younger than the principal folding, though perhaps some of the strike-faults still belong to the younger stage.

The cross-folding produced the paraclases and the twisting of the beds.

*Geological Department of the Charles University  
at Prague, 1923.*



## Bibliography.

- G. S t a c h e, Die Liburnische Stufe und deren Grenzhorizonte. Abhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt, Bd. XIII. Heft I. 1889.
- L. W a a g e n, Ein Beitrag zur Geologie der Insel Veglia. IV. Die Umgebung des Bescathales. Verhandl. d. k. k. geol. R.-A. 1903.
- R. S c h u b e r t, Zur Stratigraphie des istrisch-norddalmatischen Mitteleocäns. Jahrb. d. k. k. geol. R.-A. 1905.
- L. W a a g e n, Erläuterungen zur geologischen Karte... von Cherso und Arbe. (With a cart 1 : 75.000.) K. k. geol. R.-A., Wien 1911.
- R. S c h u b e r t, Geologischer Führer durch die Nördliche Adria. Sammlung geol. Führer XVII., Berlin 1912.
- For the fully bibliography see the two last named papers, especially for the older works of S t a c h e and W a a g e n. — Of the new publications I cite:
- M. R e m e š, Ein Beitrag zur Kenntnis des Eocäns bei Besca nuova auf der Insel Veglia. Verhandl. d. k. k. geol. R.-A. 1912.
- P. O p p e n h e i m, Die Eocänfauna von Besca nuova auf der Insel Veglia. Ibidem 1914.
- M. R e m e š, Eocén u Nové Bašky (Besca Nuova) na ostrově Krku (Veglia). Rozpravy Čes. Akad. tř. II. roč. XXX. čís. 12.
- O. M a t o u š e k, Předběžná zpráva o geologii lázní Bašky a okolí. Ibidem XXXI. čís. 12.
- O. M a t o u š e k, Nález eocenního útvaru na ostrově Prviči v severním moři adriatickém. Ibidem XXXI. čís. 33. — Discovery of Cenozoic beds on the island of Pervicchio in the Northern Adriatic Sea. Bulletin internat. de l'Acad. des Sciences de Bohême 1922.
- O. M a t o u š e k, Nový nález paleogenní a geologické poměry v nejjihnější části ostrova Krku. Rozpr. Čes. Akad. tř. II. roč. XXXII. — A strip of Paleogene hitherto ignored and the structure of the southernmost part of the island of Veglia. Bull. intern. de l'Ac. des Sc. de Bohême 1923.

For the special problems (karst, tectonic, paleontology), see the publications of G a v a z z i, G r u n d, Č v i j i ć; Termier, Kober; Oppenheim, Liebus a. o.



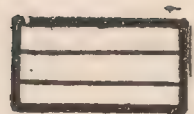
## Explanation of plate.

(Photo O. Matoušek.)

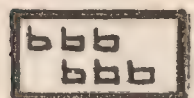
The tilted resistant Paleogene sandstones, dipping under the mountain-chain in the west (though in the western wing of the so called syncline). They are a block of a anticline. The beds are twisted by a cross-pressure, to which cross diaklases and faults are due.

View of the western shore of the Bascia bay, to the south. On the right the Eocene and farther away the Cretaceous karst, in the background the island of Pervicchio, of karstic Rudist limestones (Kur 351 metres).

## Explanation of the maps.



1. Turonian Rudist limestones.



2. Breccia at the base of the upper Rudist limestones.



3. Upper (Coniacian and younger) Rudist limestones.



4. Alveoline limestones with a breccia at their base.



5. Nummulitic limestones and calcareous sandstones.



6. Sandstones and marls (chiefly lower, in part perhaps upper flysch).



7. Marly Jurindvor sandstones.



8. Nummulitic sandstones of Sv. Michel.



9. Sand, waste and recent breccia.



10. Holocene.



# Contributions stratigraphiques à l'étude des couches de Daleje $g\beta$ dans le Barrandien.

(Avec une planche et une carte dans le texte.)

Par

ODOLEN KODYM.

Présenté le 23 novembre 1923.

(Résumé du texte tchèque.)

Dans la Bohême centrale — dans le *Barrandien* — la formation dévonienne est représentée par les *couches de Koněprusy*  $f^1$ ) reliée par passages insensibles à la formation silurienne, par les couches de *Bráník*  $g\alpha$ , les couches de *Daleje*  $g\beta$ , les couches de *Hlubočepy*  $g\gamma$  et celles de *Srbsko*  $h$ . Les calcaires de *Koněprusy*  $f$  et la partie inférieure des calcaires de *Bráník*  $g\alpha$  appartiennent au *Dévonien inférieur*, la partie supérieure des calcaires de *Bráník*  $g\alpha$ , les couches de *Daleje*  $g\beta$ , les couches de *Hlubočepy*  $g\gamma$  et la partie inférieure de la zone de *Srbsko* appartiennent au *Dévonien moyen*, la partie supérieure de l'étage  $h$  appartient au *Dévonien supérieur*. Les schistes de *Daleje* ou schistes à *Tentaculites*  $g\beta$ , qui feront le sujet de cet article, appartiennent vraisemblablement au Couvinien (zone à *Calceola sandalina*). Ils forment un horizon stratigraphique très important, séparant deux zones très semblables au point de vue lithologique. Leur faible résistance à la désagrégation les rend cependant très rarement accessibles puisqu'ils sont habituellement couverts de décombres.

Les schistes de *Daleje*, étant un des termes les plus jeunes du *Barrandien*, n'affleurent que dans la proximité de l'axe du bassin, c'est-à-dire le plus souvent entre la vallée de la *Berounka* près de *Srbsko* et la vallée de la *Vltava* près de *Prague* (voir la carte sur la page 3). La zone  $g\beta$  abou-

<sup>1)</sup> J'emploie la nouvelle désignation des couches des terrains paléozoïques du centre de la Bohême selon laquelle  $F - f_2 = f$ ,  $G - g_1 = g\alpha$ ,  $G - g_2 = g\beta$ ,  $H h_1$ ,  $H h_2$  et  $H h_3 = h$ .



tissant dans la terminaison brachysynclinale du *Barrandien* près de *Hlubočepy* ne s'étend pas sur la rive droite de la Vltava. Un tout petit reste des schistes de Daleje s'est conservé sur la rive droite de la Berounka près de Koda et près du ravin dit „císařská rokle“ vis-à-vis de *Srbsko*.

La faille inverse du *ravin de Koda*, s'étendant dans la direction de l'axe du Barrandien, de *Třebotov* à *Tobolka*, a fortement modifié le parcours de la zone  $g\beta$  car elle sépare les affleurements de cette zone en deux districts. Le *district nord-ouest* comprend les affleurements des schistes de Daleje, qui suivent le grand axe du Barrandien, formant un brachysynclinal allongé dont l'allure a été considérablement transformée par le plissement secondaire. La terminaison brachysynclinale est complète au Nord-Est près de *Hlubočepy* tandis qu'au Sud-Ouest près de *Hostím* la terminaison du bassin a été enlevée par une dislocation transversale.

Dans le *district sud-est*, les couches de la zone  $g\beta$ , ont en général une inclinaison vers le Nord-Nord-Ouest et la direction W. S. W.—E. N. E. Dans ce district les schistes de Daleje sont relativement beaucoup mieux mises à nu, surtout près de *Karlův Týn* et près de *Koda*.

Les schistes à Tentaculites furent beaucoup moins étudiés que les autres étages du Barrandien. Par conséquent, nous ne trouvons dans la littérature que des mentions fragmentaires ou très brèves. On doit à J. J. J a h n une mention de ce genre. Il prétendit une fois que les schistes de Daleje ( $g\beta$ ) ne sont qu'un horizon localement remarquable par leur caractère lithologique et que, par endroits, ils sont remplacés par des calcaires. Cette opinion fut publiée par lui dans le Guide des excursions du Congrès géologique international de Vienne.<sup>2)</sup> Cette mention ayant rapport à la zone  $g\beta$  n'étant que très brève, elle passa presque inaperçue. C'est dans les travaux de *Krejčí-Helmhacker*, *Krejčí-Feistmantel*<sup>3)</sup> et *Katzer*,<sup>4)</sup> où nous trouvons le matériel le plus complet à propos des couches de Daleje.

### Les schistes de Daleje dans le synclinal entre Hlubočepy et Hostím.

Dans cette région les schistes de Daleje sont bien mises à nu dans les environs de *Prague*, dans la vallée dite *Prokopské údolí*, près de *Hlubočepy*, juste là où leur direction change dans la terminaison du bassin.

<sup>2)</sup> J. J. J a h n: Geologische Exkursionen im älteren Paläozoikum Mittelböhmens. Vienne, 1903.

<sup>3)</sup> J. K r e j č í - R. H e l m h a c k e r: Erläuterungen zur geologischen Karte der Umgebung von Prag. Archiv f. d. naturwiss. Landesdurchforschung Böhmens IV. 1880.

J. K r e j č í - K. F e i s t m a n t e l: Orogr. geotekton. Übersicht des silur. Gebietes im mittl. Böhmen. Ibid. 1885.

<sup>4)</sup> F. K a t z e r: Geologie von Böhmen. 1892.



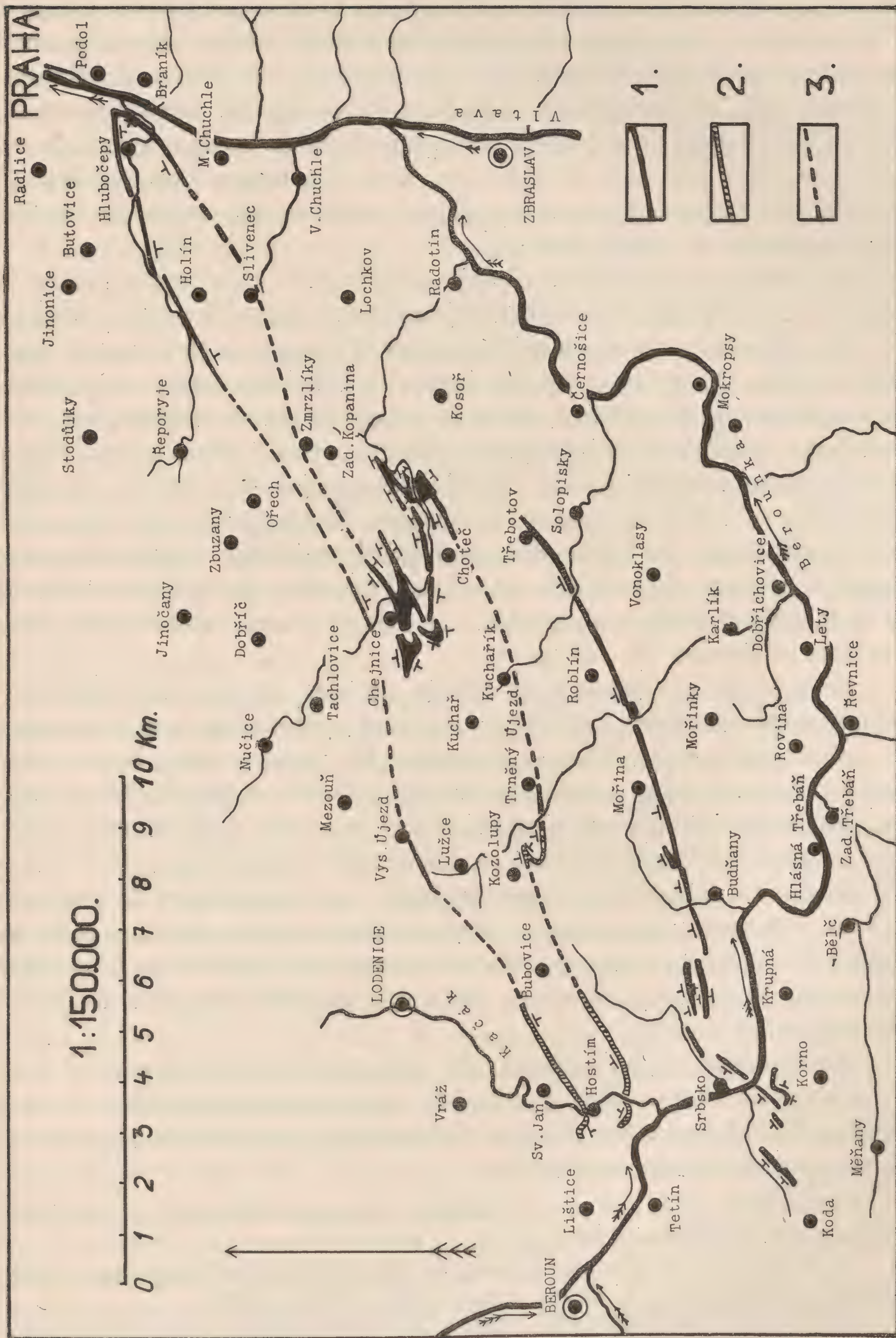


Fig. 1. Carte géologique de la répartition géographique des couches de Daleje gβ. 1. = Facies schisteux. 2. = Facies calcaire. 3. = Répartition probable des couches de Daleje gβ sous le recouvrement crétacé et sous les limons.



Au point de vue lithologique ce sont des schistes marneux, vert-olive foncé ou presque noirs, se désagrégeant en fines écailles gris-olive ou brunes. Les schistes non altérés se divisent en boules. Les fossiles (surtout les Tentaculites) sont souvent recouverts de limonite. Dans tous les termes des schistes de Daleje, surtout dans les inférieurs, on trouve d'habitude de nombreuses concrétions de calcaire. Ce calcaire est homogène et se brise en petits éclats au coup de marteau, il est de couleur gris-bleu ou jaune-brun clair par suite d'altération, avec des taches plus foncées. Il ressemble de façon frappante à quelques calcaires du centre de l'assise  $g\alpha$  (calcaires de la vallée Procope).

La limite des schistes de Daleje avec le mur et le toit est intéressante. Dans le mur des schistes de Daleje se trouvent des calcaires de Zlíchov  $g\alpha_3$ , qui, dans leurs termes supérieurs, sur le passage à la zone  $g\beta$ , perdent les silex. On aperçoit ensuite entre les différents bancs de calcaire des intercalations de schistes, dont la puissance va en augmentant. En général ces intercalations schisteuses sont foncées ou même noires. Enfin les calcaires ne forment que des bancs isolés passant en couches à grandes concrétions en forme de miches. Les roches du passage entre le  $g\alpha$  et le  $g\beta$  sont gris-jaune ou même d'un ton foncé et jamais de couleur vive. La grandeur des bancs et des concrétions calcaires de la limite entre le  $g\alpha$  et le  $g\beta$  est aussi remarquable. Ils sont toujours relativement assez puissants atteignant 10—20 cm.

Le passage des schistes de Daleje  $g\beta$  aux calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$  a une apparence toute différente. Les couches de passage y sont toujours de couleurs très vives. Nous y trouvons des couches d'un brun rouge intense, alternant avec des couches vert-jaune clair et vertes. Sur le passage, les schistes deviennent plus marneux; on y voit d'abord des concrétions et puis des intercalations calcaires. Les divers bancs de calcaire sont de teintes très vives et peu puissants pour la plupart (d'habitude 2—5 cm seulement); les calcaires sont noduleux et par places passent en rangées de concrétions séparées les unes des autres. Vers le toit le nombre des couches de calcaire augmente jusqu'à disparition complète des intercalations schisteuses.

La meilleure coupe naturelle des schistes de Daleje se trouve dans les environs de Prague dans la tranchée du chemin de fer de la voie dite Buštěhradská dráha entre Zlíchov et Hlubočepy non loin de la courbure des couches du brachysynclinal.<sup>5)</sup>

<sup>5)</sup> Voir: a) R. K e t t n e r: Příspěvek ku stratigrafii bránických vápenců etc., Rozpravy Čes. Akademie XXVI., n° 21.

b) F. W ä h n e r: Zur Beurteilung des Baues des mittelböhmischen Faltengebirges. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt, Vienne, 1916.

c) O. K o d y m: Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpravy Čes. Akad. XXVII., n° 6. 1919.

d) J. W o l d ř i c h: Das Prokopital südlich von Prag. Jahrbuch d. k. k. geolog. Reichsanstalt. Vienne, 1918.



Les couches ont une inclinaison vers le Sud et le Sud-Ouest et il est possible de suivre les schistes à Tentaculites jusqu'au passage aux calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$  (voir pl. I., fig. 1.). Le récif à Corallières sur la Švagerka se trouve sur la limite du  $g\alpha$  et du  $g\beta$ .

D'autres coupes naturelles des couches de Daleje se trouvent dans la vallée Procope (village de *Hlubočepy*) et dans la vallée de Daleje (vallée Procope) à *Klukovice* près de la voie ferrée à l'embouchure de la petite vallée s'étendant vers Nová Ves.

La zone  $g\beta$  plonge vers le Sud-Ouest sous la couverture crétacée pour ne réapparaître que dans la vallée du ruisseau de Radotín, dans les environs de *Choteč* et de *Chýnice*. A cet endroit les schistes de Daleje sont développés en faciès identique à celui de la vallée Procope. La présence d'un tuf diabasique à la limite du  $g\beta$  et du  $g\gamma$  près de *Chýnice* est intéressante, car c'est l'unique et dernière éruption de diabase de notre Dévonien. Une puissante bande de calcaires noduleux rouges affleure à la base de la zone  $g\gamma$ . Dans la vallée de Radotín les couches de Daleje affleurent dans de belles coupes naturelles surtout près des moulins dits Doubecký mlýn et Kalinův mlýn et sur la pente de la rive gauche du ruisseau au-dessus du moulin dit Kozákův mlýn (près de la cote 270). Il se trouve aussi une jolie coupe naturelle sur la route allant de *Chejnice* à *Kuchaře*; on y peut constater la présence du tuf diabasique dans les couches de passage entre la zone  $g\beta$  et  $g\gamma$ .

Les affleurements des schistes à Tentaculites se trouvant sur la pénéplaine qui s'étend entre la vallée du Kačák et celle de Radotín sont peu caractéristiques et ne nous permettent pas de juger exactement le caractère lithologique de cette zone. Ce n'est que près de *Trněnský Újezd*, à 1250 m à peu près à l'Ouest de ce village qu'on trouve, dans le tranché de la voie ferrée menant à la carrière dite „Amerika“, des couches qui semblent être un équivalent stratigraphique des schistes de Daleje  $g\beta$ . Ce sont des calcaires marneux stratifiés avec un grand nombre de nodules, alternant avec de minces et nombreuses intercalations de schistes. Le manque d'autres coupes naturelles ne nous permet pas de certifier s'il ne s'agit pas là d'une série de couches des calcaires de Bráník  $g\alpha$ .

De bonnes coupes naturelles des couches dévoniennes se trouvent dans la vallée du ruisseau Kačák. L'axe du bassin du Barrandien recoupe la vallée du Kačák là, où est situé le village de *Hostím*. Dans le voisinage immédiat de Hostím les schistes de Srbsko  $h$  sont mis à nu, des calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$  affleurent à l'extrémité nord du village et plus au Nord on trouve des calcaires de Bráník  $g\alpha$  plongeant vers le Sud et très nettement développés. Mais entre ces deux dernières zones c'est en vain que nous cherchons la série de couches schisteuses. A la base de la zone  $g\gamma$  on distingue parfaitement une coloration rouge, mais une sorte de dépression, sans aucune trace de schistes, correspond à la bande des schistes à Tentaculites. Cependant au lieu de schistes, nous y trouvons des cal-



caires marneux gris. Nous pouvons aussi constater un cas absolument analogue au Sud du village, dans la gorge du Kačák, entre Hostím et l'embouchure de ce ruisseau dans la Berounka et ensuite sur la route allant de Hostím à Srbsko. A ce dernier endroit nous voyons, surtout sur le versant est de la vallée, des calcaires gris, marneux, plus ou moins noduleux qui ont un pour cent important d'intercalations schisteuses. Ces intercalations ne comprennent qu'une très petite partie de la puissance complète et ne dépassent jamais un centimètre d'épaisseur. En général, ces calcaires rappellent le plus quelques niveaux de la zone de Bráník. Dans la vallée du Kačák la zone  $g\beta$  n'est donc pas développée en faciès schisteux, mais bien en faciès de calcaires marneux. Il est assez facile de tracer la limite entre ces calcaires, leur mur et leur toit. La limite supérieure de la zone de Bráník  $g\alpha$  coïncide avec celle des concrétions de cherts de calcaires de Zlíchov. Les calcaires de Zlíchov sont beaucoup plus compactes, moins marneux et forment des bancs plus épais que les calcaires de la zone  $g\beta$ . En outre, les calcaires de la zone  $g\beta$  sont noduleux. Nous distinguons assez aisément la zone  $g\beta$  des calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$ , car dans cette contrée ces derniers ont toujours une teinte rouge à leur base, n'ont pas d'intercalations schisteuses et forment des bancs plus épais, qui cependant sont noduleux, mais non pas autant que les calcaires de l'assise de Daleje. Les calcaires du  $g\beta$  ne sont jamais de couleur vive.

## II. Couches de Daleje au Sud de la faille inverse du ravin de Koda.

La faille inverse de Koda se développe lentement comme ligne tectonique. Si nous la suivons de l'Est à l'Ouest nous remarquons tout d'abord son existence par la largeur extraordinaire des calcaires de Bráník  $g\alpha$ . Ce n'est que près de *Třebotov* que, dans son mur, apparaissent les zones  $g\beta$ ,  $g\gamma$  et aussi la zone de Srbsko  $h$  un peu vers l'Ouest. De là la zone  $g\beta$  se dirige vers *Mořina*, traverse au Nord de Karlův Týn la vallée de Budňany et affleure près de Srbsko, dans la vallée de la Berounka. Sur l'autre rive de la Berounka, le  $g\beta$  forme un pli, dont l'aile synclinale fut enlevée par un affaissement longitudinal, il passe ensuite par *Koda* et se dirige vers *Tobolka* où il se termine près d'une dislocation transversale.

Dans cette région nous trouvons les premières belles coupes naturelles sur la partie gauche de la vallée du ruisseau de Roblín, près du moulin dit *Pekárkův mlýn*. Là les schistes de Daleje ont un développement normal en forme de schistes marneux, avec concrétions calcaires en forme de miches, comme dans la vallée Procope et dans la vallée de Radotín. Mais à cet endroit, à la base du  $g\beta$  se trouve une puissante série de calcaires noduleux rouges qui, par places, rappellent la base des calcaires de Bráník  $g\alpha$ , c'est-à-dire les calcaires de Řeporyje et de Slivenec des environs de Srbsko. Il y a aussi dans la vallée de Roblín une carrière



ouverte dans ces couches. Cette série de couches rouges de la base des calcaires de Hlubočepy se trouve partout dans cette région, dans le toit des schistes de Daleje.

Entre la vallée de Roblín et celle de Karlík le parcours de la zone  $g\beta$  est cependant bien visible, mais ce n'est que dans la vallée de *Karlík* près du moulin dit *Jandův mlýn* à l'Est de *Mořina* que se trouve une bonne coupe naturelle. Là, nous pouvons constater que les schistes de Daleje sont développées en faciès absolument identique à celui de la vallée de Roblín.

Les autres affleurements de la zone de Daleje entre *Mořina* et la vallée de Karlův Týn ne présentent pas de bonnes coupes naturelles. Dans la vallée de *Karlův Týn*, au contraire à 300 mètres au Nord du château, il existe une coupe de la zone complète avec les passages au toit et au mur. Les termes supérieurs des calcaires de Braník y sont bien développés en forme de calcaires de Zlíchov avec de nombreuses concrétions de cherts noire. Ces calcaires sont surmontés d'une série de couches de passage, qui rappellent beaucoup le faciès calcaire de la zone de Daleje dans la vallée de *Kačák*. Ce sont des calcaires marneux, gris, homogènes ou des calcaires noirs, grenus en bancs d'une épaisseur de 5 m 20 cm. Ils contiennent des intercalations de schistes gris-vert à très gros grain. Cette série de couches est à peu près de 15 m. Ces couches de passage sont surmontées par des schistes de Daleje très visibles; ils sont marneux et contiennent des intercalations de calcaires développés comme concrétions en forme de miches ou comme couches (voir fig. 2, pl. I). Ces schistes sont gris-vert-olive ou noirs. Les deux teintes alternent d'une couche à l'autre. Les intercalations de calcaire sont grises et d'habitude grenues et ne sont pas constituées de calcaires homogènes comme près de Prague. La puissance de cet ensemble de couches est à peu près de 550 mètres. Vers le toit les schistes deviennent rouges, contiennent de nombreuses concrétions de calcaire et passent ensuite en calcaires rouges de la base de la zone  $g$ . Au-dessus de cette série de couches (d'une puissance de 15 m à peu près) apparaît, une fois encore, une bande de schistes peu visible qui cependant, fait bientôt place aux calcaires gris (calcaires de Braník).

Sur la rive droite de la Berounka, au-dessus du ravin dit „císařská rokle“, qui se trouve au sud de Srbsko la puissance des schistes de Daleje est déjà très petite (10 m).<sup>6)</sup> Ces schistes ont dans la partie qui affleure un faciès d'un caractère pareil à celui des schistes de cette zone en d'autres endroits. De même, le passage dans le toit (dans les calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$ ) est absolument le même qu' en d'autres endroits. Mais

<sup>6)</sup> Voir: F. S e e m a n n: Das mittelhöhmische Obersilur- und Devongebiet südwestlich der Beraun. Beiträge zur Palaeontologie etc. Tome XX., Vienne, 1907.

O. K o d y m: Explication de la Carte géologique de l'arrondissement de Beroun. Knihovna Stát. geol. ústavu R. Č. S. Tome I. 1921.



la partie inférieure de la zone de Daleje y est déjà développée en forme de calcaires juxtaposés aux calcaires de Zlíčov, de la zone  $g\alpha_3$  et au point de vue lithologique ils sont absolument semblables aux calcaires de la zone de Daleje de la vallée du Kačák. Mais il est encore possible de constater la présence de bandes des schistes dans la zone de Tentaculites, près de la maison forestière à Koda. Ce qui prouve que le passage du faciès schisteux en faciès calcaireux est très insensible.

### Conclusion.

Jusqu'à maintenant la zone  $g\beta$  a été nommée „schistes à Tentaculites de Daleje“. Ainsi qu'il a été dit plus haut, la désignation „schistes“ n'est pas toujours juste car par endroits cette zone est développée en forme de *calcaires marneux gris* avec intercalations de schistes. Il sera donc nécessaire de n'employer que la dénomination „couches de Daleje (à Tentaculites)“ pour toute la zone et d'y distinguer deux faciès: faciès *schisteux* et faciès *calcaire*. Les deux faciès de la zone de Daleje passent insensiblement l'un dans l'autre, en sens horizontal, c'est-à-dire que, des intercalations de calcaire apparaissent dans les schistes et augmentent de plus en plus jusqu'à remplacer celles-ci. Dans la zone  $g\beta$  le faciès schisteux est beaucoup plus étendu et comprend presque tout le Barrandien. Le faciès calcaire n'est au contraire développé que dans les affleurements au Nord-Ouest de cette zone, c'est-à-dire dans les environs de Hostím et de Sv. Jan pod Skalou, dans la vallée du Kačák, tandis que les deux faciès sont développés sur la rive droite de la Berounka dans les environs de Koda. Le faciès calcaire se trouve à la base et est surmonté par le faciès schisteux. Dans tout le Barrandien la puissance de la zone de Daleje est en moyenne de 60—80 m. L'éruption de diabase constatée dans les schistes de Daleje, quoique assez importante, n'est cependant que de caractère local et il est impossible de la faire entrer en ligne de compte quand on veut apprécier la puissance de la zone  $g\beta$ .

Novembre, 1923.

Institut géologique de l'Ecole  
polytechnique tchèque à Prague.

### Explications de la planche.

Fig. 1. Passage des schistes de Daleje  $g\beta$  aux calcaires de Hlubočepy  $g\gamma$  se trouvant dans la tranchée de la voie ferrée dite Buštěhradská dráha entre Zlíčov et Hlubočepy (au-dessus du jardin de la brasserie, près de la maison du cantonnier de Švagerka). Les couches claires sont des calcaires, les couches foncées des schistes.

Fig. 2. Schistes de Daleje avec intercalations à concrétions de calcaire en forme de miches. Vallée de Karlův Týn, à 500 m à peu près au Nord du château, près de la route sur la rive droite du ruisseau.



ODOLEN KODYM:  
Contributions stratigraphiques à l'étude des couches de Daleje  
 $g\beta$  dans le Barrandien.



Fig. 1.



Fig. 2.







# Problème de Steiner pour les polygones inscrits à une courbe plane d'ordre $m$ de genre 1.

Par

B. MACHYTKA.

Présenté le 26 Octobre 1923.

Le problème de Steiner pour les polygones fermés rectilignes, inscrits à une cubique plane  $C^3$ , et modifié par lui-même au cas, où les côtés d'un polygone sont alternativement les coniques de deux faisceaux,<sup>1)</sup> peut être généralisé pour une courbe elliptique plane  $C_1^m$  d'ordre  $m$ , si l'on considère, au lieu du système des droites dans un plan d'une cubique  $C^3$ , le système linéaire  $S_l$  des courbes adjointes d'ordre  $l$  à cette courbe  $C_1^m$ .

Ce travail a, surtout, pour but de faire voir les manières dont on peut inscrire directement des polygones curvilignes à la courbe générale  $C_1^m$ , — donc aussi à une courbe  $C_1^m$  dont on ne peut pas abaisser le degré par une transformation quadratique et que l'on ne peut pas, par conséquent, transformer, par une transformation de Cremona, en une courbe  $C^3$ , — et trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les polygones soient fermés, ayant  $2r$  sommets. On obtient par là la généralisation des résultats de deux travaux, bien connus, d'Emile Weyr.<sup>2)</sup> Enfin je veux montrer, quand est-ce qu'on peut inscrire à une courbe donnée  $C_1^m$  des polygones de courbes rationnelles.

I. 1. Soit donnée une courbe elliptique plane d'ordre  $m$   $C_1^m$  ayant des points multiples de l'ordre  $i$  au nombre  $\alpha_i$  ( $i = 2, 3, \dots, m-1$ ;  $\alpha_i \geq 0$ ). Les  $\alpha_i$  satisfont à la relation

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1 = \sum_{i=2}^{m-1} \alpha_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

---

<sup>1)</sup> Jacob Steiner: Geometrische Lehrsätze. Crelle's Journal, Bd. 32, S. 182. — Gesammelte Werke, Bd. II., S. 371.

<sup>2)</sup> Emil Weyr: Über Vervollständigung von Involutionen auf Trägern vom Geschlechte 1 und über Steiner'sche Polygone I, II. Wiener Berichte, Bd. 101, Oktober, Dezember 1892.



Soit  $S_l$  le système linéaire des courbes adjointes  $C^l$  de l'ordre  $l$  à cette courbe  $C_1^m$ . On aura, pour sa dimension  $R$ , la relation

$$R = \frac{l(l+3)}{2} - \sum_{i=2}^{m-1} \alpha_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

Ce système de courbes adjointes coupe la courbe  $C_1^m$ , d'après le théorème de Riemann-Roche, dans une involution rationnelle  $g_n^{n-1}$ . On trouvera aisément par un calcul bien connu

$$n = m(l+3-m).$$

Il y a, bien entendu,  $l > m-3$ , et, par suite  $n > 3$ .

Pour  $l < m$ , on a, comme on sait bien,  $R = n-1$ ; pour  $l \geq m$ , il y a  $R = (n-1) + h + 1$  où  $h = \frac{(l-m)(l+3-m)}{2}$ .

2. Choisissons, sur la courbe  $C_1^m$ , un groupe de  $n-2$  points ( $K$ ). Les courbes adjointes  $C^l$  du système  $S_l$  passant par ce groupe de points forment un système linéaire  $\bar{S}_l$  et découpent sur  $C_1^m$  une involution  $\bar{g}_2^1$ . Il est évident que cette involution  $\bar{g}_2^1$  peut être découpée sur  $C_1^m$  par chaque système linéaire  $\bar{S}_l^{(i)}$  de courbes adjointes  $C^l$  dont les points de base (nous ne considérons pas le groupe des points singuliers de la courbe  $C_1^m$ ) forment un groupe quelconque de points ( $K_i$ ) d'une involution  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$ , résiduelle à l'involution  $\bar{g}_2^1$ .

Soient  $\bar{S}_l^{(i)}$  et  $\bar{\bar{S}}_l^{(i)}$  les systèmes linéaires des courbes adjointes  $C$  qui découpent les involutions  $\bar{g}_2^1$  et  $\bar{\bar{g}}_2^1$  sur  $C_1^m$ . Les points de base de ces systèmes forment des involutions rationnelles  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{\bar{g}}_{n-2}^{n-3}$  résiduelles aux involutions  $\bar{g}_2^1$  et  $\bar{\bar{g}}_2^1$ .

Pour fixer les idées choisissons les deux systèmes  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$ . Par un point  $A_1$ , choisi arbitrairement sur la courbe  $C_1^m$ , passe une courbe quelconque  $C^l$  du premier système; cette courbe coupe  $C_1^m$  en un seul point restant  $A_1'$ . Faisons passer par ce point  $A_1'$  n'importe quelle courbe  $C^l$  du second système  $\bar{\bar{S}}_l$ ; cette courbe coupe  $C_1^m$  dans un autre point  $A_2$ . Répétons cette construction en employant cette fois alternativement les courbes des deux systèmes  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$ . Nous construirons ainsi un polygone de Steiner  $A_1 A_1' A_2 A_2' \dots A_r A_r' A_{r+1} \dots$ , généralement ouvert, inscrit à la courbe  $C_1^m$ . Les sommets voisins  $A_i, A_i'$  sont fournis par les couples de points de l'involution  $\bar{g}_2^1$ , les sommets  $A_i', A_{i+1}$  par les couples de ceux de l'involution  $\bar{\bar{g}}_2^1$ . Le point  $A_2$  correspond évidemment au point  $A_1$  dans la correspondance univoque de la seconde espèce  $E \equiv \bar{g} \cdot \bar{\bar{g}}$ . Le point  $A_{1+k}$  correspond au point  $A_1$  dans la correspondance  $E^k$ . Si le polygone doit être fermé pour le nombre  $r$ , il faut qu'il soit  $A_{r+1} \equiv A_1$ , et, par suite,  $E^r \equiv 1$ . La correspondance univoque  $E$  doit être cyclique à la période  $r$ . Ensuite le point  $A_2'$  correspond au point  $A_1'$  dans la correspondance  $\bar{g} \cdot \bar{\bar{g}} \equiv E^{-1}$ . On obtient, par là, le théorème:



Les sommets  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$  et les sommets  $A_1', A_2', \dots, A_r'$  forment des cycles de points d'une correspondance univoque cyclique  $E_r$  à la période  $r$  et de son inversion  $E_r^{-1}$  et, par suite, deux groupes de points de la même involution irrationnelle elliptique  $g_r^1$ . Il est évident en même temps, que deux cycles de sens contraires de la même correspondance cyclique  $E_r$  (c'est-à-dire deux groupes de points de la même involution irrationnelle elliptique  $g_r^1$ ) forment les sommets d'un polygone fermé de Steiner, dont les côtés peuvent être construits par des courbes adjointes  $C^i$  des deux systèmes linéaires  $\bar{S}_i^{(i)}$  et  $\bar{\bar{S}}_i^{(i)}$ . Les points de la base  $(K_i)$  et  $(L_i)$  de ces systèmes sont formés par les groupes de points des deux involutions rationnelles  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{\bar{g}}_{n-2}^{n-3}$ , dont la première est résiduelle à l'involution  $\bar{g}_2^1$ , déterminée par les points  $A_1, A_1'$ , et la deuxième est résiduelle à l'involution  $\bar{\bar{g}}_2^1$ , déterminée par le couple des points  $A_1', A_2$ . Donc, deux involutions rationnelles  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{\bar{g}}_{n-2}^{n-3}$  produisent des polygones fermés pour le nombre  $r$  seulement au cas, où ces systèmes sont résiduels aux involutions  $\bar{g}_2^1$  et  $\bar{\bar{g}}_2^1$ , dont le produit est la correspondance univoque cyclique  $E_r$ .

Soient  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{\bar{g}}_{n-2}^{n-3}$  deux involutions de telle sorte. N'importe quel groupe de points  $(K)$  de la première involution et n'importe quel groupe  $(L)$  de la deuxième, pris pour points de la base des deux systèmes linéaires  $\bar{S}_i$  et  $\bar{\bar{S}}_i$  des courbes adjointes  $C^i$ , produisent un polygone fermé  $A_1 A_1' A_2 \dots \dots A_r A_r' A_1$ , où le premier point  $A_1$  peut être choisi arbitrairement sur la courbe  $C_1^m$ . Prenons maintenant sur  $C_1^m$  n'importe quel groupe  $(H)$ , ayant  $(n - 3)$  points. On complète ce groupe, à l'aide d'une construction linéaire, par un point  $U$  pour obtenir un groupe de la première involution  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et par un point  $U'$  pour obtenir un groupe de la deuxième involution  $\bar{\bar{g}}_{n-2}^{n-3}$ , de sorte que l'on arrive aux groupes de points équivanlets  $(H) + U \equiv (K); (H) + U' \equiv (L)$ . Le polygone construit, ci-dessus, à l'aide des deux systèmes  $\bar{S}_i$  et  $\bar{\bar{S}}_i$  peut être remplacé par un polygone qui a les mêmes sommets dans le même ordre, tandis que ses côtés sont formés alternativement par des segments de courbes adjointes  $C^i$  des deux systèmes  $\bar{S}_i^0$  et  $\bar{\bar{S}}_i^0$ , dont les points de base  $[(H), U]$  et  $[(H), U']$  diffèrent seulement par un point simple. Choisissons dans le premier système  $\bar{S}_i^0$  n'importe quelle courbe qui passe par le point  $A_1$ ; elle coupe la courbe  $C_1^m$ , nécessairement, au point  $A_1'$ . Faisons passer par ce point  $A_1'$  une courbe quelconque du second système  $\bar{\bar{S}}_i^0$ ; cette courbe coupe  $C_1^m$  au point  $A_2$ . Ces deux courbes adjointes, ayant sur  $C_1^m$  les points communs au nombre de  $n - 2$  (ce sont les points  $(H), A_1'$ ), découpent, sur  $C_1^m$ , les couples de points  $U, A_1$  et  $U', A_2$  de la même involution  $g_2^1$ . On a alors la correspondance  $U \dots (g) \dots A_1 \dots (E_r) \dots A_2 \dots (g) \dots U'$ .

Ayant égard à ce que chaque correspondance univoque  $E$  peut être exprimée comme le produit de deux involutions univoques de première espèce, dont l'une peut être choisie arbitrairement, on peut écrire  $E_r \equiv g g'$ , et, par suite,  $g E_r g \equiv g g g' g \equiv g' g \equiv E_r^{-1}$ . Les points  $U', U$  forment un couple de points de la correspondance univoque cyclique



$E_r$ , ayant le même sens que les couples  $A_1, A_2$  et  $A_2', A_1'$ . Donc on a le théorème:

Les groupes de points de deux involutions rationnelles  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$ , pris pour points de base de deux systèmes  $\bar{S}_1^{(i)}$  et  $\bar{S}_1^{(i)}$  de courbes adjointes, donnent la solution du problème de Steiner pour le nombre  $r$ , si les points  $U$  et  $U'$ , par lesquels ces involutions complètent le groupe  $(H)$  de  $(n-3)$  points de sorte qu'on obtienne des groupes qui leur appartiennent, forment un couple de points de la correspondance univoque cyclique  $E_r$ . Cette correspondance  $E_r$  donne, dans le même sens, les couples de sommets  $A_{i+1}, A_i$  et  $A_i', A_{i+1}'$ .

Si  $\varphi(r)$  désigne le nombre des différentes correspondances cycliques  $E_r$ , on a,<sup>3)</sup> pour  $r = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k}$ , où  $a_i$  sont les nombres premiers,

$$\varphi(r) = \prod_{i=1}^k (a_i^2 - 1) a_i^{2(\alpha_i-1)}.$$

On peut donc construire, pour chaque point  $U$ , en tout  $\varphi(r)$  points  $U'$ , pour chaque involution rationnelle  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$   $\varphi(r)$  involutions  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$ , qui produisent des polygones fermés pour le nombre  $r$ . Si l'on ne tient compte que de la position et de l'ordre des sommets des polygones sans se soucier de leurs côtés, on peut donc construire  $\varphi(r)$  divers polygones de Steiner fermés pour le nombre  $r$ , dont les sommets voisins  $A_1, A_1'$  sont fixes et communs.

Le nombre de tels polygones qui ont les mêmes sommets, mais dans des ordres différents, est donné par la fonction connue

$$f(r) = \prod_{i=1}^k (a_i - 1) a_i^{\alpha_i-1}.$$

C'est bien évident, si nous remarquons que chaque correspondance cyclique  $E_r$  donne, par sa puissance  $E_r^h$ , où  $h$  et  $r$  sont des nombres incommensurables, encore une correspondance cyclique à la même période  $r$ . Le nombre de polygones, dont les sommets forment des cycles différents est donc donné par la fonction

$$\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{f(r)} = \prod_{i=1}^k (a_i + 1) a_i^{\alpha_i-1}.$$

Cette fonction donne le nombre de toutes les involutions irrationnelles elliptiques  $g_r^1$  qui existent sur  $C_1^m$ .

Les raisonnements précédents nous fournissent immédiatement la construction de tous les polygones fermés, dont les premiers sommets  $A_1, A_1'$  sont donnés et dont les côtés sont formés par des courbes de l'ordre  $l$ . Les sommets de ces polygones forment les cycles  $A_1, A_2, A_3, \dots A_r$  et  $A_1', A_2', A_3' \dots A_r'$  du sens contraire, qui sont formés par l'application de

<sup>3)</sup> Emil Weyr: Über Vervollständigung von Involutionen .... II. Wiener Berichte. Bd. 101. Dezember 1892.



la correspondance cyclique  ${}_iE_r$ , ( $i = 1, 2, \dots, \psi(r)$ ) en partant des points  $A_1$  et  $A_1'$ . Prenons sur la courbe  $C_1^m$  un point quelconque  $U_1$  et construisons, en partant de ce point, le cycle  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_r$  par l'application de la correspondance  ${}_iE_r^{-1}$ . Choisissons, de plus, sur  $C_1^m$  n'importe quel groupe  $(H)$  à  $(n - 3)$  points qui est résiduel au groupe des trois points  $(U_1, A_1, A_1')$ .<sup>4)</sup> Les involutions rationnelles  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$  et  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$ , déterminées par les groupes  $[(H), U_1]$  et  $[(H), U_{1+h}]$ , mènent nécessairement au polygone  $A_1 A_1' A_{1+h} A_{1+h}' A_{1+2h} \dots$ , qui est toujours fermé, ayant  $2\varphi$  sommets, si les nombres  $r$  et  $h$  ont le plus grand diviseur commun  $q$  et si  $r = q\varphi$ .

*Trois cycles de la même correspondance cyclique  $E_r$ , — considérés comme des groupes  $(A)$ ,  $(A')$  et  $(U)$ , — donnent toujours la solution du problème de Steiner pour le nombre  $r$  et pour ses diviseurs.*

3. Dans les raisonnements précédents on a supposé, que les courbes adjointes des deux systèmes  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$  sont du même degré  $l$ . Il est clair que chaque polygone construit ci-dessus peut être remplacé par un polygone, qui a les mêmes sommets et dans le même ordre mais dont les côtés sont formés alternativement par des courbes adjointes de différents ordres  $l$  et  $l'$ . Il suffit, de remplacer, dans la construction, le système  $\bar{S}_l$  par le système  $\bar{\bar{S}}_{l'}$  des courbes adjointes de l'ordre  $l'$ , dont les points de base sont donnés par un groupe quelconque de l'involution rationnelle  $\bar{g}_{n'-2}^{n'-3}$  qui est cor-résiduelle à l'involution  $\bar{g}_{n-2}^{n-3}$ . Voilà pourquoi nous nous bornons au cas où  $l' = l$ .

4. Quant aux sommets, la construction des polygones de Steiner, à l'aide des courbes de deux systèmes  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$ , est univoque. Il en est autrement, pour les côtés, car la dimension  $R$  de ces systèmes est généralement  $R > 1$ . Seulement au cas, où  $l < m$ , il y a  $R = 1$ , de sorte qu'on a, maintenant, deux faisceaux de courbes adjointes.

Si l'on a  $l \geq m$ , la relation a lieu  $R = h + 2$ . (Voir I. 1.) Pour que la construction des polygones soit univoque aussi pour les côtés, c'est-à-dire pour que les deux systèmes  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$  se réduisent aux deux faisceaux, il suffit, d'admettre d'autres conditions linéaires, au nombre de  $h + 1$ .

II. Cela donne lieu à étudier un cas particulier. Posons la question: „Est-il possible de construire sur la courbe  $C_1^m$  des polygones à l'aide des deux faisceaux  $\bar{S}_l$  et  $\bar{\bar{S}}_l$  des courbes adjointes  $C_l$  de telle sorte, que les courbes du même faisceau se coupent seulement aux points fixes de base qui sont situés tous sur la courbe  $C_1^m$ ?”

Les points de base d'un tel faisceau (y compris les points multiples de la courbe  $C_1^m$ ) fournissent forcément en total  $\left(\frac{l(l+3)}{2} - 1\right)$  conditions linéaires indépendantes et donnent, en outre, pour deux courbes quelconques du faisceau, tous les points d'intersection au nombre de  $l^2$ . Cela

<sup>4)</sup> Les groupes  $(H)$  forment une involution rationnelle  $g_{n-3}^{n-4}$  résiduelle à  $g_3^2$  qui est déterminée par les points  $U_1, A_1, A_1'$ .



arrive, comme on peut constater facilement en faisant le calcul, *seulement au cas, où les courbes  $C^l$  du faisceau sont rationnelles.*

Pour remplir ces conditions, il faudrait que les courbes adjointes eussent, aux points de base, c'est-à-dire aux points multiples d'ordre  $i$  de la courbe  $C_1^m$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), des points multiples d'ordre  $i'$ , la relation  $i' > i - 1$  ayant lieu pour un ou pour plusieurs de ces points. Il ne faut pas oublier d'assurer en même temps que les courbes de ce faisceau découpent une involution rationnelle  $g_2^1$  sur la courbe  $C_1^m$ .

Pour qu'il en soit ainsi pour  $l < m$ , il faut, — comme on peut trouver par un calcul bien connu — que  $(i - 1) \leq i' \leq i$ . Si l'on a  $l = m$ , les courbes adjointes  $C^l$  peuvent avoir en outre, mais seulement en un point multiple d'ordre  $i$  un point multiple d'ordre  $i + 1$ . Pour  $l > m$  on peut toujours satisfaire à quelques-unes de ces conditions. Cela résulte de ce que ces conditions abaissent le nombre  $h$ . (Voir I. 1, et I. 4.)

Soient  $S_l'$  et  $S_l''$  deux faisceaux de courbes adjointes rationnelles  $C^l$ , à l'aide desquels on peut construire les polygones de Steiner. On peut supposer, — comme nous l'avons montré ci-dessus, — que les points de base de ces deux faisceaux diffèrent seulement par un point simple, de sorte que ces faisceaux appartiennent au même réseau homaloïde de courbes rationnelles  $C^l$ ; deux courbes quelconques  $C^l$  de faisceaux différents se coupent alors seulement en un point variable. Comme chaque faisceau de courbes rationnelles peut être toujours transformé, — comme l'a montré Noether<sup>5)</sup> — par des transformations quadratiques en un faisceau de rayons, et par suite le réseau homaloïde en un système de droites d'un plan, on peut toujours transformer les polygones inscrits à une courbe  $C_1^m$  à l'aide de ces deux faisceaux  $S_l'$  et  $S_l''$  en polygones rectilignes; cependant ceux-ci ne peuvent être inscrits, en général, qu'à une cubique plane. Chaque courbe elliptique plane  $C_1^m$ , pour laquelle on peut construire des polygones inscrits à l'aide de deux faisceaux de courbes adjointes rationnelles, peut être transformée par une transformation de Cremona en une cubique plane  $C^3$ . Donc on a le théorème:

*„Les polygones de Steiner, inscrits à une courbe elliptique plane  $C_1^m$ , à l'aide de deux faisceaux de courbes adjointes dont tous les points de base sont situés sur la courbe  $C_1^m$ , sont composés de courbes rationnelles. On peut construire des polygones inscrits à une courbe elliptique plane  $C_1^m$  et composés de segments de courbes adjointes rationnelles  $C^l$ , mais seulement au cas, où l'on peut transformer la courbe  $C_1^m$  par une transformation de Cremona en une cubique plane  $C^3$ . Si l'ordre des courbes adjointes  $C^l$  est  $l < m$ , chaque point multiple d'ordre  $i$  de la courbe  $C_1^m$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), est un point multiple d'ordre  $i'$  pour les courbes adjointes, de sorte que  $(i - 1) \leq i' \leq i$ . Si  $l = m$ , les courbes adjointes  $C^l$  peuvent avoir, en outre,*

<sup>5)</sup> Noether: Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. Pag. 5—7.



*mais seulement en un point multiple d'ordre  $i$ , un point d'ordre  $(i + 1)$ . Pour  $l > m$ , les courbes adjointes  $C^l$  peuvent avoir, bien entendu, des points multiples d'ordre plus élevé."*

On ne peut donc pas construire, pour une courbe  $C_1^6$ , qui a neuf points doubles, des polygones de Steiner composés de courbes rationnelles; mais c'est possible à l'aide de courbes non rationnelles.

Appliquons, à la fin, nos résultats à une courbe  $C_1^4$  qui a deux points doubles  $D_1, D_2$ . On obtiendra ainsi l'énoncé exact du théorème de Steiner qui a été mal formulé par lui-même, par suite d'une inadvertance:<sup>6)</sup>

*Pour une courbe  $C_1^4$  qui a deux points doubles  $D_1$  et  $D_2$ , on peut toujours construire des polygones inscrits à l'aide de deux faisceaux de coniques  $(D_1, D_2, X, U)$  et  $(D_1, D_2, X, U')$ , où les points  $X, U$  et  $U'$  peuvent être choisis arbitrairement sur la courbe  $C_1^4$ . Si le point  $U'$  correspond au point  $U$  dans une correspondance univoque cyclique  $E_r$  à la période  $r$ , les polygones ainsi construits sont toujours fermés, ayant  $2r$  sommets.*

---

<sup>6)</sup> J. Steiner: Geometrische Lehrsätze: Crelle's Journal, Bd. 32, S. 182.



# On young crustal movements in the Carpathians.

By

DR. J. MOSCHELES.

Presented the 26 October 1923.

The White Carpathians, one of the mountain-ranges forming the boundary between Moravia and Slovakia, represent the first and southernmost chain of the Carpathian Flysch zone. In the south they begin with the Polana (580 metres) on the Myjava, where a troughlike depression filled with Miocene separates them from the Small Carpathians, belonging to the outer zone of the Carpathian massives. From the Polana the White Carpathians can be traced some 90 kilometres to the NE. They form a gridiron-shaped highland, bearing the divide between the Morava in the west and the Váh in the east. The altitudes are considerable: the Great Javorina attains 968 metres and the crests but rarely sink below 700 metres. Yet the divide is often not to be found on these crests. In many cases it crosses the depressions between the chains, where one passes quite imperceptibly from one valley to another of inverse direction.

There can be no doubt whatever that the line of greatest altitudes once represented the divide between the Morava and the Váh. But the Váh being nearer, its base-level of erosion lower, its tributaries extended their head-waters to the west. The water-gap of the Vlára, which flowing eastward crosses the two ridges of the White Carpathians, offers excellent examples of such very recent captures. A little below 400 metres the railway here passes from the valley of the Olšava, tributary of the Morava, to that of the western Řeka<sup>1</sup>), one of the head-waters of the Vlára, which at Nemčová joins the Váh.

The geological structure of the region was studied by professor Dr. R. Kettner and Dr. Kodym. Apart from the later superficial deposits represented by rock waste, loam, gravels and calcareous tuffs (the latter

---

<sup>1</sup>) The Czech word "řeka" signifies river.



especially in the valley of the Bilnička), there are to be found only the two series of the lower Flysch: the Istebna sandstones of the Cretaceous, and the Hieroglyphic series of the Eocene and lower Oligocene, while the Magura sandstones of the upper Oligocene only appear at a greater distance north of our region.

After the sedimentation of the Flysch, therefore at the end of the Oligocene a heavy folding took place which led to the formation of overthrust faults, the planes of which dip SE, their strike being NE. One of these overthrust faults crosses the valley at Bohuslavice, another at Štítná, while a third marks the entrance of the gap itself. By these overthrust faults the Istebna sandstones were brought to the surface. A number of minor overthrust faults are to be found within the Hieroglyphic series.

The fine-grained Istebna sandstones offer but little resistance to weathering. Their kaolinous matrix being not too solid, they crumble easily enough. They are after all less resisting than the beds of the Hieroglyphic series, save where they are developed as conglomerates. The Hieroglyphic series consists of argillaceous and marly beds, alternating with layers of sandstone. They give rise to the very numerous landslides which somewhat obscure the morphological forms.

To these landslides the valley of the Vlára owes its mature aspect, its large valley-bottom, while the gradient is still rather steep and especially by no means graded. Then also the mountains often approach from both sides as at Bohuslavice (the Vrchy 461 metres on the right, the 477 metre-level on the left bank) and in the gap of the Vlára (the Javorník vrch 774 and the Trati hušť 707 metres, the elevations just above the valley still exceeding 600 metres). Therefore, though the valley has a large bottom, it is after all but narrow.

The three principal headwaters of the Vlára are the western Řeka or the Řeka of Hrádek, the northern Řeka or the Řeka of Vrbětice, and the Brumovka, the two former joining at Bohuslavice, the latter at Bilnice.

In the valley of the Řeka of Vrbětice, northwest of the overthrust fault of Bohuslavice, we meet with a set of well developed terraces. The road from Lhota Vlachová to Vlachovice has been carried on a terrace in 426 metres. Its continuation are the terraces west of Vrbětice (421 and 422 metre-level). Then this set of terraces can be traced *upstream* the Řeka of Hrádek, where at Divnice a terrace flat in about 415 metres is developed on the left side of the actual valley. The old, now dissected valley bottom lies a little above the actual divide. It is represented by the Široký vrch, the culminating point of the road Hrádek-Pitin (412 metres). Farther to the west towards Uherský Brod this old valley bottom seems to have been completely destroyed by subsequent erosion. We have therefore established the existence of a set of terraces corresponding to a dissected valley bottom northwest of the overthrust fault of Bohuslavice in about



420 metres of altitude. This valley bottom appears to have been formed by a river flowing to the southwest, to the Morava.

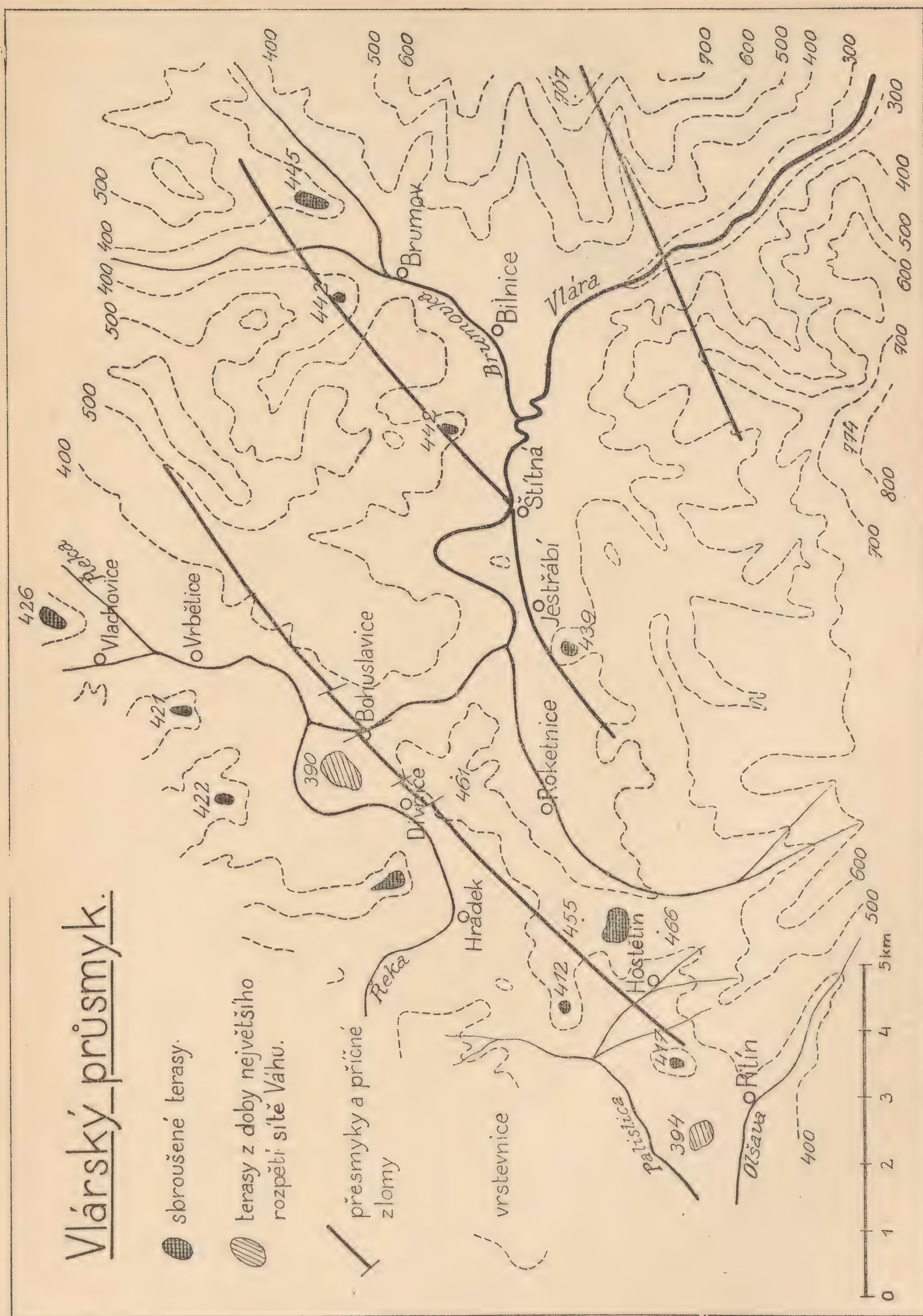
Farther to the east between the gaps of Bohuslavice and Vlára we can trace another set of terraces. They begin in the valley of the Brumovka at Brumov (445 metre-level north and 442 metre-level west of this village) and continue upstream the actual valley of the Řeka: 442 metre-level opposite Štítná and 439 metre-level west of Jestřabí. In the last named locality the terrace lies on the Istebna sandstones, their outcrop being due to an overthrust fault. Then the former valley appears to have followed the course of the brook of Roketnice, but in inverse direction. The depression of about 430 metres between the 466 and 455 metre-levels, actually crossed by the road Roketnice-Hostětin, is part of this former valley to-day out of function. In place of the gap of Bohuslavice there was then a divide of secondary order.

No terraces are to be found in the gap of the Vlára. It crosses the former, original divide between the Morava and the Váh. But the terraces of the former westward flowing rivers are to-day dislocated. We traced them in 420 metres northwest of the overthrust fault of Bohuslavice, in 430 metres southeast of it, and in 440 metres east of the overthrust fault of Štítná, we must therefore assume that tectonic movements along these overthrust faults were repeated in very recent times, long after the principal folding at the end of the Oligocene and after the formation of the now dissected valley bottom represented by the terraces here described.

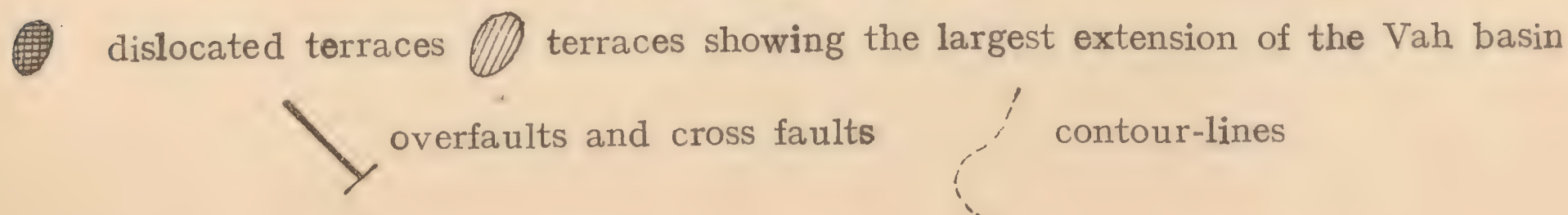
These subsequent movements still influenced the formation of the actual valleys. The large meandres of the Řeka at Bohuslavice and Štítná were developed just where the river has to cross two of the overthrust faults, and where therefore it had to deepen its valley in a rising landmass. This is also partly the reason why the valley narrows at Bohuslavice and in the gap of the Vlára, where it has likewise to cross an overthrust fault, while it is very large at Bilnice. The existence of former divides in these places is not sufficient to explain all by itself the sudden narrowing of the valley.

Notwithstanding these exceedingly young crustal movements, by which the eastern parts of the White Carpathians were raised above the more western parts, the Váh was able to encroach upon the river-basin of the Morava. Yet there are some indications, that these movements were not quite without influence on the rivers, that by them the Morava was enabled to recapture at least part of its lost tributaries. On the Olšava south of the station of Pitín there is a terrace in 394 metres and in about the same altitude (390 metres) a second terrace lies within the meandre of Bohuslavice. Between them runs the actual divide in about 400 metres, but it is only due to a landslide which here choked part of a once continuous valley. At the time of its maximum extension to the west the Řeka of





Gap of the Vlára.









Hrádek had its headwaters west of the actual divide, and this is also suggested by the direction of the tributaries of the Palistica-Olšava at Kololac. Perhaps the entire Řeka west of Bohuslavice would have been already recaptured by the Morava, but that the gap of Bohuslavice coincides with a cross-dislocation, facilitating and the original capture by the Váh and the subsequent deepening of the valley in the rising landmass.

*Geographical Institute  
of the Charles University, Prague.*



# Variation de la réfraction spécifique des gaz avec la pression au-dessous d'une atmosphère.

Par

V. POSEJPAL.

Présenté le 8 Juin 1923.

§ 1. J'ai donné dans deux articles, publiés dans les Rozpravy\*) de la II<sup>e</sup> Classe de l'Académie, la description d'une méthode pour mesurer la variation de la réfraction des gaz avec la pression au-dessous d'une atmosphère ainsi que les résultats que j'ai obtenus en me servant de cette méthode pour l'air et l'anhydride carbonique, CO<sub>2</sub>.

La réfraction  $n - 1$  d'un gaz de la pression  $p$  est, tant que l'intervalle de pression reste modéré, exprimée par la relation

$$n - 1 = K p (1 + \beta p). \quad (1)$$

Dans mes résultats on trouvait ce fait singulier, que le paramètre  $\beta$  de l'équation (1) est donné par des valeurs beaucoup plus grandes que celles trouvées, pour les mêmes gaz, par des auteurs antérieurs qui travaillaient avec des pressions  $p$  beaucoup plus élevées. Une analyse plus détaillée m'a conduit à prouver que  $\beta$  est une fonction de la valeur moyenne de l'intervalle de pression auquel elle se rapporte, en restant inversement proportionnelle à la pression  $p$  tant que celle-ci reste faible. Il s'en suit qu'alors la réfraction spécifique, en restant sensiblement constante pour les pressions moyennes, croît considérablement avec la pression, au-dessous d'une atmosphère.

En considérant comme évident que la réfraction spécifique de la matière en solution variera de même avec sa concentration qu'elle le fait à l'état gazeux avec la pression, j'étais amené à admettre une liaison interne étroite entre la marche tout-à-fait analogue de la vitesse de variation avec la pression de la réfraction spécifique d'une part et de la variation du pouvoir fluorescent d'autre part.\*\*)

---

\*) Rozpravy, année XXVI, N<sup>o</sup> 61, 1918; année XXIX, N<sup>o</sup> 13, 1920.

\*\*) Časopis pro pěst. math. a fys. L., pg. 150, 1921; Le Journal de Physique et le Radium (6), T. II, pg. 85, 1921.



Peu après, dans son article intéressant,\*) M. Chéneveau a montré que la réfraction spécifique des solutions salines KCl et  $(\text{NO}_3)_2\text{Mg}$  varie bien avec la pression osmotique comme celle de l'air et de l'anhydride carbonique varie avec la pression, mais que le sel  $\text{NO}_3\text{NH}_4$  donne cette variation en sens opposé, et il a considéré comme chose probable que l'hydrogène donnera, lui aussi, un résultat semblable.

Le caractère imprévu des valeurs que j'ai trouvées pour  $\beta$  aussi bien que le travail de M. Chéneveau demandaient catégoriquement que d'autres gaz fussent soumis aux mêmes études. Je veux alors, dans ce qui va suivre, donner une analyse des résultats obtenus, sous l'emploi des mêmes appareils, par M. Šafránek\*\*) au cas de l'oxygène et par M. Schacherl\*\*\*) au cas de l'hydrogène.

§ 2. *L'oxygène.* M. Šafránek a trouvé pour les paramètres de l'équation (1) les valeurs:

$$\left. \begin{aligned} K \cdot 10^6 &= 0.33925 \pm 0.00013 \\ \beta \cdot 10^8 &= 527 \pm 47 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

sous les mêmes conditions qui étaient valables dans mes propres mesures ( $\lambda = 54623 \text{ Å}^\circ$ ,  $t = 16^\circ \text{C}$ ,  $p$  en  $\text{mm}$ , au-dessous d'une atmosphère). Ces valeurs donnent pour la réfraction sous conditions normales de température et de pression:

$$(n - 1) \cdot 10^6 = 274.04 \pm 0.25,$$

ce qui est une valeur bien trop grande.

Quant au paramètre  $\beta$  qui nous intéresse principalement, le tableau I

T a b l e a u I.

$\text{O}_2$

Intervalle de pressions $\Delta p^m/m$	Pression moyenne $p^m/m$	$\beta \cdot 10^8$	$p \cdot \beta$	$t^\circ$	Auteurs
0—760	380	527	0.0020	16°	Šafránek 1922.
0—5500	2750	111	0.0030	13.5°	Mascart 1877†)

montre que la valeur de Šafránek est beaucoup plus grande que celle donnée par Mascart celle-ci se rapportant bien entendu, à un intervalle de pression beaucoup plus élevé. Une analyse plus détaillée, qu'il est inutile de reproduire ici, montre que la valeur  $\beta$  de Šafránek est bien sûre et qu'il y a ici une analogie parfaite entre l'oxygène et les gaz étudiés antérieurement: Aussi bien que  $\beta$  de l'air et de l'anhydride carbonique, le paramètre  $\beta$  de l'oxygène est beaucoup plus grand pour les pressions au-dessous d'une

\*) C. R. t. 172, p. 1408, 1921.

\*\*) Rozpravy, II Classe, année XXXI, N° 17, 1923; Časopis LI, pg. 308, 1922.

\*\*\*) Publications de la Faculté des Sc. de l'Univ. Masaryk, année 1923, N° 33.

†) Recueil de Constantes Phys., pg. 197.



atmosphère que pour les intervalles de pression se trouvant au-dessus. L'équation (1) n'est donc valable que pour les intervalles de pression bien étroits; à mesure que la valeur moyenne  $p$  de chaque intervalle de pression augmente le paramètre  $\beta$  diminue en restant inversement proportionnel à  $p$  ( $p \beta = \text{const.}$ ), tant que  $p$  reste plus petit que 2 atmosph.; depuis ça  $\beta$  diminue de plus en plus lentement.

Rappelons que la réfraction spécifique des gaz sous faibles pressions est suffisamment bien traduite par la formule de Newton-Gladstone,

$$\frac{n - 1}{\varrho} = \text{const},$$

en désignant par  $\varrho$  la densité.

Tableau II.

$p^m/m$	$p \beta$		
	L'air	O <sub>2</sub> non réduit	O <sub>2</sub> réduit à l'air.
0	0.0014	0.0020	0.0014
380	0.0014	0.0020	0.0014
1700	0.0015	—	—
2750	—	0.0030	0.0021
3150	0.0023	—	—
7500	0.0049	—	—

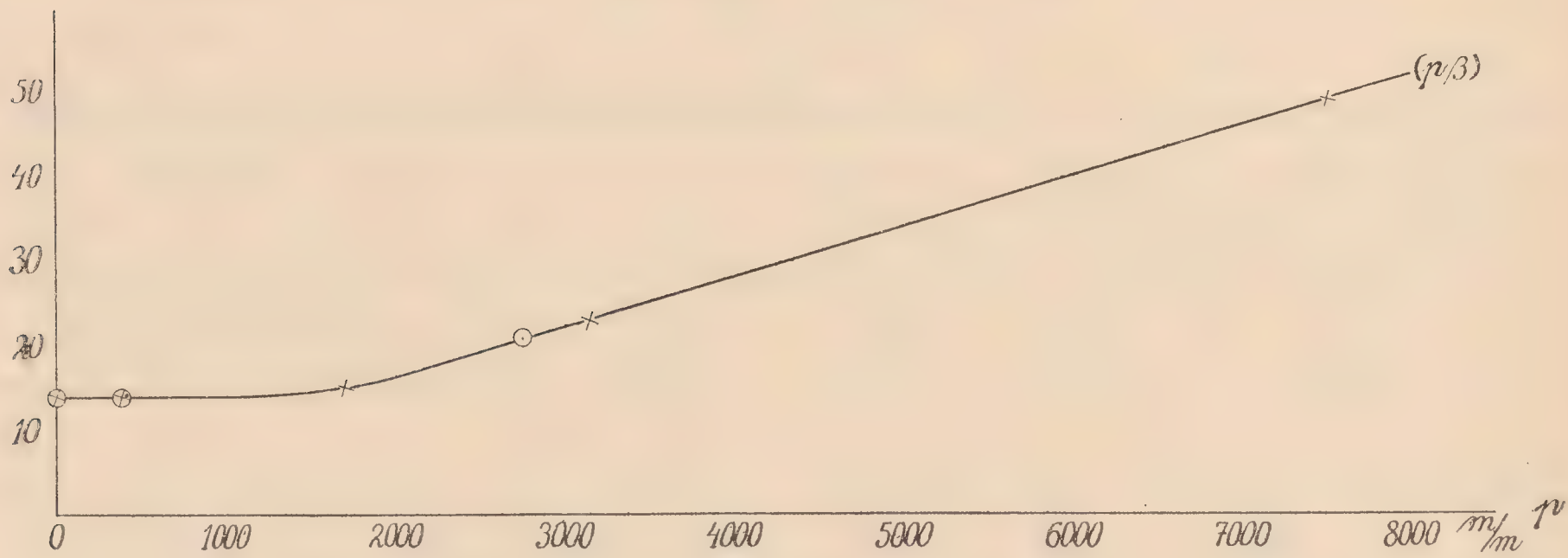


Fig. 1.

En exprimant l'écart de la loi de Boyle-Mariotte par une formule analogue à la équation (1)

$$\varrho = K_e p (1 + \beta_e p)$$

on obtient

$$\frac{n - 1}{\varrho} = C (1 + (\beta - \beta_e) p). \tag{3}$$



En tirant  $\beta_e$  des observations de la compressibilité de l'oxygène pour les pressions au-dessous et médiocrement au-dessus d'une atmosphère, faites par Lord Rayleigh (1905), D. Berthelot (1907), Leduc et Sacerdote (1897), Kamerlingh Onnes et Hyndman (1902), on trouve que ses valeurs, réduites à notre température de 16° C, diffèrent peu entre elles et de la valeur  $\beta_e \cdot 10^8 = 100$ . Alors  $\beta - \beta_e$  reste, sous de faibles pressions, un nombre positif assez grand, comme le montre le tableau III.

Tableau III.  
Oxygène,  $t = 16^{\circ}$  C.

Intervalle de pressions $\Delta p^m/m$	Pression moyenne $p^m/m$	$\beta$	$\beta_e$	$\beta - \beta_e$
0 — 100	50	0.00004000	0.00000095	0.00003905
100 — 200	150	0.00001340	0.00000095	0.00001245
200 — 300	250	0.00000800	0.00000095	0.00000705
300 — 400	350	0.00000570	0.00000095	0.00000475
400 — 500	450	0.00000450	0.00000095	0.00000355
500 — 600	550	0.00000360	0.00000095	0.00000265
600 — 700	650	0.00000310	0.00000095	0.00000215
700 — 800	750	0.00000270	0.00000095	0.00000175
800 — 1200	1000	0.00000250	0.00000099	0.00000151
1200 — 2000	1600	0.00000202	0.00000109	0.00000093
2000 — 3000	2500	0.00000130	0.00000124	0.00000006
2500 — 3000	2750	0.00000111	0.00000117	—0.00000006

Pour cause de la forte variation de  $\beta$  avec la pression au-dessous d'une atmosphère on a calculé les valeurs de  $\beta$  se trouvant dans la troisième colonne du tableau III, d'après la fonction  $p \beta = f(p)$ , représentée par le tableau II et le graphique (1), en posant au-dessous d'une atmosphère  $p \beta = 0.002003$ . Le tableau IV et la courbe  $O_2$  dans le graphique (2) montrent la marche de la réfraction spécifique de l'oxygène avec la pres-

Tableau IV.  
Oxygène,  $t = 16^{\circ}$  C,  $\frac{n - 1}{\rho} = f(p)$ .

$p$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	1200	1800	2200
$\frac{n - 1}{\rho}$	10000	9979	9972	9968	9966	9964	9963	9962	9961	9959	9957	9957



sion, où on avait pris arbitrairement, pour  $p = 0$ ,  $\frac{n - 1}{\rho} = 10.000$ . On voit que la courbe  $O_2$  a une marche semblable à celle de l'air et de l'anhydride carbonique.

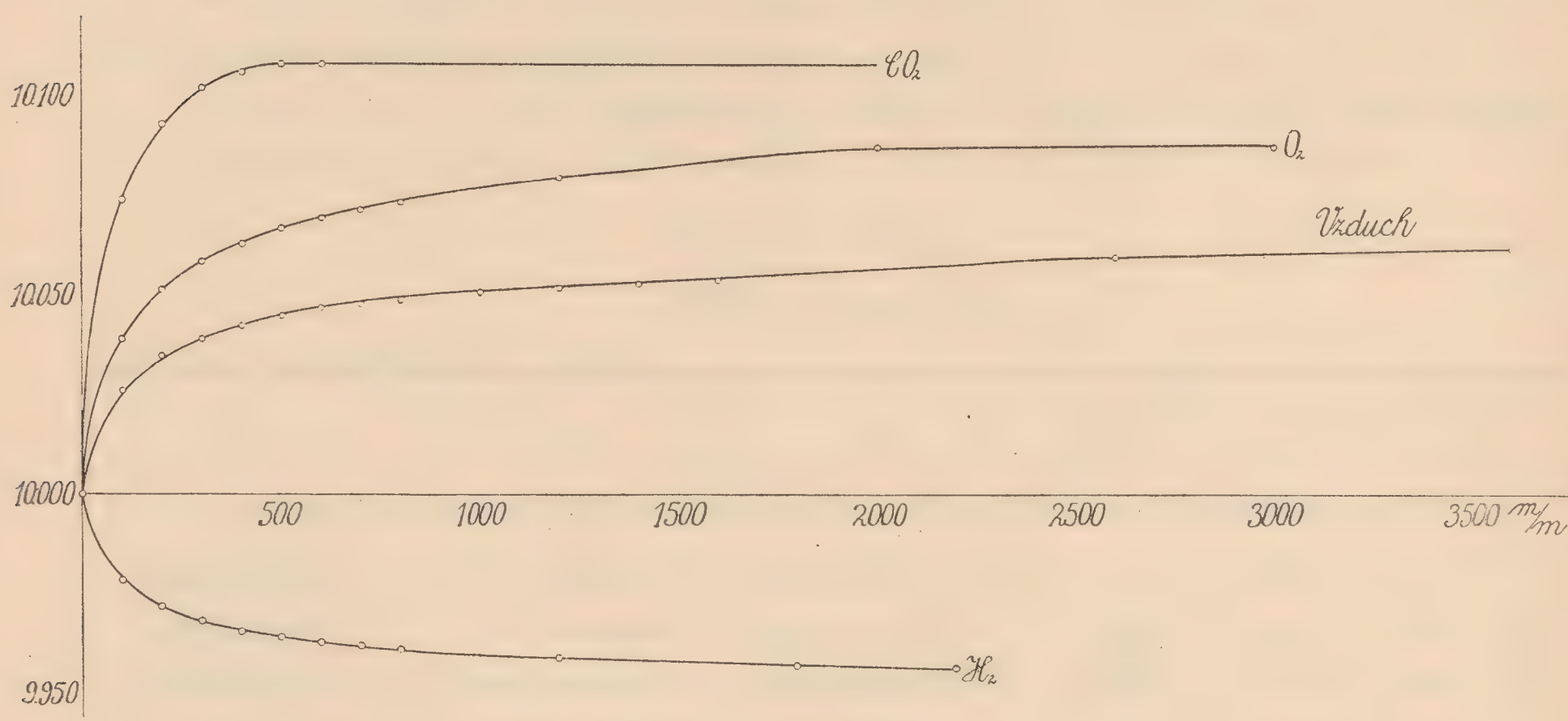


Fig. 2.

§ 3. *L'hydrogène.* M. Schacherl a effectué ses mesures de l'hydrogène, sous les mêmes conditions de température etc., deux fois. La première série d'observations lui a donné

$$\left. \begin{aligned} K \cdot 10^6 &= 0.17447 \pm 0.00017 \\ \beta \cdot 10^8 &= -297 \pm 89 \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

la seconde série a donné

$$\left. \begin{aligned} K \cdot 10^6 &= 0.17417 \pm 0.00023 \\ \beta \cdot 10^8 &= -282 \pm 136 \end{aligned} \right\} \quad (4b),$$

alors la moyenne est:

$$\left. \begin{aligned} K \cdot 10^6 &= 0.17436 \pm 0.00017 \\ \beta \cdot 10^8 &= -292 \pm 74 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ce qui donne pour la réfraction sous les conditions normales de température et de pression

$$(n - 1) \cdot 10^6 = 140.60 \pm 0.15,$$

tandis que les meilleures mesures de C. et M. Cuthbertsons et de Koch (1909) ont donné 139.7. Notre méthode d'observation, étant adaptée pour la mesure du paramètre  $\beta$  au-dessous d'une atm., est dans un grand désavantage vis-à-vis des observations n'ayant pour but que la mesure de la réfraction  $n - 1$  sous la pression atmosphérique. Par conséquent on peut qualifier le résultat de M. Schacherl comme favorable à l'estimation de la bonne validité de ses mesures.



T a b l e a u V.  
 $H_2$

Intervalle de pressions $\Delta p^m/m$	Pression moyenne $p^m/m$	$\beta \cdot 10^8$	$p \cdot \beta$	$t^\circ$	Auteurs
0 — 760	380	—292	—0·0011	16 <sup>0</sup>	Dr.Fr.Schacherl 1922
0—4000	2000	— 85	—0·0017	20 <sup>0</sup>	Perreau 1896*)

Le tableau V montre tout d'abord une différence essentielle entre les valeurs de  $\beta$  pour l'hydrogène et celles pour les autres gaz, les premières étant *négatives*. Mais quant aux valeurs absolues, le cas d'hydrogène est tout à fait analogue aux autres: la valeur (absolue) de  $\beta$  trouvée pour les pressions au-dessous d'une atm. est beaucoup plus grande que celle, donnée par Perreau (1896) pour les pressions plus élevées. Une analyse plus détaillée montre que cette analogie se rapporte aussi à la marche de  $\beta$  avec la valeur moyenne  $p$  des intervalles de pression respectifs de sorte que la valeur (absolue) de  $\beta$  diminue à mesure que la pression moyenne  $p$  augmente, le produit  $p \beta$  restant pour des faibles pressions, surtout pour ces au-dessous d'une atm., invariable.

Pour le paramètre  $\beta_e$  résulte des mesures de la compressibilité d'hydrogène, faites sous des faibles pressions par Lord Rayleigh (1905), Leduc et Sacerdote (1897), D. Berthelot (1907), P. Chappuis (1903), Witkovski (1905), Schalkwijk (1901), une valeur, négative aussi, et sensiblement égale à  $10^8 \beta_e = -77$ . La différence  $\beta - \beta_e$  est alors, ici aussi, un nombre assez considérable, mais négatif, comme on le voit dans le tableau VI

T a b l e a u VI.  
Hydrogène,  $t = 16^\circ \text{C}$ .

Intervalle de pressions $\Delta p^m/m$	Pression moyenne $p^m/m$	$\beta$	$\beta_e$	$\beta - \beta_e$
0 — 100	50	—0·00002220	—0·00000077	—0·00002143
100 — 200	150	—0·00000740		—0·00000663
200 — 300	250	—0·00000444		—0·00000367
300 — 400	350	—0·00000317		—0·00000240
400 — 500	450	—0·00000247		—0·00000170
500 — 600	550	—0·00000202		—0·00000125
600 — 700	650	—0·00000171		—0·00000094
700 — 800	750	—0·00000148		—0·00000071
800 — 1200	1000	—0·00000135		—0·00000058
1200 — 1800	1500	—0·00000110		—0·00000033
1800 — 2200	2000	—0·00000085		—0·00000008

\*) Recueil de Constantes Phys., pg. 197.



analogue au tableau III, de sorte que la réfraction spécifique de l'hydrogène varie, elle aussi, avec la pression, comme le montre le tableau VII et la courbe  $H_2$  dans le graphique 2. Mais elle varie en sens contraire à des

T a b l e a u VII.

Hydrogène,  $t = 16^\circ \text{C}$ ,  $\frac{n-1}{\rho} = f(p)$ .

$p$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	1200	2000	3000
$\frac{n-1}{\rho}$	10000	10039	10051	10059	10063	10067	10070	10072	10074	10080	10087	10088

autres gaz étudiés jusqu'ici, ainsi que l'a prévue M. Chéneveau. Alors si la pression augmente la réfraction spécifique diminue, très rapidement pour les pressions faibles, situées loin au-dessous d'une atm., puis elle diminue de plus en plus lentement de sorte que partant d'une pression de 2000 *mm* elle devient invariable avec la pression.

§ 4. La marche inverse de la réfraction spécifique de l'hydrogène exige que les idées qui m'ont permis de faire comprendre sa variation dans le cas de l'air et de l'anhydride carbonique soient complétées de sorte qu'elles puissent répondre à tous ces deux cas. M. Chéneveau, dans son travail,\*) a déjà indiqué le chemin par lequel cela pourrait être fait en admettant que  $N$ , le nombre des électrons dispersifs par l'unité de volume, peut, lui aussi, varier avec la pression en augmentant si la pression diminue.

En acceptant cette manière de voir je tiens à remarquer qu'elle est bien d'accord avec les faits expérimentaux. Ainsi par exemple Ladenburg,\*\*) puis Ladenburg et Loria\*\*\*) ont montré que l'hydrogène, un des gaz les plus transparents, exerce une forte absorption sélective et une dispersion anormale dans la région de la ligne rouge  $H_\alpha$  s'il a été excité, sous une pression de 4 *mm* environ, à une émission lumineuse. Tandis qu'alors le nombre des électrons dispersifs se rapportant à la fréquence  $\nu_{H_\alpha}$  est normalement sensiblement égal à zéro, dans l'état d'excitation ce nombre-ci est déjà si grand que l'on observe une forte absorption et dispersion anormale.

Mais en mesurant  $N$ , les mêmes auteurs ont trouvé, que ce n'est qu'une de 50.000 molécules d'hydrogène à qui correspond un électron dispersif. Alors, même dans le gaz excité,  $N$  est un nombre très petit par rapport au nombre des molécules d'hydrogène et, naturellement, il est encore beaucoup plus petit dans l'état normal. D'autres corps donnent des résultats semblables. Ainsi, dans ses Études de Photochimie, pg. 81,

\*) l. c.

\*\*) Über die Absorption des leuchtenden Wasserstoffs. Ber. der deutsch. phys. Ges., 1908, p. 550.

\*\*\*) Über die Dispersion des leuchtenden Wasserstoffs. Ibid. p. 858.



M. Henri\*) indique pour le méthylisobutylcétone, qu'une seule molécule sur 1000 participe à l'absorption ultraviolette de fréquence  $\nu = 1109 \cdot 10^{12}$ , etc. En général, le nombre des électrons dispersifs est toujours assez petit par rapport au nombre des molécules, il est surtout très petit dans le cas de l'hydrogène.

Supposons maintenant, d'après la théorie de Rutherford-Bohr, que l'émission aussi bien que l'absorption des atomes est rigoureusement monochromatique, et soit  $\nu_K$  la fréquence propre de l'atome dans son état donné. Nous pouvons admettre comme un fait expérimental qu'un corps idéal ayant des atomes rigoureusement identiques et de la même fréquence

propre  $\nu_K$ , aura, pour la fréquence  $\nu$ , la réfraction spécifique  $R_K = \frac{C_K}{\nu_K^2 - \nu^2}$ ,

$C_K$  étant une constante indépendante des conditions physiques extérieures, de sorte que  $R_K$  est invariable. Soit  $N_K$  le nombre d'atomes par unité de volume de ce corps idéal. Un corps réel, par exemple un volume donné de gaz, représentera en chaque instant un mélange de tels corps idéaux aux

concentrations  $\alpha_K = \frac{N_K}{\mathfrak{N}}$ ,  $\mathfrak{N} = \sum N_K$  étant le nombre total des atomes, et

alors  $\sum \alpha_K = 1$ . La réfraction spécifique  $R$  de ce corps résultera, d'après la loi des mélanges, de l'expression

$$R = \alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_K R_K + \dots = \sum_{K=0}^n \alpha_K R_K,$$

la concentration  $\alpha_0$  correspondant au corps idéal dont les atomes se trouvant au zéro d'énergie interne ne peuvent, dans le moment donné, ni émettre ni absorber la radiation et dont la réfraction spécifique  $R_0$  est alors égale à zéro.

Sous conditions données de la température et de la pression tous les  $\alpha$  changeront incessamment, d'après la loi de hasard, mais leurs valeurs moyennes resteront invariables,  $R$  ne variera pas. Mais  $R$  variera aussitôt que par la variation de la pression, par exemple, ces changements des  $\alpha$  prennent un sens donné.

Et en effet, selon les idées de M. Perrin qui ont servi de point de départ dans mon analyse primitive,\*\*) on est conduit à admettre l'augmentation de l'énergie interne des atomes à mesure que leurs distances moyennes augmentent, ce qui va se voir sur les  $\alpha$  de deux manières: 1<sup>o</sup> le nombre

d'atomes d'énergie zéro va diminuer,  $\alpha_0$  diminue et  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  croît; 2<sup>o</sup> toutes

les valeurs des rapports  $\alpha_h : \alpha_k$  croissent, supposé  $\nu_h > \nu_k$ .

Examinons maintenant la réfraction spécifique de l'hydrogène, pour la fréquence  $\nu$  de la raie verte de mercure. A pression atmosphérique  $\alpha_0$

est, d'après ce qu'on a dit plus haut, très grand,  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  est alors très petit.

\*) Victor Henri, Etudes de Photochimie, Paris 1919.

\*\*) Journal de Phys., l. c. pg. 91.



La grande transparence du gaz prouve que toutes les fréquences propres d'atomes,  $\nu_K$ , sont très grandes par rapport à la fréquence  $\nu$ , alors toutes les  $R_K$  sont bien petites mais peu différentes entre elles. Si maintenant la pression diminue,  $\alpha_0$  diminue,  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  augmente, une faible diminution relative

de  $\alpha_0$  en produisant un fort accroissement relatif de  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$ . Alors la somme

des produits  $\sum_{K=1}^n \alpha_K R_K$  va grandir car, les  $R_K$  étant sensiblement égales entre elles, il reste insignifiant que ce sont les termes  $R_h$  plus petits dont les facteurs  $\alpha_h$  gagnent en dépit des facteurs  $\alpha_k$  liés aux termes  $R_k$  plus grands.

Eh bien la réfraction spécifique  $R$  de l'hydrogène croît si sa pression diminue au-dessous d'une atmosphère. Pour un autre gaz, l'oxygène par exemple, les fréquences propres  $\nu_K$  de ses atomes sont, à la pression atmosphérique, plus proches de  $\nu$  et alors les réfractions sp.  $R_K$  sont plus grandes

et plus inégales entre elles. Aussi la somme  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  est plus grande par rapport à  $\alpha_0$  que dans le cas de l'hydrogène. Alors la réfraction atomique ou moléculaire de l'oxygène est plus grande que celle de l'hydrogène.

Si maintenant la pression diminue,  $\alpha_0$  diminue,  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  augmente. Mais ici une faible diminution relative de  $\alpha_0$  ne produisant qu'un médiocre accroissement relatif de  $\sum_{K=1}^n \alpha_K$  la somme des produits  $\sum_{K=1}^n \alpha_K R_K$  va diminuer, le fait que ce sont les facteurs  $\alpha_h$  des termes  $R_h$  plus petits qui y gagnent en dépit des facteurs  $\alpha_K$  des termes  $R_K$  plus grands étant devenu prépondérant.

Eh bien la réfraction spécifique  $R$  de l'oxygène diminue si sa pression diminue au-dessous d'une atmosphère.

La variation de la réfraction spécifique, interprétée ainsi, sert de preuve expérimentale de l'existence des changements interatomiques ayant lieu sous actions mêmes beaucoup plus simples que ne l'est par exemple l'excitation d'un gaz par une décharge électrique. Il serait, sans doute bien important de continuer les mêmes mesures avec un des gaz monoatomiques, l'hélium par exemple.



## Résumé.

1<sup>o</sup>. On a prouvé, en partant de l'équation  $n - 1 = K p (1 + \beta p)$  (où  $n$  est l'indice de réfraction d'un gaz sous  $p$  mm de pression), que les valeurs du paramètre  $\beta$ , trouvées par M. Šafránek pour l'oxygène et par M. Schacherl pour l'hydrogène, au-dessous d'une atmosphère, sont numériquement beaucoup plus grandes que celles qui ont été trouvées par des auteurs antérieurs, sous des pressions plus élevées.

2<sup>o</sup>. D'une manière analogue comme dans le cas de l'air et de l'anhydride carbonique, on a constaté, au-dessous d'une atmosphère et sensiblement peu au-dessus, une proportionalité inverse entre  $\beta$  et la valeur moyenne  $p$  de l'intervalle correspondant de pression; pour les intervalles plus élevés,  $\beta$  diminue de plus en plus lentement avec la pression croissante. Pour l'hydrogène on doit y entendre la valeur absolue de  $\beta$ , sa valeur vraie étant négative.

3<sup>o</sup>. Il suit des valeurs des paramètres  $\beta$  et des données expérimentales sur la compressibilité de ces gaz-là, une variation de leur réfraction spécifique, au-dessous et sensiblement peu au-dessus d'une atmosphère. La marche de cette variation est représentée par des courbes monotones, tout-à-fait analogues à celles trouvées auparavant pour l'air et l'anhydride carbonique, avec la seule différence importante que la courbe de l'hydrogène a une marche inverse: tandisque pour les autres gaz la réfraction spécifique croît avec la pression, bien vite pour les pressions très faibles, en devenant invariable sous deux ou trois atmosphères, la réfraction spécifique de l'hydrogène diminue d'une manière analogue avec la pression croissante.

4<sup>o</sup>. On a pu, en se fondant sur les idées de la théorie atomique de Rutherford-Bohr, donner une explication qualitative satisfaisante de cette variation de la réfraction spécifique avec la pression.



# A revision of Atomic weight of aluminum. (II.)

(The analysis of aluminum chloride.)

By

Dr. HENRY KŘEPELKA.

Presented October 26<sup>th</sup> 1923.

In the table of the International Committee on Atomic Weights for 1921 the value 27.0 for the atomic weight of aluminum was adopted. This new figure replacing the old, evidently too high number 27.1 is based on a preliminary determination\*) of Th. W. Richards and H. Křepelka whose resulting value ( $\text{Al} = 26.963$ ) was derived as a mean of 4 analyses of aluminum bromide and rounded for The International Table to 27.0.

In the present investigation upon this subject the pure aluminum chloride was prepared and analyzed by comparison with silver. The properties of aluminum chloride are, of course, less convenient both in synthesis and analysis than those of the bromide. Since the chloride does not melt under ordinary conditions, we have to deal with a material obtained by repeated sublimation in nitrogen and in vacuo. On the other hand, the chloride contains twice as much aluminum as the bromide—a property counterpoising the above mentioned disadvantages.

Two methods can be applied for the preparation of pure dry aluminum chloride. First, the direct synthesis from aluminum metal and pure dry chlorine. Second, the reaction of chlorine upon a mixture of aluminum oxide and sugar coal. The reaction of pure dry hydrogen chloride with metallic aluminum does not come into consideration, since it starts at a rather high temperature.

## Preparation of materials.

*Aluminum.* A piece of aluminum of the same origin as the metal used for the synthesis of aluminum bromide was treated in the same manner

---

\*) Journ. Amer. Chem. Soc. Vol. 42, 2221, (1920).



as fully described in the preliminary paper.\*) To etch the aluminum surface hydrochloric acid was used.

*Chlorine.* The halogen was prepared by the action of hydrochloric acid on precipitated mangan dioxide hydrate. This method gives the chlorine perfectly free of oxygen.

*Mangan sulfate and potassium permanganate*, c. p. were twice recrystallized and then used for the preparation of mangan dioxide hydrate.

*Nitrogen* was prepared by the convenient method described in the first paper and generated in an apparatus which is generally used at Harvard.\*)

*Phosphorus pentoxide* was twice successively resublimed from a porcelain boat in an electrically heated tube of hard bohemian glass during the passage of dry oxygen.

*Silver.* Three different samples of standard silver were used for the precipitation of the solutions of aluminum chloride, namely:

First, silver applied in the investigation on the atomic weight of tin.\*\*) The preparation of this silver has been described in the communication just indicated so that further details are unnecessary except to state that before weighing it was washed in pure ammonia, dil. nitric acid, ammonia again and distilled water. The clean metal was dried in an electric drying oven at 250° in a room free of hydrogen chloride and hydrogen sulfide. This sample of standard silver was marked Ag-A.

Second, silver newly prepared in the same way as silver A. The final step in the purification of the precipitated silver was fusion of electrolytic crystals on lime in a current of pure dry hydrogen. All the final delicate operations were carried out in the usual Harvard method. The silver of this origin was denoted Ag-B.

Third, a silver prepared according to Stas by reduction of silver chloride with glucose. For this pure metal I am greatly indebted to Professor B. Brauner, who kindly gave me the remainder of a material prepared for his investigations on atomic weights. This silver was electrolytically refined and fused in hydrogen in the same manner as silver B. This third silver applied was called Ag-C.

*Hydrogen* was generated in a glass apparatus from the c. p. zinc ("Kahlbaum") free of arsenic and hydrochloric acid. The gas evolved was passed successively through distilled water, a solution of potassium hydroxide (20%), an alkaline solution of plumbo-salt, through a tube with fused potassium hydroxide. The hydrogen, being thus partly dried, was conducted into a porcelain tube, containing pumice stone, covered with platinum, and copper gauze. This tube was kept during the operation

\*) Loc. cit.

\*\*) Journ. Amer. Chem. Soc. Vol. 42. 926 (1920).



at red heat. The final drying was effected by means of fused potassium hydroxide.

*Sulphuric acid* was obtained by the double distillation of c. p. commercial specimen, only the middle fraction in each case being used.

*Nitric acid* was purified by repeated distillation and carefully tested in the nephelometer to prove the absence of halogen-ions.

*Water*. The distilled water for ordinary laboratory use was treated in the usual way described in an earlier article.\*)

### Apparatus for the synthesis of aluminum chloride.

In this investigation the direct synthesis from metallic aluminum and dry chlorine was used for the preparation of pure dry halide. Firstly the course of the reaction was studied in two preliminary trial syntheses; according to the experience gained in these experiments a great difficulty to be overcome was to master the reaction temperature. The reaction started at about  $450^{\circ}$  and as soon as the first portion of the chloride began to sublime the reaction became violent in consequence of the great heat of reaction. In order to prevent the melting of aluminum and eventual cracking of the reaction tube both the temperature of the heating oven and the flow of the chlorine had to be properly regulated. The melting of aluminum would have caused an additional difficulty by retarding the reaction owing to the decrease of its surface, which circumstance again would give more chance to the formation of silicon tetrachloride in larger quantities.

The apparatus as a whole was very similar to that used for the synthesis of aluminum bromide being accommodated to the high combining temperature and other properties of aluminum chloride. The following changes have been made in two main parts of the apparatus:

The reaction tube was made from a special, resistant, hard, bohemian glass. This material endured the high temperature and was very little corroded by chlorine. The reaction tube was connected with the other parts of the apparatus by means of two long air-tight joints. These had been very carefully ground, firstly, with fine emery, and finally with rouge. After this treatment they were smoothed with a paste of pure aluminum oxide and distilled water. No lubricant could have been used for the joints, however, aluminum oxide paste with the fine glass, rubbed off during grounding, proved, when allowed to solidify in the joints, to be satisfactorily air-tight; further with such a paste the subliming chloride would not have been contaminated and, last not least, the whole system could be heated slowly at the temperature of sublimation of aluminum chloride ( $183^{\circ}\text{C}$ ) without any danger of perceptible leakage.

---

\*) Journ. Amer. Chem. Soc. Vol. 42, 923, 1920.



The improvement concerned the second very important part of the apparatus, namely, the magnetic valve described in the previous paper. Hitherto the Richards-Craig\*) modification was applied using a rather strong electromagnet for breaking the fine inner tube. This delicate operation was never easy and always risky; when, however, a weaker magnetic field was generated to actuate a bar of soft iron enclosed in a glass tube the impact against the capillary was not strong enough to break it. On the other hand, the successive increase of magnetisation made more liable the break of the outer tube of the magnetic valve. Due to such a failure a pure sublimed aluminum chloride of one of final synthesis came into the contact with the atmosphere and had to be discarded. The method of breaking was therefore modified as follows:

The electromagnet was replaced by a solenoid S (see figure No 1). On sending through this solenoid a very short current, which could

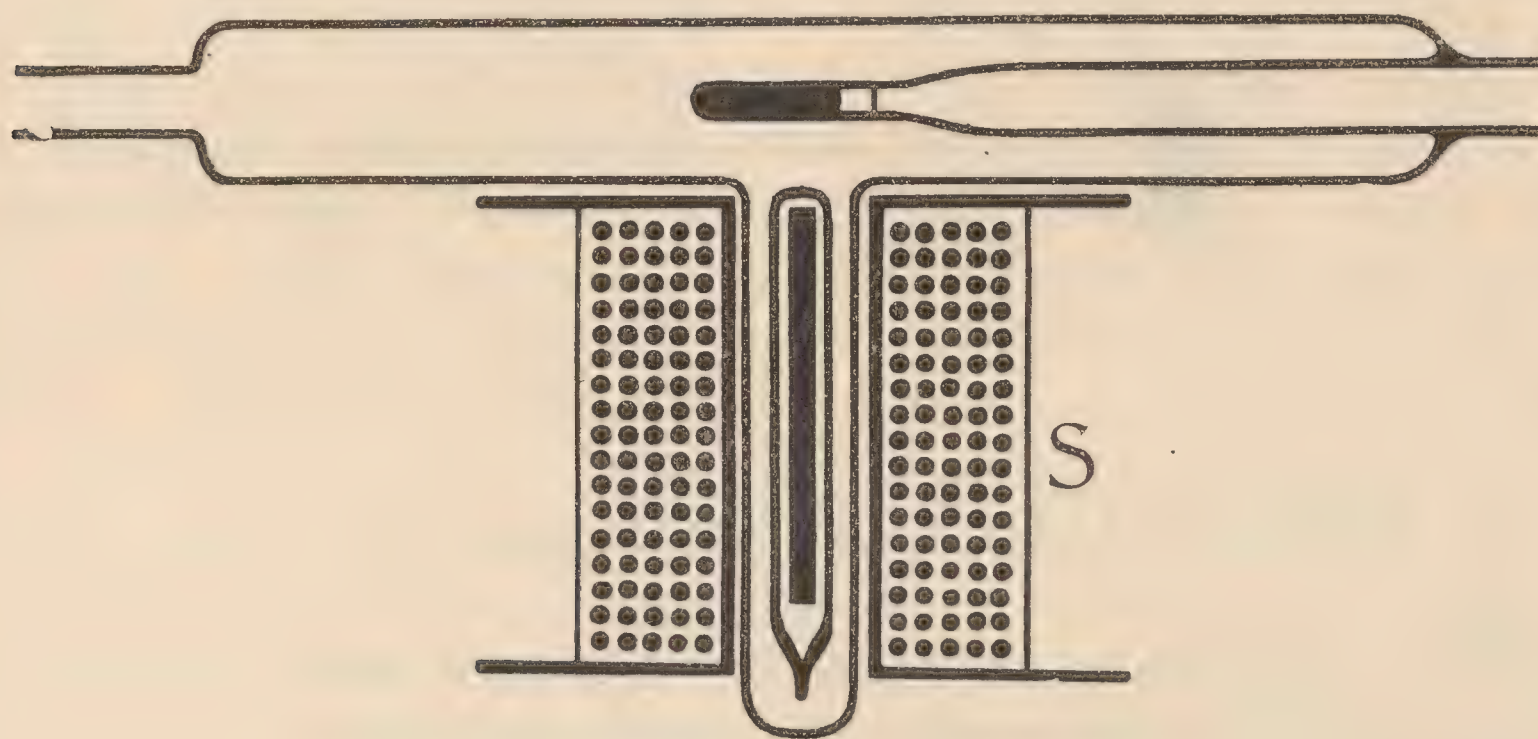


Fig. 1.

be effected by switching on and almost simultaneously breaking off, the iron bar was driven out and back again hereby gaining an impact sufficient to break the previously scratched capillary, but never could reach the opposite glass-wall. This way of breaking the valve was found to be very satisfactory and much safer than the previous one.

The whole apparatus used for the synthesis, for nitrogen, and chlorine was made of glass and sealed together. Along the passage of aluminum chloride only magnetic valves were used instead of stopcocks. Where stopcocks for gas connections were necessary, vacuum stopcocks were applied and were lubricated with syrupy phosphoric acid. The caps of these vacuum stopcocks were sealed above with paraffin wax which was melted when necessary to turn them.

\*) Journ. Amer. Chem. Soc. Vol. 41, 131 (1919).



The collecting bulbs were of the type used and fully described in the preliminary paper.\*) In figure 2, they are shown in cross section.

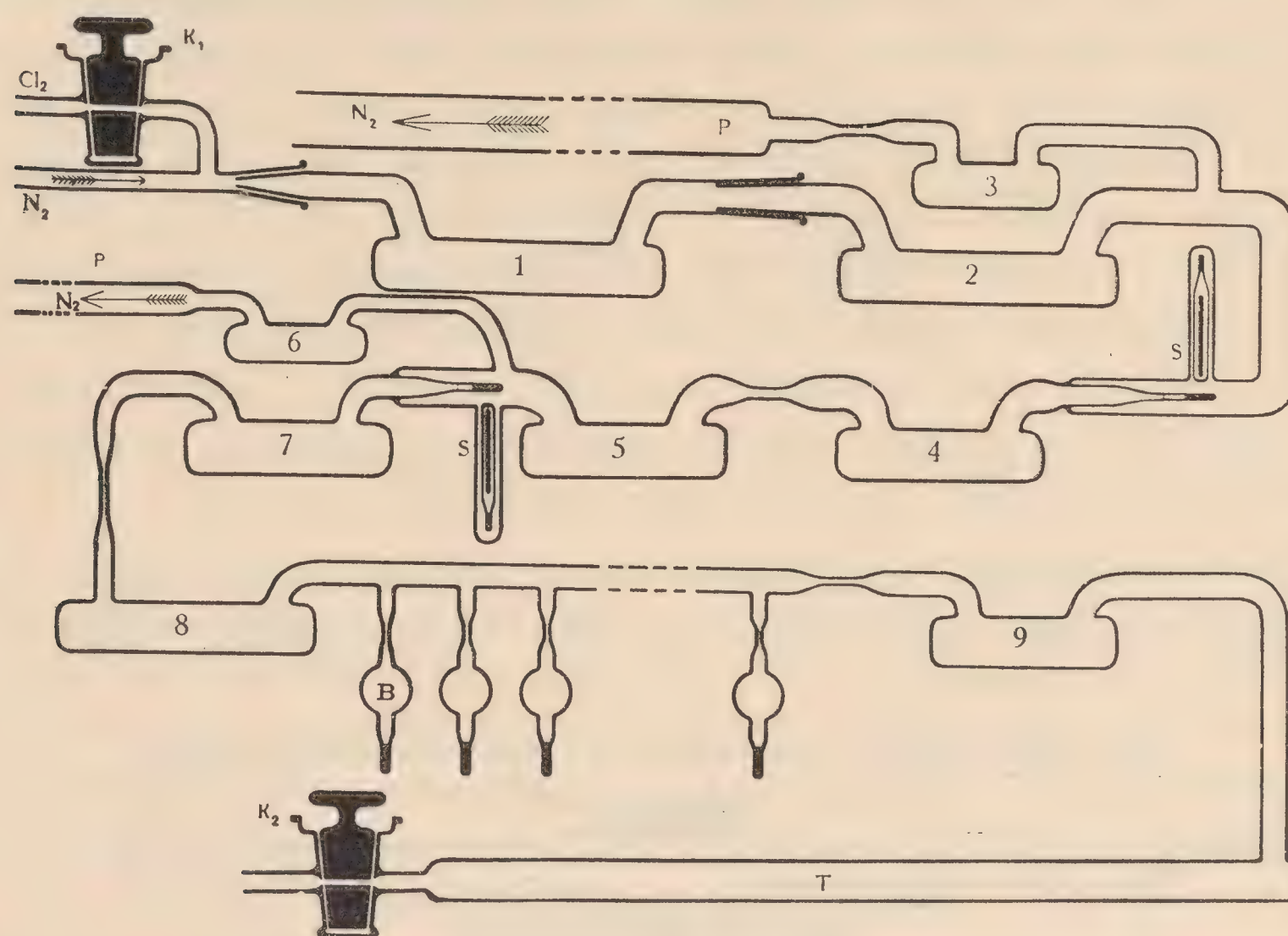


Fig. 2.

### Preparation of aluminum chloride.

When about 80gr of aluminum had been cautiously introduced into the Tube 1 the latter was joined to the apparatus in the manner described. The whole apparatus was again thoroughly dried by heating during the passage of dry nitrogen, the communication of the single portions of the apparatus with the atmosphere being established through a drying system comprising a long tube with phosphorus pentoxide and a washing bottle with distilled sulphuric acid.

Thereupon, pure dry nitrogen was passed for two hours through the first part of the apparatus, namely, Tubes 1, 2, 3. Reaction Tube 1 being electrically heated to  $100^{\circ}$ . After proving that this system was completely filled with nitrogen the temperature of Tube 1 was gradually raised, the nitrogen stream temporarily stopped and pure dry chlorine was introduced through the stopcock  $K_1$  into Reaction Tube 1. The dry halogen attacked aluminum perceptibly at about  $500^{\circ}$  and the formed chloride sublimed into Tube 2. Owing to the high heat of reaction the temperature of the reaction tube rose very rapidly and had to be regulated to prevent violent combustion, which might have broken the tube.

\*) Loc. cit.



In the course of 10 hours a sufficient amount of the chloride was deposited in Tube 2. The least volatile portion of this sublimate which accumulated in the first part of this receptacle, namely, in the end adjacent to Tube 1 showed a yellowish tint,\*) due to a trace of iron present in the original aluminum. This colour gradually disappeared in the direction of sublimation. After the completion of the reaction the aluminum chloride and a quantity of uncombined metal was cooled in a very slow stream of nitrogen. As the red head ceased, a bright green phosphorescence appeared in the reaction tube surrounding small pieces of corroded uncombined metal. This phenomenon was very probably caused by a trace of activated nitrogen its activation having been effected by the violent reaction of the chlorine left in the tube with the metallic aluminum. This phosphorescence was fully described in Nature.\*\*)

The contents of Tube 2 were digested for one hour at 100° C in nitrogen and thereupon without stopping its current the most volatile portion was sublimed at 150° in Receptacle 3 which was kept cool with ice water. When this had been accomplished Tube 3 was sealed off at the connecting capillary. Then the first magnetic valve was opened and the nitrogen was passed through Tubes 1, 2, 4, 5, 6, and drying system, whilst Vessel 2 was heated to about 180° with an adjustment which allowed to volatilize only the white sublimate deposited in the further part of Tube 2, the remaining first part with yellowish content having been cooled and insulated from the electric oven by an asbestos board. In this manner the white sublimate essentially purified from traces of iron, was deposited in the cooled receptacle No 4. This way of purification was, of course, accompanied by a considerable loss of material—about one half of the content of Tube 2 being discarded. Also the capillary tube of the magnetic valve greatly assisted to the separation of ferri-chloride from the aluminum chloride — no doubt, the narrow opening effecting a fractionation by diffusion. A second sublimation into Vessel 5 continued the fractional purification, a fraction of residue having been left in each case.

The contents of Receptacle 5 were digested in a slow current of nitrogen for one hour at 100° and again for 20 minutes at 120°. After this digestion the most volatile impurities, if there were such, were sublimed in nitrogen at 160° in Vessel 6, which as well as the drying system were then removed by sealing off in the same manner as Tube 3. Thereupon Vessels 4 and 5 were disconnected by sealing off the heavy capillary tube connecting them. Before opening the connecting valve between Vessels 5 and 7, the system of Tubes 7, 8, etc. has been repeatedly evacuated over the phosphorus pentoxide tube T through the stopcock K<sub>2</sub>. During that operation this portion of the apparatus was heated to ensure perfect dryness.

---

\*) When later on 10 *gr* of the yellowish sublimate were dissolved in 50 *ccm* H<sub>2</sub>O only a redish coloration has been observed by adding fresh solution of thiocynidea.

\*\*) Nature, July 28, 1923, No 2804.



Next, the second magnetic valve was broken and the residual nitrogen was completely exhausted through Stopcock  $K_2$ , which was lubricated with viscous syrupy phosphoric acid and above sealed with paraffin. By heating Vessel 5 to about  $140^\circ$  the aluminum chloride was sublimed in vacuo into Vessel 7 again leaving a residue about one quarter of the whole. A faintly yellowish residue deposited in the capillary of the second valve gave no positive reaction of ferri-ions with a fresh thiocyanide solution; this shows, how intense the colorating power of trivalent iron is in dry state.

The product was then pure white and any trace of iron, which might have remained, was eliminated by a second sublimation in vacuo into Vessel 8 again leaving behind about one quarter. During this sublimation the capillary of the magnetic valve was plugged with aluminum chloride by suitable arrangement of temperatures, so as to prevent the escape of any of the substance into Tube 5. Vessel 7 was then sealed off at the connecting capillary and removed.

At this stage of proceedings, the very pure substance was digested for 30 minutes at  $80^\circ$  while the series of the sampling bulbs were heated to about  $180^\circ$ , and Vessel 9 was cooled with ice water. After this last digestion the temperature of the sampling bulbs was raised to about  $250^\circ$  and the aluminum chloride again fractionated, the first portion of the sublimate having been collected and sealed off in Receptacle 9 at the connecting capillary.

About 50 gr of the aluminum chloride left into Vessel 8 represented the purest halide which was then fractionally sublimed into single bulbs. These collecting bulbs B were filled in the same manner as in the case of aluminum bromide.\*) Thus 13 samples were obtained in such an order that the first fraction was allowed to condense in the bulb farthest from Vessel 8.

### Method of Analysis.

One of the bulbs was used for each analysis. To correct the results to the vacuum standard\*\*) the exterior volume of each bulb separately was determined by weighing in water and subtracting this weight from the weight in air the temperature and pressure being noted. The previously scratched bulb was carefully cleaned with alcohol, distilled water and wiped dry with a chemically clean, lintless cloth. The bulb thus prepared, after standing several hours in a desiccator was ready for precise weighing by substitution. Weights were carefully standardized by the substitution method of Richards.\*\*\*) As in the case of aluminum bromide,†)

\*) Loc. cit.

\*\*) The specific gravities of silver, glass and brass were taken as, 10.5, 2.56, and 8.4, respectively.

\*\*\*) Journ. Amer. Chem. Soc. Vol. 22. 144, 1900. — Z. phys. Chemie 33, 605, 1900.

†) Loc. cit.



the solution of the salt in water was conducted with great care to avoid loss of hydrogen chloride, by a method which had proved so satisfactory in the former case. The solution with few drops of nitric acid was then filtered very carefully through a weighed Gooch-Munroe platinum crucible into a large glass stoppered precipitating flask. The crucible with the glass fragments after drying in an air-bath was again weighed and the weight of the empty bulb thus ascertained. From the weight of aluminum chloride the necessary amount of silver to combine with the chlorine was computed and this quantity of standard silver was weighed out and dissolved in nitric acid. After dilution until about 0.1 N the silver solution was slowly added to the chloride and the mixture was thoroughly shaken and allowed to stand several days in the dark room with an occasional shaking. To prevent the hydrolysis of the aluminum nitrate formed, 2 or 3 *ccm* of nitric acid were again added. The point of exact equivalence between chlorine and silver was ascertained so that the whole precipitating flask was cooled for several hours in an ice bath and the clean supernatant liquor, sufficiently cooled, then tested for excess of chlorine or silver in a nephelometer.

Twelve samples were analyzed, in each case the ratio  $\text{AlCl}_3 : 3 \text{ Ag}$  having been determined. Bulb No 3 cracked while having been prepared for weighing and therefore was not analyzed. Sample 13 was analyzed but the result of this analysis omitted as improbable, since the value obtained was  $\text{Al} = 26.989$  i. e. a figure perceptibly higher than 11 others. This discordance might have been due either to some failure during the analysis or to the modification of filling\*) through which the sample was obtained.

The data of first of the analyses may be given in full in order to make clear the applied corrections.

#### Analysis of Bulb 1.

Wt. of Bulb 1 in air .....	4.53474 gr	
Correction for vacuum (Sp. gr. = 1.34) .....	+ 0.00345 gr	
Bulb 1 in vacuo .....	4.53819 gr	4.53819 gr
Glass of Bulb 1 in air .....	2.82690 gr	
Correction for vacuum (Sp. gr. = 2.56) .....	+ 0.00093 gr	
Glass in vacuo .....	2.82783 gr	2.82783 gr
Aluminum chloride (in vac.) .....		1.71036 gr
Silver A in air .....	4.15165 gr	
Correction for vacuum (Sp. gr. = 10.49) .....	— 0.00013 gr	
Silver in vacuo .....	4.15152 gr	
Nephelometric test .....	— 0.00025 gr	
Total amount of silver (in vac.) .....	4.15127 gr	4.15127 gr

\*) All the residues from the connecting tube and the necks of the bulbs were in this case collected into Bulb 13 by sublimation at 160°.



The atomic weight of chlorine was taken as 35.458, that of silver 107.88

$$\text{AlCl}_3 : 3 \text{ Ag} = 0.412009$$
$$\text{At. weight of Al} = 26.969.$$

In the following table the results are summarized.

Table I.  
The Ratio  $\text{AlCl}_3 : 3\text{Ag}$ .

Sample	Sample Ag	Weight of $\text{AlCl}_3$ in vacuo	Weight of Ag in vacuo	$\text{AlCl}_3 : 3\text{Ag}$	At. weight of aluminum
1	A	1.71036 gr	4.15127 gr	0.412009	26.969
2	B	2.59733 gr	6.30438 gr	0.411988	26.962
3	—	—	—	—	—
4	B	1.98148 gr	4.80897 gr	0.412038	26.978
5	B	2.73108 gr	6.62852 gr	0.412019	26.972
6	C	3.18750 gr	7.73663 gr	0.412001	26.966
7	B	1.37059 gr	3.32652 gr	0.412019	26.972
8	A	2.99900 gr	7.27846 gr	0.412038	26.978
9	C	3.77259 gr	9.15600 gr	0.412035	26.977
10	A	2.88939 gr	7.01296 gr	0.412007	26.968
11	B	2.22557 gr	5.40157 gr	0.412023	26.973
12	C	1.88892 gr	4.58440 gr	0.412032	26.976
13	—	—	—	—	—
Average .....				0.412019	$26.972 \pm 0.001$

This value is only by 0.009 higher than that from the preliminary analysis. The slight increase falling within the experimental errors, can not be accounted for by a trace of iron impurity, since during the process of fractional purification already the chloride of Vessel 5 failed to show any analytical test for iron. On the other hand, a trace of silicon would tend to lower the atomic weight. The possibility of these two impurities counterpoising, is excluded by the negative test for iron.

The agreement of all the 11 analyses is a sure guarantee for the purity and chemical identity of both the analyzed fractions as well as the three samples of silver used.

We are thus justified to regard the mean value of 26.963 and 26.972, namely, 26.97 as the hitherto most probable figure for the atomic weight of aluminum.

This result is also of a theoretical interest. According to Aston\*) aluminum is a pure element, its atomic mass being 27. From the stand-

\*) Nature, November 18, 1922.



point of the nuclear structure it belongs to the type having the nucleus composed according to the scheme  $4n + 3$ . The chemical analysis gives here again a number slightly less than the sum of the nuclear masses of helium (4.00) and hydrogen (1.008) and although the three hydrogen nuclei are here satellites, it suggests, that this loss of mass might be due to a disturbing effect of electromagnetic forces within the nuclear system.

I take pleasure in acknowledging my indebtedness to the Bohemian Academy of Prague for financial support in this investigation.

### Summary.

This paper records the synthesis and analysis of pure aluminum chloride. The substance was prepared from very pure chlorine and the purest obtainable metallic aluminum. 11 different fractions of the chloride, digested and sublimed in nitrogen and in vacuo, were analyzed. The ratio  $\text{AlCl}_3 : 3\text{Ag}$  was determined, three different samples of standard silver having been used. The mean of these 11 determinations is  $\text{Al} = 26.972$  ( $\pm 0.001$ ), if silver is taken as 107.88, and chlorine as 35.458.

*Note:* During this work a new synthesis of aluminum chloride has been started from pure aluminum oxide, sugar-coal and chlorine.

*Chemical Institute of Charles' University  
Prague.*











ALOIS WIESNER, PRAGUE.













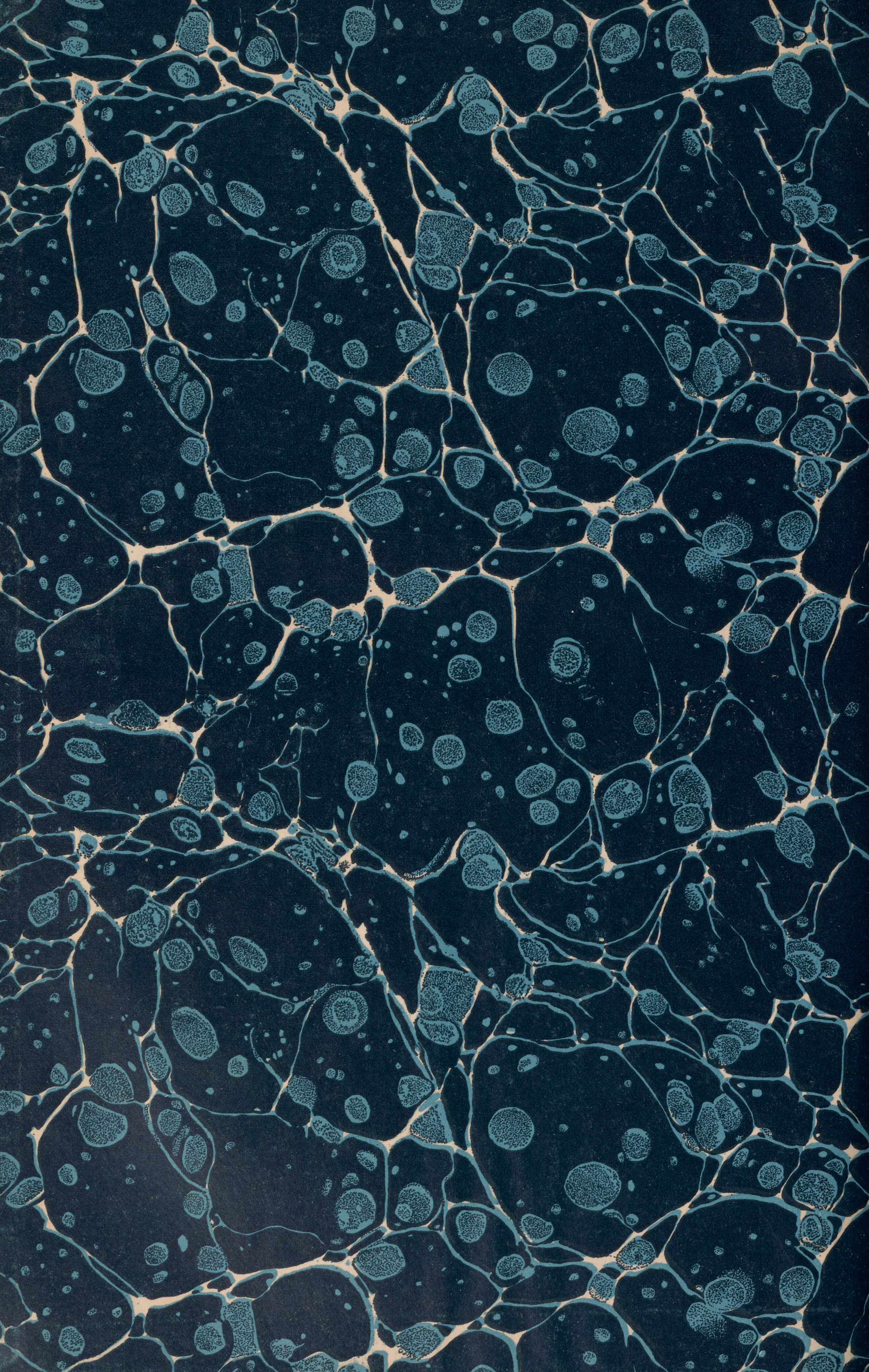




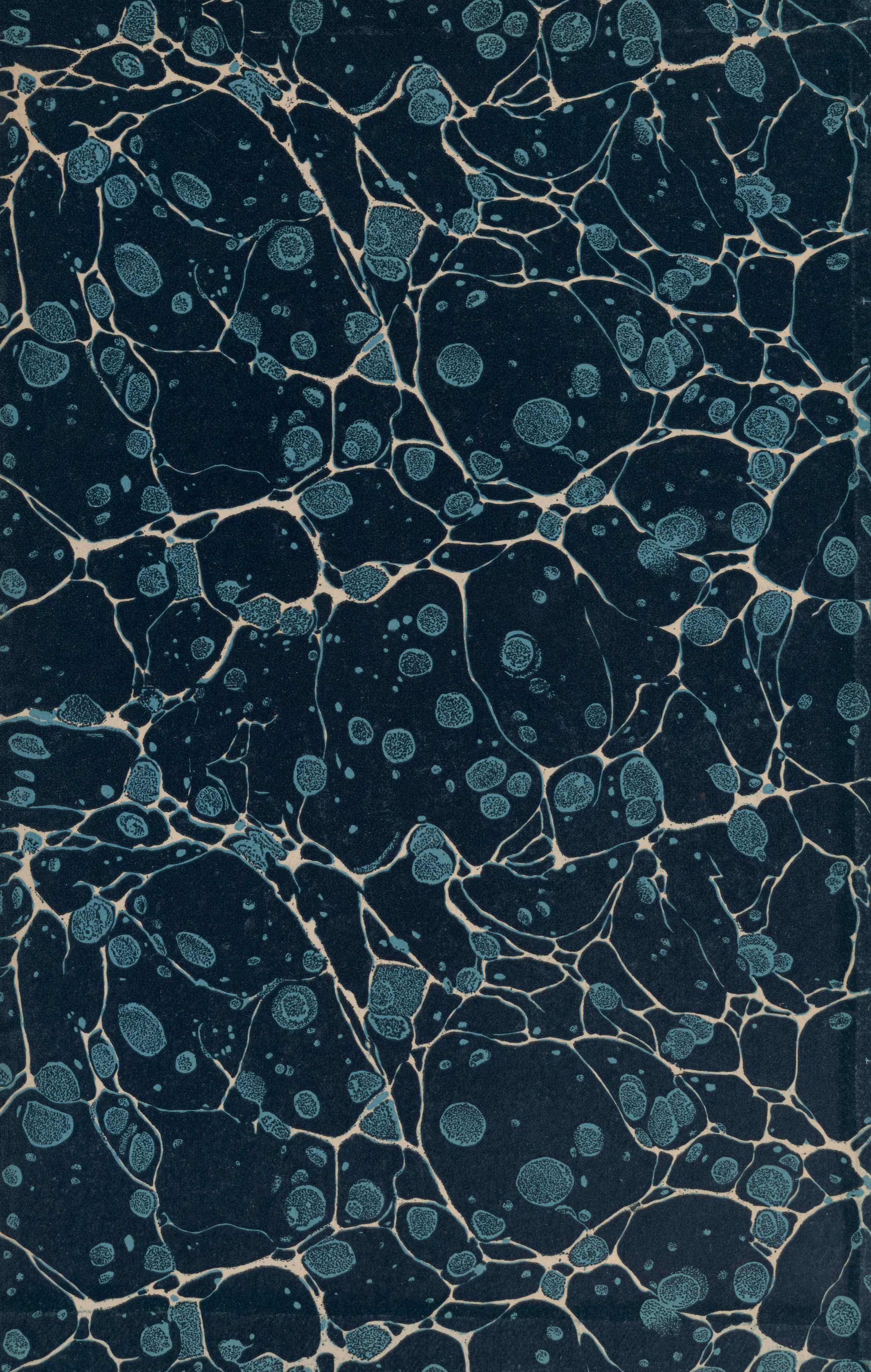














SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01298 3797